DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.01.001

三维空间中带阻尼项的欧拉方程初边值问题的经典解①

熊显萍， 黄激珊， 王美娜

兴义民族师范学院 数学科学学院，贵州 兴义 562400

摘要： 研究了三维空间中带非线性阻尼项的可压缩等熵欧拉方程 Dirichlet 初边值问题. 利用能量估计的方法，在其初边值问题局部解存在的条件下，得到当初值在平衡解附近小扰动时，其经典解整体存在唯一性的结论.

关 键 词： 非线性阻尼项；等熵欧拉方程组；初边值问题；整体解

中图分类号： O175.24 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2017)01-0001-06

本文研究如下三维空间中带非线性阻尼项的等熵欧拉方程

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\operatorname{div}(\rho u)=0\\ \rho(\partial_t u+u\cdot\nabla u)+\nabla P=-f(\rho,u)\rho u\end{cases}\quad x\in\mathbb{R}^3,\ t>0 \tag{1}$$

初边值问题整体经典解的存在性，其初边值条件为：

$$(\rho,u)(x,0)=(\rho^*+\rho_0,u^*+u_0) \tag{2}$$

其中：$\rho(x,t)$，$u(x,t)=(u^1,u^2,u^3)(x,t)$，$P=P(\rho)(x,t)$ 分别是流体的密度、速度和压强；$f(\rho,u)$ 是非线性阻尼项；(ρ^*,u^*) 是方程组在常状态下的平衡解. 因此 $\rho^*>0$，$u^*=0$. 我们假定气体状态方程 $P(\rho)$ 是 ρ 的光滑函数，且 $c^2=P'(\rho^*)>0$. 非线性阻尼项 $f(\rho,u)$ 为光滑函数且满足条件 $0<\beta<f(\rho,u)\leqslant\beta_1$，$|\nabla^i f(\rho,u)|\leqslant M$，$1\leqslant i\leqslant 3$.

对带阻尼项的等熵欧拉方程的研究结果已经有很多：文献[1]研究了带阻尼项的 p-系统的初边值问题；文献[2]研究了带阻尼项的三维欧拉方程组初值问题的整体解；文献[3]得到了初始数据是常状态附近的小扰动时三维空间带阻尼项的欧拉方程组初值问题经典解整体存在性结论，并证明了在满足一定条件下其经典解爆破的结论；文献[4]研究了带阻尼项的二维空间的欧拉方程组初边值问题经典解整体存在性结论；文献[5]研究一维空间中带线性阻尼项的等熵欧拉方程组的初边值问题的整体解；文献[6]用能量估计的方法得到了一维空间中带非线性阻尼项的等熵欧拉方程的整体解存在性结论；文献[7-8]分别用能量估计的方法得到了一维空间中带非线性阻尼项的等熵欧拉方程初边值问题整体经典解的存在性并用特征线法得到了带非线性阻尼的等熵欧拉方程正规解在有限时间内必定爆破的结论. 本文将在文献[7]的研究基础上，研究三维空间中非线性阻尼项的等熵欧拉方程的整体经典解，和文献[7]比较，提高了空间维数并将阻尼项由原来的 $f(u)$ 变为 $f(\rho,u)$，提高了研究难度. 我们仍采用能量估计的方法对初边值问题经典解的存在性进行证明.

由于满足边界条件 $u(0,t)=0$ 的光滑解同时有 $\partial_x\rho(0,t)=0$，将方程组(1)的第一个方程对 x 求导，当 $\rho\neq0$ 时可推出 $\partial_x^2u(0,t)=0$，通过归纳假设我们可以得到高阶导数满足如下边界条件：

---

① 收稿日期：2015-07-28

基金项目：贵州省教育厅 2014 自然科学基金项目(黔教科研发[2014]279 号，黔教合 KY[2014]291 号).

作者简介：熊显萍(1978-)，女，贵州修文人，副教授，主要从事偏微分方程的研究.

$$u(0,t)=\partial_x\rho(0,t)=\partial_x^{(2k)}u(0,t)=\partial_x^{(2k+1)}\rho(0,t)=0 \tag{3}$$

因此初始数据的匹配条件为:

$$u_0(0)=\partial_x^2 u_0(0)=\partial_x^4 u_0=\cdots=0,\ \partial_x\rho(0)=\partial_x^3\rho_0=\cdots=0 \tag{4}$$

我们有本文的主要结论:

定理 1 设整数 $m\geqslant 2$. 假设 $\rho_0, u_0\in H^m(\mathbb{R}^3)$ 且 $\|\rho_0\|_m+\|u_0\|_m$ 充分小, ρ_0, u_0 满足条件(4), 那么(1),(2) 式的初边值问题的经典解(ρ,u) 存在唯一, 并且满足:

$$\|\rho_t\|_{m-1}^2+\|\rho(t)-\rho^*\|_m^2+\|u(t)\|_m^2+\int_0^t(\|\rho_t(s)\|_{m-1}^2+\|\nabla\rho(s)\|_{m-1}^2+\|u(s)\|_m^2)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$C(\|\rho_t\|^2+\|\rho(0)\|_m^2+\|u(0)\|_m^2)$$

由于这是个合格边界条件的初边值问题, 因此问题(1),(2) 存在局部解[11]. 我们先对方程组(1),(2) 进行变形.

同文献[2] 一样, 我们取$(\rho^*, u^*)'=(1,0)'$, 记$(V,U)=(\rho-1,u)$, $(V_0,U_0)=(\rho_0,u_0)$, 方程组(1),(2) 变形为

$$V_t+\mathrm{div}U=-\mathrm{div}(VU) \tag{5}$$

$$U_t^i+c^2V_{x_i}+f(V,U)U^i=Q^i(V,U),\ i=1,2,3 \tag{6}$$

其中 $Q^j(V,U)=\left(c^2-\dfrac{1}{1+V}P'(1+V)\right)V_{x_j}-U\cdot\nabla U^j$, $c^2=P'(\rho^*)>0$.

由(5),(6) 式得

$$V_{tt}-c^2\Delta V+f(V,U)V_t=\mathbb{R}(V,U)+U\cdot\nabla f(V,U)-f(V,U)\mathrm{div}(VU) \tag{7}$$

其中 $\mathbb{R}(V,U)=\mathrm{div}\left[\left(\dfrac{1}{1+V}\nabla P(1+V)-c^2\right)\nabla V\right]+\mathrm{div}(U\cdot\nabla U^j)-\mathrm{div}((VU)_t)$.

作先验假设

$$N(T)=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{(\|V(\cdot,t)\|_m^2+\|U(\cdot,t)\|_m^2)+\|V_t(\cdot,t)\|_{m-1}^2\}\leqslant\delta,\ (m\geqslant 2) \tag{8}$$

由文献[7] 我们可以得到当 $\alpha\leqslant m-1$, $0<\delta\ll 1$ 时有

$$\sup_{|\alpha|\leqslant 1}(|\partial_x^\alpha U|+|\partial_x^\alpha V|+|V_t|)\leqslant C(\|U(\cdot,t)\|_{H^3}+\|V(\cdot,t)\|_{H^3}+\|V_t(\cdot,t)\|_{H^2})\leqslant C\delta \tag{9}$$

如果 δ 充分小, 由(5) 式可以得到

$$\|V_t(s)\|_{m-1}\leqslant C(\|\nabla V(s)\|_{m-1}+\|\nabla U(s)\|_{m-1}) \tag{10}$$

由(6) 式可以推出

$$\|U_t(s)\|_{m-1}\leqslant C(\|U(s)\|_m+\|\nabla V(s)\|_{m-1})$$

因此, 当 $\alpha\leqslant m-1$, $\beta\leqslant m-1$ 时, 有

$$\sup_{|\alpha|\leqslant 1}(|\partial_x^\alpha U|+|\partial_x^\alpha V|+|U_t|+|V_t|)\leqslant C\delta \tag{11}$$

注意到 $c^2=P'(1)$, 得到如下估计式

$$\left|\frac{1}{1+V}P'(1+V)-c^2\right|\leqslant C\delta \tag{12}$$

为得到初边值问题的经典解, 我们将进行能量估计.

1) 能量估计 1

和文献[2] 的方法一样, 我们用 $V_t+\lambda V$ 乘(7) 式的左右两端$(0<\lambda\ll 1)$, 并在 $\mathbb{R}^3\times[0,t]$ 上积分, 利用边界条件 $U|_{x=0}=U_t|_{x=0}=\nabla V|_{x=0}=0$ 得

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{V_t^2}{2}+\frac{\lambda f(V,U)V^2}{2}+\lambda VV_t+\frac{c^2}{2}(\nabla V)^2\right)\Big|_0^t\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(f(V,U)-\lambda)V_t^2+\lambda c^2(\nabla V)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s=$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t(\mathbb{R}(V,U)+\nabla f(V,U)\cdot U-f(V,U)\mathrm{div}(VU))(V_t+\lambda V)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{13}$$

由于 $\beta<f(V,U)<\beta_1$, 所以

$$\beta\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t V_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s<\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t f(V,U)V_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s<\beta_1\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t V_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

当 λ 充分小时，有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}(V_t^2+|\nabla V|^2+V^2)|_0^t\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t(|\nabla V|^2+V_t^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant\\&C(\|V_t(\cdot,0)\|^2+\|V(\cdot,0)\|_1^2+|I|)\end{aligned}\tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}|I|=&\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t\Big[\mathrm{div}\Big(\Big(\frac{1}{1+V}\nabla P(1+V)-c^2\Big)\nabla V\Big)+\mathrm{div}(U\cdot\nabla U)-\mathrm{div}(VU)_t\Big](V_t+\lambda V)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\\&\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t(U\cdot\nabla f(V,U)-f(V,U)\mathrm{div}(VU))(V_t+\lambda V)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$

由文献[2]我们可以得到

$$|I_1|\leqslant C\delta(\|\nabla V(t)\|^2+\|V(0)\|_1^2+\int_0^t\|\nabla V(s)\|^2+\|V_t(s)\|^2+\|U(s)\|_1^2\mathrm{d}s)\tag{15}$$

下面对 I_2 进行估计，其中

$$\begin{aligned}I_2=&\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t U\cdot\nabla f(V,U)(V_t+\lambda V)(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\\&\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t\Big[\sum_{j=1}^3u^j\Big(\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^3\frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\Big)\Big](V_t+\lambda V)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant\\&M\delta\int_0^t(\|\nabla V\|^2+\|V_s\|^2)\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{16}$$

又

$$\begin{aligned}I_3=&-\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t f(V,u)\mathrm{div}(Vu)(V_t+\lambda V)(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\\&-\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t f(V,U)\mathrm{div}(VU)V_t+\lambda f(V,U)\mathrm{div}(VU)V\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant\\&-\beta_1\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^tV_s\Big[\sum_{i=1}^3\Big(\frac{\partial V}{\partial x_i}u^i+V\sum_{j=1}^3\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\Big)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\beta_1\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^tVU\cdot\nabla V\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant\\&-\beta_1\delta(\|V(t)\|^2-\|V(0)\|^2+\int_0^t\|V_s\|^2+\|\nabla V\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s)\end{aligned}\tag{17}$$

结合(14)—(17)式可得

$$\begin{aligned}&(\|V_t(t)\|^2+\|V(t)\|_1^2+\int_0^t\|V_s\|^2+\|\nabla V\|^2\mathrm{d}s)+\beta_1\delta(\|V(t)\|^2+\int_0^t\|V_s\|^2+\|\nabla V\|^2\mathrm{d}s)\leqslant\\&C\delta(\|V_t(0)\|^2+\|V(0)\|_1^2)+C\delta\int_0^t\|U(s)\|_1^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

由于 δ 充分小，因此

$$\begin{aligned}&(\|V_t(t)\|^2+\|V(t)\|_1^2+\int_0^t\|V_s\|^2+\|\nabla V\|^2\mathrm{d}s)\leqslant\\&C\delta(\|V_t(0)\|^2+\|V(0)\|_1^2)+C\delta\int_0^t\|U(s)\|_1^2\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{18}$$

2）能量估计 2

用 U 与 $U_t+c^2\nabla V+f(V,U)U=Q(V,U)$ 两端作内积，并在 $\mathbb{R}^3\times[0,t]$ 上积分，有

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t\sum_{j=1}^3u_t^ju^j+f(V,u)(u^j)^2-c^2Vu_{x_j}^j\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^tQ^j(V,u)u^j\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

即

$$\frac{1}{2}\int_0^t\partial_s\int_{\mathbb{R}^3}|U|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s-c^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}V\mathrm{div}U\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}f(V,U)|U|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}U\cdot Q(V,U)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

又

$$\mathrm{div}VU=-V_t-\mathrm{div}(VU)\qquad \beta<f(V,U)<\beta_1$$

$$\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|U|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s<\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}f(V,U)|U|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s-$$

$$c^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} V\mathrm{div}U\mathrm{d}x\mathrm{d}s = -c^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} V(-V_t - \mathrm{div}(VU))\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

所以有

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(|U|^2+|V|^2)\mathrm{d}x+\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|U|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\Big)\leqslant$$

$$C\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|U(0)|^2+|V(0)|^2\mathrm{d}x\Big)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}U\cdot Q(V,U)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+c^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}V\mathrm{div}(VU)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{19}$$

同样记 $I=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}U\cdot Q(V,U)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}V\mathrm{div}(VU)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$，由文献[2] 可得

$$|I|\leqslant C\delta\int_0^t(\|\nabla V\|^2+\|U\|^2)\mathrm{d}s \tag{20}$$

结合(19),(20) 式可得

$$\|U(t)\|^2+\|V(t)\|^2+\int_0^t\|U(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant C(\|U(0)\|^2+\|V(0)\|^2)+C\delta\int_0^t\|\nabla V(s)\|^2\mathrm{d}s \tag{21}$$

3) 能量估计 3

将 $U_t^i+f(V,U)U^i+cV_{x_i}=Q^i(V,U)$ 两端对 x_k 求导，并与 U_{x_k} 作内积后在 $\mathbb{R}^3\times[0,t]$ 积分，得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}u_{tx_k}^iu_{x_k}^i\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_{x_k}f(V,U)u^i)\cdot u_{x_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\\&\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t\partial_{x_k}Q^i(V,u)u_{x_k}^i\mathrm{d}x\mathrm{d}s-c^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}V_{x_i}\mathrm{div}u_{x_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\partial_{x_k}(f(V,U)u^i)\cdot u_{x_k}^i\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_{x_k}f(V,U)u^i+f(V,U)u_{x_k}^i)u_{x_k}^i\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\\&\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^3\frac{\partial f}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial x_k})u^iu_{x_k}^i\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}f(V,U)(u_{x_k}^i)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned}$$

记 $J=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\partial_{x_k}Q^i(V,U)u_{x_k}^i-c^2V_{x_i}\mathrm{div}u_{x_k}^i\mathrm{d}x\mathrm{d}s$，又 $\beta<f(V,U)<\beta_1$，则(22) 式变为

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}u_{tx_k}^iu_{x_k}^i\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(u_{x_k}^i)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant\\&J-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^3\frac{\partial f}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial x_k}\Big)u^iu_{x_k}^i\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{23}$$

由文献[2] 有

$$|J|\leqslant C\delta(\|V_{x_k}(t)\|^2-\|V_{x_k}(0)\|^2)+\int_0^t\|V_{x_k}(t)\|^2+\|V_s\|^2+\|u_{x_k}{}^i\|^2\mathrm{d}s \tag{24}$$

$$\Big|-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^3\frac{\partial f}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial x_k}\Big)u^iu_{x_k}^i\mathrm{d}x\mathrm{d}s\Big|\leqslant M\delta\Big(\int_0^t\|V_{x_k}\|^2+\|u_{x_k}^i\|^2\mathrm{d}s\Big) \tag{25}$$

结合(22)—(25) 式有

$$\frac{1}{2}\int_0^t\partial_s\int_{\mathbb{R}^3}|U_{x_k}|^2+|V_{x_k}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|U_{x_k}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant|J|+M\delta\int_0^t\|V_{x_k}\|^2+\|U_{x_k}\|^2\mathrm{d}s$$

所以有

$$\begin{aligned}&\|\nabla U(t)\|^2+\|\nabla V(t)\|^2+\int_0^t\|\nabla U(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\\&C(\|\nabla U(0)\|^2+\|\nabla V(0)\|^2)+C\delta\int_0^t\|\nabla V\|^2+\|V_s\|^2\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{26}$$

结合(18),(21) 和(26) 式且由(10) 式我们得到一阶估计如下：当 δ 充分小时

$$\begin{aligned}&\|V_t(t)\|^2+\|V(t)\|_1^2+\|U(t)\|_1^2+\int_0^t\|V_t(s)\|^2+\|V(\cdot,s)\|_1^2+\|U(\cdot,s)\|_1^2\mathrm{d}s\leqslant\\&C(\|V_t(0)\|^2+\|V(0)\|_1^2+\|U\|_1^2)\end{aligned} \tag{27}$$

4) 能量估计 4

以下还需作高阶估计．估计方法如同估计 1 和估计 3．

实际上，我们将(7) 式乘以 $-(V_t+\lambda V)_{x_kx_k}(0<\lambda\ll 1)$，然后在 $\mathbb{R}^3\times[0,t]$ 上积分．注意 $\beta<f(V,U)<\beta_1$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^3}(V_{tx_k}^2+|\nabla V_{x_k}|^2+V_{x_k}^2)\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(V_{tx_k}^2+|\nabla V_{x_k}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant C(\|V_t(\cdot,0)\|_1^2+\|V(\cdot,0)\|_2^2)+$$
$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}-(\mathbb{R}(V,U)+U\cdot\nabla f(V,U)-f(V,U)\mathrm{div}(VU))(V_{t_k}+\lambda V)_{x_kx_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{28}$$

记

$$I=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}-(\mathbb{R}(V,U)+U\cdot\nabla f(V,U)-f(V,U)\mathrm{div}(VU))(V_t+\lambda V)_{x_kx_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}s=$$
$$I_1+I_2+I_3$$

由于 $U_x=-\dfrac{1}{1+V}(V_t+UV_x)$ 我们得到

$$|I_1|\leqslant C\delta\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla V_{x_k}|^2+V_{tx_k}^2+U_{x_k}^2)|_0^t\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}V_{tx_k}^2+|\nabla U_{x_k}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)$$

$$|I_2|=\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}U\cdot\nabla f(V,U)(V_t+\lambda V)_{x_kx_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|=$$
$$\left|-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\partial_{x_k}(U\cdot\nabla f(V,U))(V_t+\lambda V)_{x_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\left|-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\partial_{x_k}\left[\sum_{i=1}^3u^i\left(\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^3\frac{\partial f}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial x_i}\right)\right](V_t+\lambda V)_{x_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$C\delta\int_0^t(\|V_{x_k}\|^2+\|V_t\|^2+\|U_{x_k}\|^2+\|V_{tx_k}\|^2)\mathrm{d}s$$

$$|I_3|=\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}f(V,U)\mathrm{div}(VU)(V_t+\lambda V)_{x_kx_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|=$$
$$\left|-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\partial_{x_k}[f(V,U)\mathrm{div}(VU)](V_t+\lambda V)_{x_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$C\delta\left[(\|V_{x_k}\|^2+\|\nabla V_{x_k}\|^2)|_0^t+\int_0^t\|V_{x_k}\|^2+\|V_{tx_k}\|^2+\|U_{x_k}\|^2\mathrm{d}s\right]$$

将上述估计代入(28) 式，由 $0<\lambda\ll 1$ 得到如下估计：

$$\|\nabla V_t(t)\|^2+\|\nabla V(t)\|_1^2+\int_0^t(\|\nabla V_t\|^2+\|\Delta V\|_1^2)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C(\|\nabla V_t(0)\|^2+\|V(0)\|_2^2)+C\delta\int_0^t\|U(s)\|_2^2\mathrm{d}s \tag{29}$$

将(6) 式关于 x_k 两次求导后与 $U_{x_kx_k}$ 相乘，然后再在 $\mathbb{R}^3\times[0,t]$ 上积分，利用(3) 和(27) 式得到：

$$\int_{\mathbb{R}^3}(|U_{x_kx_k}(t)|^2+|V_{x_kx_k}(t)|^2)\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(|U_{x_k}|^2+|U_{x_kx_k}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}V_{x_kx_k}\left[\frac{1}{1+V}V_{x_kx_kt}-\left(\frac{1}{1+V}(V_t+(U\cdot\nabla V))_{x_kx_k}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|+C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}U_{x_kx_k}\cdot Q_{x_kx_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}(|\Delta U(t)|^2+|\Delta V(t)|^2)\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(|\Delta U|^2+|\nabla U|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C(\|\Delta U(0)\|^2+\|\Delta V(0)\|^2)+C\delta\int_0^t(\|\nabla V_s(s)\|^2+\|\Delta V(s)\|^2)\mathrm{d}s \tag{30}$$

结合(29)，(30) 式再利用(27) 式我们得到二阶估计如下：如果 δ 充分小

$$\begin{aligned}&\|V(t)\|_2^2+\|V_t(t)\|_1^2+\|U(t)\|_2^2+\int_0^t\|V_t(s)\|_1^2+\|\nabla V(s)\|_1^2+\|U(s)\|_2^2\mathrm{d}s\leqslant\\&C(\|V(0)\|_2^2+\|V_t(0)\|_2^2+\|U(0)\|_2^2)\end{aligned} \tag{31}$$

5）能量估计 5

同能量估计 4 的做法一样，将(7) 式对 x_k 求导后与 $-(V_t+\lambda V)_{x_kx_k}(0<\lambda\ll 1)$ 相乘后在 $\mathbb{R}^3\times[0,t]$

上积分，同时将(6)式关于 x_k 求三阶导后与 $U_{x_k x_k x_k}$ 相乘，然后再在 $\mathbb{R}^3\times[0, t]$ 上积分，利用(3)式，可以得到三阶估计. 更一般地，对任一整数 k，我们都能证明：整数 $m\geqslant 2$.

如果 δ 充分小，那么对任一 k，$1\leqslant k\leqslant m$，我们有估计

$$\| V(t)\|_m^2+\| V_t(t)\|_{m-1}^2+\| U(t)\|_m^2+\int_0^t \| V_t(s)\|_{m-1}^2+\| V(s)\|_{m-1}^2+\| U(s)\|_m^2 \mathrm{d}s\leqslant$$

$$C(\| V(0)\|_m^2+\| V_t(0)\|_m^2+\| U(0)\|_m^2)$$

利用以上估计 1－5，我们就证明了定理 1.

参考文献:

[1] NISHIHARA K, YANG T. Boundary Effect on Asymptotic Behaviour of Solutions to the p-system with Linear Damping [J]. J Differential Equations, 1999, 156(2): 439－458.

[2] WANG W, YANG T. The Pointwise Estimates of Solutions for Euler Equations with Damping in Multi-Dimensions [J]. J Differential Equations, 2001, 173(2): 410－450.

[3] SIDERIS C, THOMASES B, WANG D. Long Time Behacior of Sulutions to the 3D Compressible Euler Equations with Damping [J]. Communications in Pattial Differential Equations, 2003, 28(3): 795－816.

[4] LIU Y Q, WANG W. Well-Posedness of the IBVP for 2-D Euler Equations with Damping [J]. Differential Equations, 2008, 245(9): 2477－2503.

[5] ZHU X S. The Global Solution of Initial-Boundary Value Problem for Euler Equations with Damping [J]. J of Math, 2004, 24(4): 370－374.

[6] 朱旭生，熊显萍. 带非线性阻尼项的等熵欧拉方程组的整体解 [J]. 武汉大学学报(理学版)，2011，57(4)：93－99.

[7] 熊显萍，朱旭生. 带阻尼项的欧拉方程初边值问题的经典解 [J]. 天津师范大学学报(自然科学版)，2014，34(1)：16－19.

[8] 熊显萍，朱旭生. 带非线性阻尼的等熵欧拉方程组正规解的爆破 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(3)：71－76.

[9] ZHONG T, WANG Y. Global Solution and Large-Time Behavior of the 3D Compressible Euler Equations with Damping [J]. J Differertial Equations, 2013, 254: 1686－1704.

[10] PAN ZHAO K. 3D Compressible Euler Equation with Damping in Bounded Domains [J]. J Differential Equations, 2009, 246(2): 581－596.

[11] KATO T. The Cauchy Problem for Quasi-Linear Symmetric Hyperbolic Systems [J]. Arch Rational Mech Anal , 1975, 58(3): 181－205.

On Solution of Initial-Boundary Value Problem for 3-Dimensional Euler Equations with Nonlinear Damping

XIONG Xian-ping, HUANG Ji-shan, WANG Mei-na

Xingyi Normal University Nationalities, School of Mathematical Sciences, Xingyi Guizhou 562400, China

Abstract: The classical solution for the initial-boundary value problem of the compressible isentropic Euler equations with nonlinear damping in R^3 has been investigated in this paper. On condition that the local solution for initial-boundary value problem is existed, and it is obtained that the nonlinear damping does not influence the existence of the solution with perturbation of initial value, and that the classical solution is existed and unique by utilizing energy estimates.

Key words: nonlinear damping; isentropic Euler equations; initial-boundary value problem; global solution

责任编辑 张 构