DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2015.01.026

二级近似下精密测量重力加速度的理论研究[①]

陈　泽[1,2]，　支启军[1]

1. 贵州师范大学 物理与电子科学学院，贵阳 550001；2. 江苏省盐城中学，江苏 盐城 224005

摘要：单摆测重力加速度是普通物理学中非常重要的实验，角振幅对精密测量重力加速度具有重要的影响. 特别是当角振幅较大时，计算重力加速度的二级近似公式对精密测量重力加速度具有重要的意义.

关　键　词：单摆；重力加速速；角振幅

中图分类号：**O322**　　　**文献标志码**：**A**　　　**文章编号**：1000－5471(2015)1－0148－05

重力加速度是物理学中的一个基本参数，在很多物理现象中扮演着重要的角色，精密测量地球各点的绝对重力加速度，对国防建设、经济建设和科学研究具有十分重要的意义. 比如，远程洲际弹道导弹、人造地球卫星、宇宙飞船等都在地球重力场中运动. 在设计太空飞行器时，都要首先知道准确的重力场数据. 因此，不少学者对精密测量重力加速度的影响的研究具有较大的兴趣，也取得了一定的研究成果. 廉育英、刘智敏研究了天体对地球重力加速度的影响，并推导了这种影响的计算公式，通过误差分析，证明了此公式的相对误差小于 1×10^{-9}，完全可满足现代精密测量重力加速度的要求[1]；钟鸣乾研究了引力常数“G”的可变性对重力加速度的影响，同时阐述了在广义相对论等引力理论基础上重力加速度的后牛顿效应[2]；潘学军研究了利用弹簧振子的方法测定重力加速度[3]；郝建明、李咏波、和伟根据误差理论并用数学方法，对单摆法测定重力加速度的方式进行了分析，得出了修正公式，且进行了系统分析与详细推导[4]；秦鸣雷、肖一凡、杨海亮等人研究了大角度下阻尼对单摆振动周期的影响，给出了周期值受阻尼影响的近似公式，丰富了大角度的单摆的研究，同时对改进大角度下利用单摆测量重力加速度的研究也具有一定的意义[5]；李应发研究了用弦振动测量当地重力加速度的方法，并对测量原理和公式进行了较为详细的推导，用测量结果与理论值及单摆法测量值进行比较，证实了该方法对测量当地重力加速度也比较准确[6].

在普通物理学中，通过单摆模型间接测量重力加速度是一种重要的方法. 由于重力加速度是由所在位置的引力场决定的，从这一角度来说，重力加速度的值具有客观性. 但单摆模型是一个理想模型，而实验测量时用到的实际单摆不可能满足这个理想模型. 因此在实验中，利用单摆模型精密测量重力加速度，需要考虑的因素有很多，如角振幅、空气阻力、浮力以及小球与悬线的质量分布等因素的影响都会给精密测量造成影响，特别是角振幅，是利用单摆模型精密测量重力加速度的一个重要影响因素. 因此，研究角振幅对精密测量重力加速度的影响的理论具有重要的应用价值. 虽然目前关于利用单摆精密测量重力加速度的理论研究已经不少，其精密度也很高，但由于提出的精密测量重力加速度的公式比较繁杂，在实验时，利用这些公式通过计算来测量重力加速度，显得比较复杂. 因此，寻找一种精密测量重力加速度的简单、便于操作的方法显得非常重要. 本文在详细介绍了测量重力加速度的二级近似公式的基础上，对测量重力

① 收稿日期：2013－06－04

基金项目：贵州省国际科技合作计划(20117026)；贵州省留学人员科技活动计划(2013－03).

作者简介：陈　泽(1983－)，男，安徽安庆人，硕士，主要从事物理教学论、理论物理方面的研究.

加速度的二级近似公式的不确定度与相对误差进行了详细的分析与计算；同时考虑到空气阻力对角振幅的影响，得出了角振幅在一定范围内，二级近似公式对精密测量重力加速度是满足的，且利用该公式计算测量重力加速度比较简单.

1　角振幅对测量重力加速度的影响的理论推导

利用单摆测量重力加速度是普通物理学中一个非常重要的实验. 而单摆是一种物理模型，它是一个形状、大小都可以看成质点的小球系在不计伸长和质量的摆线上的. 通常用一不可伸长的轻线悬挂一小球，作幅角很小的摆动就可以看作是一个单摆[7]（图 1）. 设小球的质量为 m，其质心到摆的支点 O 的距离为 l（摆长）. 作用在小球上的切向力为 $mgl\sin\theta$，假设小球的角振幅为 Θ，对单摆与地球构成的系统，当不考虑外界阻力时，由刚体对质心轴的转动定理得单摆的动力学方程：（不考虑小球与悬线的质量分布等因素的影响）

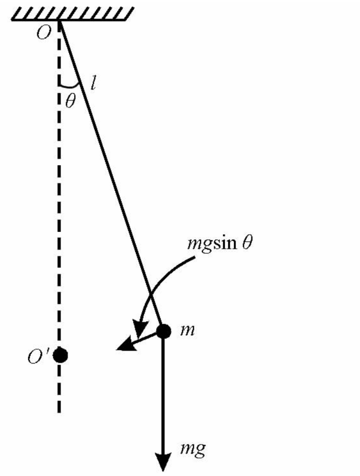

图 1

$$mgl\sin\theta = -ml^2\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

即：

$$\frac{g}{l}\sin\theta + \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{1}$$

对于作角振幅很小的单摆，可以利用 $\sin\theta \approx \theta$ 的近似来求微分方程(1) 的解，但对于角振幅较大的单摆，显然不能利用 $\sin\theta \approx \theta$ 的近似来求解微分方程(1). 这时，可以采用直接积分的方法求解，得到精确的单摆振动周期公式[8]

$$T = T_0 \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\left(\sin^2\dfrac{\Theta}{2}\cdot\sin^2\varphi\right)}} = T_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot K(\Theta) \qquad \text{其中 } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2}$$

公式(2) 中的 $K(\Theta)$ 是第一类椭圆积分，显然 $K(\Theta)$ 不能用简单的基本函数表示，所以应用时需要查椭圆积分表，其实用性受到限制[9].

近年来，为了提高单摆周期的精确度与计算方便，一些学者相继提出了不同的近似公式，其中有代表性、且精度相对比较高的是[10]：

$$T = T_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\dfrac{1}{2}\Theta - \dfrac{1}{256}\Theta\right)}} \tag{3}$$

公式(3) 可以展开成[4]：

$$T = T_0 \cdot \left[1 + \frac{1}{16}\Theta^2 + \frac{11}{3\ 072}\Theta^4 + \frac{2\ 813}{11\ 796\ 480}\Theta^6 + O(\Theta^8)\right] \tag{4}$$

为了从理论上得到：当角振幅较大时，精密测量重力加速度的公式，可以利用公式(4) 得到计算重力加速度的公式：

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \left[1 + \frac{1}{16}\Theta^2 + \frac{11}{3\ 072}\Theta^4 + \frac{2\ 813}{11\ 796\ 480}\Theta^6 + O(\Theta^8)\right]^2 \tag{5}$$

取公式(5) 的二级近似公式得：

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l \cdot \left[1 + \frac{1}{16}\Theta^2\right]^2 \tag{6}$$

以及一级近似下计算重力加速度的计算公式：

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l \tag{7}$$

2 不确定度与相对误差的分析计算

2.1 不确定度的分析计算

实验时，通常摆长取 100.00 cm；由于测量一个周期的相对误差较大，一般是测量连续 N 个周期的时间，则 $T=\frac{t}{N}$，因此不确定度的计算取 $N=50$，$t=100.00$ s(摆线质量、空气浮力等项引入的不确定度较小，略去不计).

1) 摆长 l 的标准不确定度 $u(l)$：

来源于钢卷尺(参照 JJG1 - 1999)$\Delta=0.27$ mm，$u_A(l)=0.27\ \text{mm}/\sqrt{3}=0.156$ mm；

来源于测量过程中的起伏不定引起的不确定度利用贝塞尔公式求出：

$$S_l=\sqrt{\frac{\sum_1^N(l_i-\bar{l})}{N-1}}=0.02\ \text{mm}$$

游标卡尺引入的不确定度很小略去不计，则

$$u_c(l)=u(l)=\sqrt{0.156^2+0.02^2}\text{mm}=0.157\ \text{mm}$$

2) 时间 t 的标准不确定度 $u(t)$：

电子秒表在多次测量时人为开始计时和结束计时造成的误差限各为 0.1 s，则

$$u_A(t)=\frac{\sqrt{0.1^2+0.1^2}}{\sqrt{3}}s=0.091$$

电子秒表引入的(参照 JJG237 - 2010)$\Delta=0.014$ s，$u_B(t)=\frac{0.014}{\sqrt{3}}$s，则

$$u_c(t)=\sqrt{u_A(t)^2+u_B(t)^2}s=0.091\ \text{s}$$

在不考虑 π 和 N 的误差情况下，计算重力加速度一级近似公式的相对不确定度传递公式为：

$$\frac{u_c(g)}{g}\times 100\%=\sqrt{\left(\frac{u_c(l)}{l}\right)^2+\left(2\frac{u_c(t)}{t}\right)^2}\times 100\%=$$

$$\sqrt{(0.000\ 157/1)^2+(2\times 0.091/100)^2}\times 100\%=0.182\ 7\%$$

在不考虑 π 和 N 的误差情况下，计算重力加速度二级近似公式(6)的相对不确定度传递公式为：

$$\frac{u_c(g)}{g}\times 100\%=\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2\cdot u_c(l)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2\cdot u_c(t)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial \Theta}\right)^2\cdot u_c(\Theta)^2}/g\times 100\%=$$

$$\sqrt{\left(\frac{u_c(l)}{l}\right)^2+\left(\frac{2u_c(t)}{t}\right)^2+\left[\frac{u_c(\Theta)\cdot\frac{1}{4}\Theta}{1+\frac{1}{8}\Theta^2}\right]^2}\times 100\%$$

3) Θ 的标准不确定度 $u(\Theta)$：

以摆角的最大误差限为 0.1 度计算，则

$$u(\Theta)=\frac{0.001\ 74\ \text{rad}}{\sqrt{3}}=0.001\ 0\ \text{rad}$$

因此

$$\frac{u_c(g)}{g}\times 100\%=\sqrt{(0.000\ 157/1)^2+(2\times 0.091/100)^2+\left[\frac{0.001}{(\frac{4}{\Theta}+\frac{\Theta}{2})}\right]^2}\times 100\%$$

2.2 相对误差的分析计算

通过实验可知：当 $\Theta<30^\circ$ 时，当地重力加速度 $g_{地}$ 与一级近似下计算的重力加速度在数值上相差较

小，所以它们的比值很接近 1．因此可以推导公式(5)的二级近似公式相对一级近似公式、三级近似公式相对二级近似公式计算重力加速度精确度提高的百分比估算公式(估算时可认为：$g_{地} \approx \frac{4\pi^2}{T^2}l$；略去高次项)．

$$\frac{\Delta g_{2-1}}{g_{地}} \times 100\% = \left(\frac{g_{地} - g_1}{g_{地}} - \frac{g_{地} - g_2}{g_{地}}\right) \times 100\% = \frac{g_2 - g_1}{g_{地}} \times 100\% =$$

$$\frac{\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l \cdot \left[(1 + \frac{1}{16}\Theta^2)^2 - 1\right]}{g_{地}} \times 100\% \approx$$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{16}\Theta^2\right)^2 - 1\right] \times 100\% \approx \left(\frac{1}{8}\Theta^2\right) \times 100\%$$

同理可得：

$$\frac{\Delta g_{3-2}}{g_{地}} \times 100\% \approx \left[\left(1 + \frac{1}{16}\Theta^2 + \frac{11}{3072}\Theta^4\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{16}\Theta^2\right)^2\right] \times 100\% \approx \left(\frac{11}{1536}\Theta^4\right) \times 100\%$$

表 1 为 $5° < \Theta < 45°$ 时，不同的角振幅下，公式(5)的二级近似公式相对一级近似公式、以及三级近似公式相对二级近似公式精确度提高的百分比估算值、相对不确定度对比表．

表 1　各公式精确度提高的百分比估算值和相对不确定度对比表

Θ/°	$\frac{\Delta g_{2-1}}{g_{地}} \times 100\%$	$\frac{\Delta g_{3-2}}{g_{地}} \times 100\%$	$\frac{u_c(g)}{g} \times 100\%$ (一级近似)	$\frac{u_c(g)}{g} \times 100\%$ (二级近似)
5	0.095 2	$4.155\,5 \times 10^{-5}$	0.182 7	0.1827
7	0.186 7	$1.597\,9 \times 10^{-4}$	0.182 7	0.182 7
10	0.381 1	$6.657\,9 \times 10^{-4}$	0.182 7	0.182 7
15	0.858 6	0.003 4	0.182 7	0.182 8
20	1.528 9	0.010 7	0.182 7	0.182 9
25	2.394 0	0.026 3	0.182 7	0.183 0
30	3.456 3	0.054 8	0.182 7	0.183 1
45	7.859 3	0.283 2	0.182 7	0.183 6

通过表 1 和图 2 比较发现，当 $\Theta = 7°$ 时，在利用公式(5)的二级近似公式(6)比一级近似公式(7)计算重力加速度的精确度提高了约 0.186 7%，这时 $\frac{\Delta g_{2-1}}{g_{地}} \times 100\% > \frac{u_c(g)}{g} \times 100\%$(一级近似)，因此已不能忽略，所以利用一级近似公式(7)精密测量重力加速度，要求 $\Theta < 7°$；在当 $\Theta = 30°$ 时，公式(5)的三级近似公式比二级近似公式(6)在计算重力加速度时的精确度提高约 0.054 8%；此时 $\frac{\Delta g_{3-2}}{g_{地}} \times 100\% < \frac{u_c(g)}{g} \times 100\%$(二级近似)，但角振幅大于 15°，这时一方面空气阻力的影响比较显著，角振幅在开始阶段衰减较快(表 2)，另一方面不便于实验操作．

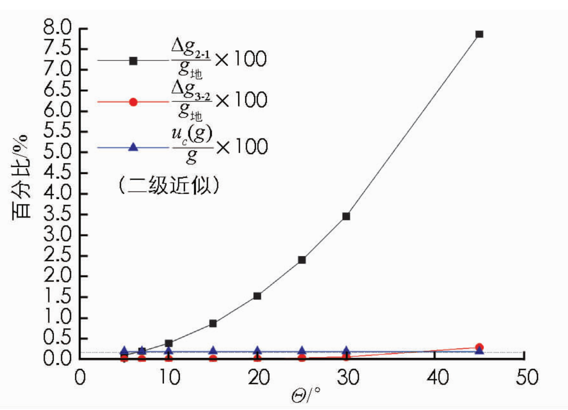

图 2　不同近似公式测量重力加速度的精确度随着角振幅变化的对比图

为了更精密地测量重力加速度，在 $7° < \Theta < 15°$ 时，利用公式(5)的二级近似公式(6)来精密测量重力加速度是有效的．而一级近似公式(7)已不能满足精密测量重力加速度的要求．

表2 不同初始角振幅，单摆振动50次后的角振幅值

初始角振幅	角振幅				
$\Theta/°$	5	10	15	30	45
$\Theta'/°$	4.0	6.9	11.5	20.2	25.6

3 结束语

通过介绍角振幅对单摆法测量重力加速度的影响的理论公式，并计算研究了二级近似公式，与一级近似公式对精密测量重力加速度的影响，结果发现，在 $\Theta = 7°$ 时，一级近似公式不能满足精密测量重力加速度的要求，为了精密测量重力加速度一般要求 $\Theta < 7°$，而二级近似计算公式在 $7° < \Theta < 15°$ 时，与三级近似公式的计算结果相差很小，理论上是可以满足精密测量重力加速度的要求．因此在 $7° < \Theta < 15°$ 时，测量重力加速度的二级近似公式对精密测量重力加速度具有重要的意义．

参考文献：

[1] 廉育英，刘智敏．天体对地球重力加速度的影响［J］．西北大学学报：自然科学版，1982，37(4)：9－19．

[2] 钟鸣乾．重力加速度的新探索［J］．物理，1992，21(10)：587－591．

[3] 潘学军．用弹簧振子测定重力加速度［J］．四川师范大学学报：自然科学版，1995，18(3)：65－69．

[4] 郝建明，李咏波，和 伟．单摆法测重力加速度的修正公式分析［J］．云南师范大学学报：自然科学版，2004，24(3)：63－66．

[5] 秦鸣雷，肖一凡，杨海亮，等．大角度下阻尼对单摆摆动周期的影响［J］．物理实验，2012，32(5)：42－45．

[6] 李应发．测量重力加速度的一种新方法［J］．贵州师范大学学报：自然科学版，2012，30(5)：76－79．

[7] 杨述武．普通物理实验［M］．北京：高等教育出版社，2005：69．

[8] MARION J B. Classical Dynamics［M］. New York：Academic Press，1965：181－182．

[9] 于风军，景义林．一个单摆周期近似公式［J］．大学物理，2007，26(5)：18－19．

[10] 袁庆新，曾凡光．对《一个单摆周期近似公式》一文的讨论［J］．大学物理，2008，27(9)：16－18．

On Precise Measurement of Acceleration of Gravity on the Basis of Second Order Approximation

CHEN Ze[1,2]， ZHI Qi-jun[1]

1. School of Physics and Electronic Sciences，Guizhou Normal University，Guiyang 550001，China；

2. Jiangsu Yancheng Middle School，Yancheng Jiangsu 224005，China

Abstract：The pendulum measuring acceleration of gravity is very important in general physics experiments，and the angle the amplitude precision measuring acceleration due to gravity have a significant impact. Second order approximation to calculate the acceleration of gravity formula for precision measuring acceleration due to gravity has important significance in especially the angle larger amplitude.

Key words：simple pendulum；gravitational acceleration；angle amplitude

责任编辑 潘春燕