第40卷 第1期　西南师范大学学报(自然科学版)　2015年1月
Vol. 40 No. 1　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Jan. 2015

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2015.01.005

利用改进的遗传算法求解非线性方程组①

陈　磊[1,2]，　霍永亮[3]

1. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331；2. 重庆市群与图的理论及其应用重点实验室，重庆 永川 402160；
3. 重庆文理学院 数学与财经学院，重庆 永川 402160

摘要： 提出一种改进的求解非线性方程组的浮点遗传算法，算法通过把非线性方程组的求解问题转化为约束优化问题，然后将局部搜索信息引入遗传算法，通过改进的变异算子不断调整搜索区域，最终搜索到含有最优解的区域，再利用局部搜索信息提高解的精度．数值实验结果表明，改进后的浮点遗传算法具有较好的全局优化能力和局部搜索能力，且提高了求解的速度和解的精度．

关 键 词： 遗传算法；非线性方程组；约束优化问题；局部搜索

中图分类号： O224　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2015)1-0023-05

遗传算法[1-4]是将生物的演化过程看作一个长期的优化问题，利用生物演化的思想去解决一些较为复杂的问题．遗传算法是一种求解优化问题的有效工具．在科学技术和工程领域中常常需要求解非线性方程组，许多学者专家对求解这类问题的算法进行了深入研究：文献[5]提出一种非线性薛定谔方程组的散射模型；文献[6]采用一些新方法，在黎曼流形上研究一类非线性反应扩散方程组解的存在性与不存在性；文献[7]提出了一种求解对称非线性方程组的MPRP型Derivative—Free算法；文献[8]提出了一种求解非线性方程组的新的L-M方法．本文提出了一种求解非线性方程组的改进的浮点遗传算法．一般地，非线性方程组问题(1)可表述为

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中：$D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1,2,\cdots,n\}$；$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$；$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n): D \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续的．不妨假设非线性方程组在邻域 D 内有唯一解，定义函数 $F: D \longrightarrow \mathbb{R}$ 如下：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mid f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \tag{2}$$

这样我们可以把非线性方程组(1)转化为如下约束优化问题(2)：

$$\min_{x} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \text{s.t.} \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$$

① 收稿日期：2014-04-15
基金项目：重庆高校创新团队建设计划项目(KJTD301321)；重庆市群与图的理论及其应用重点实验室开放课题项目(KFJJ1402)．
作者简介：陈　磊(1988-)，男，四川自贡人，硕士，主要从事最优化算法研究．

一方面，假设 $\boldsymbol{x}^* \in D$ 是问题(1) 的一个解，那么有 $F(\boldsymbol{x}^*) = 0$. 因对 $\forall \boldsymbol{x} \in D$，有 $F(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$，所以我们推出 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(2) 的最优解. 另一方面，设 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(2) 的一个最优解，那么对 $\forall \boldsymbol{x} \in D$，有 $F(\boldsymbol{x}) \geqslant F(\boldsymbol{x}^*)$. 不妨设问题(1) 至少存在一个解为 $\boldsymbol{y}^*$，那么有 $0 \leqslant F(\boldsymbol{x}^*) \leqslant F(\boldsymbol{y}^*) = 0$，即 $F(\boldsymbol{x}^*) = 0$，$\boldsymbol{x}^*$ 是问题(1) 的一个解. 因此，若问题(1) 至少存在一个解，那么问题(1) 与问题(2) 是等价的.

1　改进的遗传算法

1.1　编　　码

遗传算法采用实数编码，每个个体对应于搜索空间的一个解(点)，其实现过程可描述为：

步骤一(初始化)　随机产生初始种群，确定算法的参数. 初始种群可表示为

$$\boldsymbol{i}(0) = (i_1(0),\ i_2(0),\ \cdots,\ i_N(0))$$

其中：N 为种群大小，$i_j(0)$ 为初始种群 $\boldsymbol{i}(0)$ 中第 j 个个体($j = 1,2,\cdots,N$).

步骤二(种群进化)　首先，评价个体适应度，独立地从种群中按比例选择 $N-1$ 个个体作为父代；其次，独立地从当前父代中选择 $N-1$ 对个体按交叉率进行交叉操作，得到 $N-1$ 个中间个体，对得到的 $N-1$ 个中间个体按变异率进行变异操作得到 $t+1$ 代种群的前 $N-1$ 个个体 $i_1(t+1)$，$i_2(t+1)$，…，$i_{N-1}(t+1)$，其中 $i_j(k)$ 表示 k 代种群中第 j 个个体；最后，在 $\boldsymbol{i}(t)$ 中选择出最优个体 $i^*(t)$，并令 $t+1$ 代种群的第 N 个个体 $i_N(t+1) = i^*(t)$.

步骤三(搜索空间调整)　按照 $t+1$ 代种群的个体适应度分布和编码特点，对搜索空间进行不断调整，并对落在新的搜索空间外的个体进行修复.

步骤四(终止准则)　若终止准则满足，则输出 $i^*(t)$ 作为问题的近似最优解，否则，令 $t = t+1$ 转步骤二.

1.2　锦标赛选择

假定在 N 个函数值中随机选择 m 个个体，即锦标赛的规模是 m. 遗传算法采用锦标赛选择，其基本思想是在 m 个个体中，随机选择两组相同个数的个体，对每组个体按适应度进行排序，选择两组中适应度最好的两个个体作为父代以交叉率 p_c 进行两两交叉，然后再从剩下的 $m-2$ 个个体中，随机选择两组相同个数的个体，对每组个体按适应度进行排序，选择两组中适应度最好的两个个体作为父代以交叉率 p_c 进行两两交叉，如此反复，直到选出的父代个数满足要求为止. 采用锦标赛选择有利于消除最优个体对最坏个体的影响，避免算法出现早熟现象，而且不需要对函数 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 作任何改变.

1.3　变异操作

根据Particle Swarm优化算法的速率更新提出了改进的变异操作[9]. 假设个体 $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 中元素 x_i 产生变异，通过如下方程变异成新元素 x'_i：

$$x'_i = c_1 r_1 (x_i^b - x_i) + c_2 r_2 (x_i^b - x_i) \tag{3}$$

其中：c_1, c_2 均为正常数；r_1, r_2 都是[0, 1] 上的随机数；b 是控制元素 x_i 的大小变化的参数.

解的优化主要依靠选择和交叉操作来完成，而变异操作的主要作用是避免算法陷入搜索空间的某个局部区域，从而保证算法的全局收敛性. 假设 p_m 是变异率，对每个个体(不含最优个体)，产生一个随机数 $r \in (0,\ 1)$，若 $r < p_m$ 则该个体需进行上述变异操作.

1.4　局部搜索

算法采用最优个体保留策略，其基本思想是当前种群中适应度最好的个体不参与交叉操作和变异操作，而是用其来替换掉当代种群中经过交叉、变异等遗传操作后所产生的适应度最坏的个体. 运用局部搜索[9] 寻找每 K_{ls} 代的局部最优个体 x_l，从而加快算法的收敛速度，其中局部搜索周期 K_{ls} 是一个被定义的常数(本文选取 $K_{ls} = 10$)，其表示需要多长时间运用一次局部搜索. 运用局部搜索的目的是改进 x_l 的函数值

并加快改进算法的收敛速率.

1.5　终止准则

Kaelo 和 Ali 的终止准则[10] 主要是根据种群中的最优个体和最坏个体的差异来决定是否终止. 改进的终止准则也合并了 Kaelo 和 Ali 的终止准则：

$$\left|1-\frac{F_l}{F_h}\right| \leqslant \varepsilon \text{ 或 } \mathrm{iter} > \mathrm{ITERMAX}$$

其中：F_h 是种群中最坏个体的函数值，F_l 是种群中最优个体的函数值.

2　算法步骤

步骤一(初始化)　令 iter $=0$. 输入所求问题的各种数据及控制参数：种群规模 N，最大遗传代数 ITERMAX，交叉率 P_c，变异率 P_m，局部搜索周期 K_{ls}，当前的遗传代数 iter，锦标赛的规模 m.

步骤二　采用十进制浮点数编码，随机选取满足约束条件的初始种群，并计算出每个个体的适应度.

步骤三　根据个体适应度进行锦标赛选择.

步骤四　根据 Particle Swarm 优化算法的速率更新，利用改进的变异操作对种群中个体进行变异.

步骤五　每 K_{ls} 代对最优个体利用局部搜索，更新种群.

步骤六　令 iter $=$ iter $+1$.

步骤七　若终止准则不满足则转至步骤三；否则结束算法，以当前最优解作为所求问题的解.

3　数值模拟

为了检验本文算法的有效性和可靠性，本文选取两个具体例子作如下数值模拟.

例 1[11-12]

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ f_2(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 - 1 = 0 \\ f_3(\boldsymbol{x}) = x_1{}^2 + x_2{}^2 - 2 = 0 \\ D = \{\boldsymbol{x} \mid 0 \leqslant x_1,\ x_2,\ x_3 \leqslant 2\} \end{cases}$$

例 2[12-13]

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}) = x_1{}^{x_2} + x_2{}^{x_1} - 5x_1x_2x_3 - 85 = 0 \\ f_2(\boldsymbol{x}) = x_1{}^3 - x_2{}^{x_3} - x_3{}^{x_2} - 60 = 0 \\ f_3(\boldsymbol{x}) = x_1{}^{x_3} + x_3{}^{x_1} - x_2 - 2 = 0 \\ D = \{\boldsymbol{x} \mid 3 \leqslant x_1 \leqslant 5,\ 2 \leqslant x_2 \leqslant 4,\ 0.5 \leqslant x_3 \leqslant 2\} \end{cases}$$

算法适应度函数定义为

$$F(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mid f_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \mid$$

算法采用的控制参数值见表 1.

表 1　改进算法中不同参数的取值

参数	N	ITERMAX	p_m	p_c	m	K_{ls}
数值	30	20	0.05	0.2	10	10

两个算例的数值计算结果见表 2(其中 t 是 CPU 时间，T 是最优解出现的代数).

表2 数值结果比较

算例	算法	最优解 $\boldsymbol{x}$	$F(x)$	$t(s)$	T
例1	文献[11]	(1.005 33 0.979 7 0.968 468)	0.030 9	12	—
	文献[12]	(1.011 75 0.982 2 0.999 9)	2.339 5e-004	—	—
	本文算法	(0.999 7 1.000 1 1.000 0)	1.0003e-006	0.249	2
	精确解	(1 1 1)	0		
例2	文献[12]	(3.994 0 3.007 9 1.007 9)	0.604 1	—	—
	文献[13]	(3.997 4 3.010 7 0.998 7)	0.198 7	—	4 660
	本文算法	(3.999 7 2.999 9 1.000 3)	2.18e-004	0.526	95
	精确解	(4 3 1)	0		

表2的数值模拟结果表明，本文算法是有效和可靠的，而且在计算时间和计算精度两方面都明显优于文献[11－13]的算法数值结果. 以例1为例，遗传算法、浮点遗传算法和本文提出的改进的浮点遗传算法的遗传代数 iter 与目标函数 $F(\boldsymbol{x})$ 的值之间的关系见图1.

根据图1模拟的数值结果不难看出，改进的浮点遗传算法与浮点遗传算法和遗传算法相比较，在进化前期加快了收敛速度，节约了计算时间，且改进的浮点遗传算法最终得到的解的精度更高，说明改进算法是有效的.

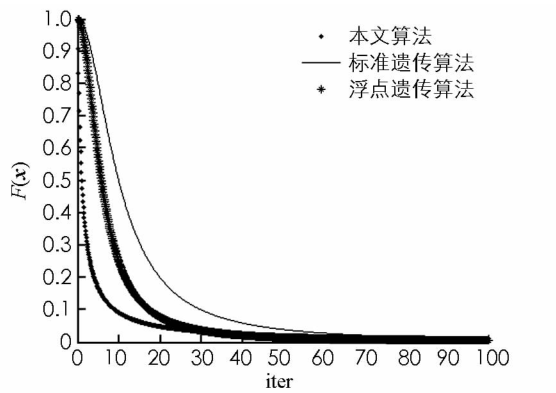

图1 3种算法的遗传代数与 $F(\boldsymbol{x})$ 的值之间的关系

4 结束语

本文算法通过对浮点遗传算法的选择、变异遗传操作进行改进，并加入局部搜索信息这一步骤，得到改进的浮点遗传算法. 算法在改进的终止准则中合并了 Kaelo 和 Ali 的终止准则，丰富了算法的终止条件. 在运用改进的浮点遗传算法求解非线性方程组问题的过程中：首先将非线性方程组问题转化为约束优化问题；其次通过改进策略求解该约束优化问题；最后利用局部搜索信息求得该问题精度较高的最优解.

参考文献：

[1] HOLLAND J H. Adaptation in Natural and Artificial Systems [M]. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1975.

[2] LIN C T, LEE C S. Neural Fuzzy Systems: a Neuro-fuzzy Synergism to Intelligent Systems[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1996.

[3] MCCALL J. Genetic Algorithms for Modeling and Optimization [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 184(1): 205－222.

[4] EMMANUEL K N. Solving The Parameter Identication Problem of Mathematics Models Using Genetic Algorithms [J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 153(3): 651－658.

[5] 姜禄彦, 许 娜. 非线性薛定谔方程组的散射 [J]. 应用数学, 2013, 26(2): 248－257.

[6] 汝 强. 黎曼流形上研究一类非线性反应扩散方程组解的存在性与不存在性 [J]. 应用数学, 2013, 26(4): 914－919.

[7] 李 灿. 求解对称非线性方程组的 MPRP 型 Derivative—Free 算法 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2014, 36(1): 67－71.

[8] 何叶丹, 马昌凤, 范 斌. 求解非线性方程组的一种新的 L-M 方法 [J]. 福建师范大学学报: 自然科学版, 2014,

30(2)：20－25.

[9] IOANNIS G T. Modifications of Real Code Genetic Algorithm for Global Optimization [J]. Applied Mathematics and Computation，2008，203(2)：598－607.

[10] KAELO P，ALI M M. Integrated Crossover Rules in Real Coded Genetic Algorithms [J]. European Journal of Operational Research，2007，176(1)：60－76.

[11] 胡能发，潘清芳. 求解多元方程组的遗传算法 [J]. 荆州师范学院学报：自然科学版，2002，25(2)：11－13.

[12] 曾　毅. 改进的遗传算法在非线性方程组求解中的应用 [J]. 华东交通大学学报：自然科学版，2004，21(4)：132－134.

[13] 排新颖，王子亭. 带有梯度信息的遗传算法在求解非线性方程组求解中的应用 [J]. 中国石油大学学报：自然科学版，2009，33(3)：172－174.

On Solution toNonlinear Equation Group by Means of Improved Genetic Algorithm

CHEN　Lei[1,2]，　HUO Yong-liang[3]

1. School of Mathematics，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China；

2. Key Laboratory of Chongqing Groups and Graph Theory and Its Applications，Yongchuan Chongqing 402160，China；

3. School of Mathematics and Finance，Chongqing University of Arts And Sciences，Yongchuan Chongqing 402160，China

Abstract：An improved floating genetic algorithmhas been proposed to solvenonlinear equation group，andlocal search information been introduced into the genetic algorithm. The search regionhas continuously beenadjusted by improved operator. And the region containing the optimal solution has beenfound finally. The solution precision can be improved with local search information. The numerical experiment results show that the improved floating genetic algorithm has good local search ability and global optimization capability，and can improve the speed and accuracy of the solution.

Key words：genetic algorithm；nonlinear equation group；constrained optimization problems；local search

责任编辑　张　构