第 42 卷 第 1 期　　西 南 师 范 大 学 学 报（自然科学版）　　2017 年 1 月
Vol. 42 No. 1　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jan. 2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.01.002

电报方程的一个最低阶新混合元高精度分析①

李永献[1]，　刁　群[2]

1. 河南城建学院 数理学院，河南 平顶山 467036；2. 平顶山学院 数学与信息科学学院，河南 平顶山 467000

摘要：针对电报方程利用双线性元及其梯度空间建立了一个自然满足 LBB 条件的最低阶新混合元格式. 基于平均值和对时间 t 的导数转移技巧以及高精度分析与插值后处理技术，在半离散和全离散情形下分别导出了原始变量在 H^1 模、流量在 L^2 模意义下比传统误差估计高一阶的超逼近性质及超收敛结果.

关　键　词：电报方程；混合元新格式；半离散和全离散；超逼近；超收敛

中图分类号：O242.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2017)01-0007-06

考虑如下电报方程：

$$\begin{cases} u_{tt}+2a(\boldsymbol{X})u_t-\nabla\cdot(A(\boldsymbol{X})\nabla u)=f(\boldsymbol{X},t) & \boldsymbol{X}\in\Omega,\ t\in(0,T] \\ u(\boldsymbol{X},t)=0 & \boldsymbol{X}\in\partial\Omega,\ t\in(0,T] \\ u(\boldsymbol{X},0)=u_0(\boldsymbol{X}),\ u_t(\boldsymbol{X},0)=u_1(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X}\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{X}=(x,y)$，$\Omega\in\mathbb{R}^2$ 为边分别平行于 x 轴和 y 轴的矩形有界区域；$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界；$u_0(\boldsymbol{X})$，$u_1(\boldsymbol{X})$ 是已知光滑函数；$2a(\boldsymbol{X})$ 为电报传播的物理阻尼；$a(\boldsymbol{X})$，$A(\boldsymbol{X})$ 具有有界的一阶导数，且满足 $a_0\leqslant a(\boldsymbol{X})\leqslant a_1$，$A_1\leqslant A(\boldsymbol{X})\leqslant A_2$（$a_0$，$a_1$，$A_1$ 及 A_2 为正常数）.

电报方程是一类在通讯工程中具有重要理论意义和广泛研究价值的数学物理方程，文献[1]和[2]分别研究了半线性和非线性摄动电报方程的渐近展开理论及其应用；文献[3]对一类电报方程的初边值问题建立一种时间间断时空有限元格式，得到了速度和位移的最优误差估计，并给出了数值算例；文献[4]利用 Galerkin 方法研究一类具有非局部边界的非线性电报方程，得出了弱解的存在唯一性及对初值的连续依赖性；文献[5-6]将 H^1-Galerkin 混合有限元方法应用于该方程，分别进行了半离散情形下的收敛性和超收敛分析，后者还进一步研究了全离散情形下的超收敛结果；文献[7]研究了该方程在矩形网格上半离散和全离散格式下的类 Wilson 元 Galerkin 逼近，导出了半离散情形下的超逼近、超收敛和外推结果以及全离散情形下的最优误差估计. 但有关电报方程混合有限元全离散逼近还少见研究报道.

另一方面，与传统有限元方法相比，混合有限元方法因具有对空间光滑度要求低，能够同时得到原始变量和中间变量的误差估计等优势而备受青睐，但由于所涉及的有限元逼近空间通常要求验证 LBB 相容条件，这在一定程度上限制了空间的选取. 最近，文献[8-9]利用 Green 公式将二阶椭圆问题的传统混合变分形式转化成一个与其等价的新的变分形式，研究了一种自由度少且 LBB 条件自然满足的混合元新格式，并分别得到了最优误差估计及超收敛结果. 该混合元新格式还被广泛用于抛物方程[10-11]、热传导方程[12]、Sobolev 方程[13-14]、sine-Gordon 方程[15]和强阻尼波动方程[16]等. 本文的目的是将单元对 $Q_{11}+Q_{10}\times Q_{01}$ 应用于电报方程构造一个新的最低阶混合逼近格式，即用双线性元及其梯度空间分别逼近精确解 u 和流量

① 收稿日期：2015-06-29
基金项目：国家自然科学基金项目(11271340)；河南省科技攻关项目(162300410082)；河南省高等学校重点科研项目(16B110002)；河南城建学院科研基金项目(2015JZD007，2016QY018).
作者简介：李永献(1979-)，男，河南鲁山人，讲师，硕士，主要从事有限元方法及其应用研究.

$\boldsymbol{q}$，证明了该混合元新格式解的存在唯一性. 同时，在摒弃以往研究 Ritz 投影的前提下，利用高精度分析与插值后处理技术，结合平均值和导数转移技巧，在半离散和全离散两种情形下分别导出了原始变量 u 在 H^1 模及流量 $\boldsymbol{q}$ 在 L^2 模意义下关于剖分参数 h 的二阶超逼近性质和超收敛结果.

1 新混合元的构造与问题的逼近

为对电报方程混合有限元方法的逼近误差进行估计，以下将按文献[8-9]提出的混合元新格式构造匹配的混合元空间对. 设 $\{J_h\}$ 是 Ω 的一个正则矩形剖分簇，对给定的 $K \in \{J_h\}$，$a_i(x_i,\ y_i)(i=1,2,3,4)$ 为 K 的 4 个顶点，记 τ 是对应边 ∂K 的单位切向量，h_K 是 K 的外接圆直径，$h = \max\limits_{K\in J_h} h_K$，$Q_{ij}(K) = span\{x^r y^s,\ 0 \leqslant r \leqslant i,\ 0 \leqslant s \leqslant j\}$. 定义有限元空间 V_h 和 M_h 分别为:

$$V_h = \{v_h: v_h|_K \in Q_{11}(K),\ \forall K \in J_h,\ v_h|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$M_h = \{\boldsymbol{q}_h = (q_{h1},\ q_{h2}): \boldsymbol{q}_h|_K \in Q_{01}(K) \times Q_{10}(K),\ \forall K \in J_h\}$$

显然 $V_h \subset C^0(\Omega)$，且为协调元空间. 设 I_h^1 和 I_h^2 分别是 V_h 和 M_h 上诱导的插值算子，且满足:

$$I_h^1: u \in H^2(\Omega) \rightarrow I_h^1 u \in V_h,\ I_h^1|_K = I_K^1,\ (u - I_K^1 u)(a_i) = 0 \qquad i = 1,2,3,4$$

$$I_h^2: \boldsymbol{q} = (q_1,\ q_2) \in (L^2(\Omega))^2 \rightarrow I_h^2\boldsymbol{q} \in M_h,\ I_h^2|_K = I_K^2,\ \int_{\partial K} (\boldsymbol{q} - I_K^2\boldsymbol{q}) \cdot \tau \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

根据文献[17]知下面引理成立.

引理 1 对 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)$，$\boldsymbol{q} \in (H^2(\Omega))^2$ 有

$$(\nabla(u - I_h^1 u),\ \nabla v_h) \leqslant Ch^2 |u|_3 \|v_h\|_1,\ \forall v_h \in V_h \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{q} - I_h^2\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{w}_h) \leqslant Ch^2 \|\boldsymbol{q}\|_2 \|\boldsymbol{w}_h\|_0,\ \forall \boldsymbol{w}_h \in M_h \tag{3}$$

进一步地，若 $u \in H^4(\Omega)$，则

$$(\nabla(u - I_h^1 u),\ \nabla v_h) \leqslant Ch^2 |u|_4 \|v_h\|_0,\ \forall v_h \in V_h \tag{4}$$

这里以及后面出现的 C 均表示与 h 无关的正常数，在不同的地方其值可以不同.

利用文献[17]中的思想，可以验证下面估计式成立.

$$(\nabla(u - I_h^1 u),\ \boldsymbol{w}_h) \leqslant Ch^2 |u|_3 \|\boldsymbol{w}_h\|_0,\ \forall \boldsymbol{w}_h \in M_h \tag{5}$$

为逼近问题(1)，引入中间变量函数 $\boldsymbol{q} = A(\boldsymbol{X})\nabla u$，则(1)式可写成如下一阶混合系统

$$\begin{cases} \beta\nabla u = \boldsymbol{q} & \boldsymbol{X} \in \Omega,\ t \in (0,\ T] \\ u_{tt} + 2\alpha u_t - \nabla \cdot \boldsymbol{q} = f & \boldsymbol{X} \in \Omega,\ t \in (0,\ T] \\ u(\boldsymbol{X},\ t) = 0 & \boldsymbol{X} \in \partial\Omega,\ t \in (0,\ T] \\ u(\boldsymbol{X},\ 0) = u_0(\boldsymbol{X}),\ u_t(\boldsymbol{X},\ 0) = u_1(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \in \Omega \end{cases} \tag{6}$$

其中: $\alpha = a(\boldsymbol{X})$，$\beta = A(\boldsymbol{X})$，$f = f(\boldsymbol{X},\ t)$.

令 $V = H_0^1(\Omega)$，$M = (L^2(\Omega))^2$，则(6)式的变分问题为: 求 $\{u,\ \boldsymbol{q}\}: [0,\ T] \longrightarrow V \times M$，使

$$\begin{cases} (\beta\nabla u,\ \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{w}) & \forall \boldsymbol{w} \in M \\ (u_{tt},\ v) + (2\alpha u_t,\ v) + (\boldsymbol{q},\ \nabla v) = (f,\ v) & \forall v \in V \\ u(\boldsymbol{X},\ 0) = u_0(\boldsymbol{X}),\ u_t(\boldsymbol{X},\ 0) = u_1(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \in \Omega \end{cases} \tag{7}$$

变分问题(7)的半离散逼近格式为: 求 $\{u_h,\ \boldsymbol{q}_h\}: [0,\ T] \longrightarrow V_h \times M_h$ 使

$$\begin{cases} (\beta\nabla u_h,\ \boldsymbol{w}_h) = (\boldsymbol{q}_h,\ \boldsymbol{w}_h) & \forall \boldsymbol{w}_h \in M_h \\ (u_{htt},\ v_h) + (2\alpha u_{ht},\ v_h) + (\boldsymbol{q}_h,\ \nabla v_h) = (f,\ v_h) & \forall v_h \in V_h \\ u_h(0) = I_h^1 u_0(\boldsymbol{X}),\ u_{ht}(0) = I_h^1 u_1(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \in \Omega \end{cases} \tag{8}$$

定理 1 问题(8)存在唯一解.

证 设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\boldsymbol{\psi}_j\}_{j=1}^k$ 分别是有限元空间 V_h 和 M_h 的基，令 $u_h = \sum\limits_{i=1}^n h_i(t)\varphi_i$，$\boldsymbol{q}_h = \sum\limits_{i=1}^k g_i(t)\boldsymbol{\psi}_i$，则问题(8)可写成

$$\begin{cases} \boldsymbol{AH}(t) = \boldsymbol{BG}(t) \\ \boldsymbol{LH}''(t) + \boldsymbol{DH}'(t) + \boldsymbol{EG}(t) = \boldsymbol{F} \end{cases} \tag{9}$$

其中：$\boldsymbol{H}(t)=(h_1(t),h_2(t),\cdots,h_n(t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{G}(t)=(g_1(t),g_2(t),\cdots,g_k(t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=((\boldsymbol{\psi}_i,\beta\nabla\varphi_j))_{k\times n}$，$\boldsymbol{B}=((\boldsymbol{\psi}_i,\boldsymbol{\psi}_j))_{k\times k}$，$\boldsymbol{L}=((\varphi_i,\varphi_j))_{n\times n}$，$\boldsymbol{D}=((2\alpha\varphi_i,\varphi_j))_{n\times n}$，$\boldsymbol{E}=((\nabla\varphi_i,\boldsymbol{\psi}_j))_{n\times k}$，$\boldsymbol{F}=((f,\varphi_j))_{n\times 1}$.

利用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的正定性，由(9)式得

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{H}''(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{H}'(t)+(\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{F} \tag{10}$$

又由于 $\boldsymbol{L}$ 是正定矩阵；$\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}$ 满足 Lipschitz 连续，且初值 $\boldsymbol{H}(0),\boldsymbol{H}_t(0)$ 由 $u_h(0),u_{ht}(0)$ 确定，根据常微分方程理论[18] 知(10)式存在唯一解，故(9)式有唯一解，即得问题(8)存在唯一解. 定理证毕.

2　半离散格式下的超逼近与超收敛

基于上面引理，我们首先给出下面的超逼近结果：

定理 2　设 $\{u,\boldsymbol{q}\}$，$\{u_h,\boldsymbol{q}_h\}$ 分别是问题(7)，(8)的解，若 $u,u_t\in H^3(\Omega)$，$u_{tt}\in H^2(\Omega)$，$\boldsymbol{q}\in(H^2(\Omega))^2$，则有超逼近估计：

$$\|I_h^1u-u_h\|_1+\|I_h^2\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h\|_0\leqslant Ch^2[R^{\frac{1}{2}}+(\|\boldsymbol{q}\|_2^2+R)^{\frac{1}{2}}] \tag{11}$$

其中：$R=\|u\|_3^2+\int_0^t(\|u_t\|_3^2+|u_{tt}|_2^2)\mathrm{d}s$.

证　记 $u-u_h=(u-I_h^1u)+(I_h^1u-u_h)\triangleq\eta+\xi$，$\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h=(\boldsymbol{q}-I_h^2\boldsymbol{q})+(I_h^2\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h)\triangleq\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\theta}$，则可得误差方程

$$\begin{cases}((\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{w}_h)=(\beta\nabla\eta,\boldsymbol{w}_h)+(\beta\nabla\xi,\boldsymbol{w}_h) & \forall\,\boldsymbol{w}_h\in M_h \quad (12\mathrm{a})\\ (\xi_{tt},v_h)+(2\alpha\xi_t,v_h)+(\boldsymbol{\theta},\nabla v_h)=-(\eta_{tt},v_h)-(2\alpha\eta_t,v_h)-(\boldsymbol{\rho},\nabla v_h) & \forall\,v_h\in V_h \quad (12\mathrm{b})\end{cases}$$

在(12a)，(12b)中分别取 $w_h=\nabla\xi_t$，$v_h=\xi_t$，并结合对时间 t 的导数转移技巧得

$$(\xi_{tt},\xi_t)+(\beta\nabla\xi,\nabla\xi_t)=(\beta\nabla\eta_t,\nabla\xi)-(\eta_{tt},\xi_t)-(2\alpha\xi_t,\xi_t)-(2\alpha\eta_t,\xi_t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta\nabla\eta,\nabla\xi)\triangleq\sum_{i=1}^{5}B_i \tag{13}$$

下面估计(13)式的右端各项.

注意对任意函数 $\gamma(\boldsymbol{X})\in W^{1,\infty}(\Omega)$，定义其在单元 K 上的平均值 $\bar{\gamma}(\boldsymbol{X})|_K=\int_K\gamma(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}$，则 $|\gamma-\bar{\gamma}|_K\leqslant Ch\|\gamma\|_{1,\infty,K}$.

由 Schwarz 和 Young 不等式及插值理论得

$$|B_2+B_3+B_4|\leqslant Ch^2(|u_{tt}|_2+|u_t|_2)\|\xi_t\|_0+C\|\xi_t\|_0^2\leqslant Ch^4(|u_{tt}|_2^2+|u_t|_2^2)+C\|\xi_t\|_0^2 \tag{14}$$

利用(2)式有

$$\begin{aligned}|B_1|&=\left|\sum_{K\in J_h}((\beta-\bar{\beta})\nabla\eta_t,\nabla\xi)_K+\sum_{K\in J_h}(\bar{\beta}\nabla\eta_t,\nabla\xi)_K\right|\leqslant Ch\|\nabla\eta_t\|_0\|\nabla\xi\|_0+Ch^2|u_t|_3|\xi|_1\leqslant\\&\quad Ch^2(|u_t|_2+|u_t|_3)|\xi|_1\leqslant Ch^4(|u_t|_2^2+|u_t|_3^2)+C|\xi|_1^2\end{aligned} \tag{15}$$

根据(14)，(15)式将(13)式变形为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\xi_t\|_0^2+|\beta^{\frac{1}{2}}\xi|_1^2)\leqslant Ch^4(\|u_t\|_3^2+|u_{tt}|_2^2)+C(\|\xi_t\|_0^2+|\xi|_1^2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta\nabla\eta,\nabla\xi) \tag{16}$$

对(16)式两端从 0 到 t 积分，并注意到 $\xi(\boldsymbol{X},0)=\xi_t(\boldsymbol{X},0)=0$，得

$$\|\xi_t\|_0^2+|\beta^{\frac{1}{2}}\xi|_1^2\leqslant Ch^4\int_0^t(\|u_t\|_3^2+|u_{tt}|_2^2)\mathrm{d}s+C\int_0^t(\|\xi_t\|_0^2+|\xi|_1^2)\mathrm{d}s-(\beta\nabla\eta,\nabla\xi) \tag{17}$$

再次利用估计 B_1 的技巧，并考虑到 $\beta=A(\boldsymbol{X})\geqslant A_1>0$，(17)式可变形为

$$\|\xi_t\|_0^2+|\xi|_1^2\leqslant Ch^4R+C\int_0^t(\|\xi_t\|_0^2+|\xi|_1^2)\mathrm{d}s \tag{18}$$

根据 Gronwall 引理，并注意到 $\xi\in V_h\subset H_0^1(\Omega)$，可导出

$$\|\xi\|_1^2\leqslant Ch^4R \tag{19}$$

另一方面，在(12a)中取 $\boldsymbol{w}_h=\boldsymbol{\theta}$，有

$$\|\boldsymbol{\theta}\|_0^2=(\beta\nabla\eta,\boldsymbol{\theta})+(\beta\nabla\xi,\boldsymbol{\theta})-(\rho,\boldsymbol{\theta}) \tag{20}$$

利用(3),(5) 式和 B_1 的估计技巧，由(20) 式可得

$$\|\boldsymbol{\theta}\|_0^2 \leqslant Ch^4(R + \|\boldsymbol{q}\|_2^2) \tag{21}$$

定理证毕.

为了得到整体超收敛，按照文献[17] 的方法构造插值后处理算子 I_{2h}^1 和 I_{2h}^2，结合定理 2 可得：

定理 3 在定理 2 条件下，有如下整体超收敛结果：

$$\|u - I_{2h}^1 u_h\|_1 + \|\boldsymbol{q} - I_{2h}^2 \boldsymbol{q}_h\|_0 \leqslant Ch^2[R^{\frac{1}{2}} + \|u\|_3 + (R + \|\boldsymbol{q}\|_2^2)^{\frac{1}{2}} + \|\boldsymbol{q}\|_2] \tag{22}$$

3 全离散格式下的超逼近和超收敛

在本节中我们将讨论电报方程的全离散格式下的超逼近性和超收敛结果，设 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$ 是 $[0, T]$ 上步长为 $\tau = \dfrac{T}{N}$ 的剖分，$t_n = n\tau$，$n = 0,1,2,\cdots,N$，U^n 代表 $t = t_n = n\tau$ 时 $u(t_n)$ 在 V_h 中的逼近. 为方便起见，在此引入记号 $u^n = u(t_n)$，$\varphi^{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(\varphi^{n+1} + \varphi^n)$，$\bar{\partial}_t \varphi^{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\tau}(\varphi^{n+1} - \varphi^n)$，$\varphi^{n,\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4}(\varphi^{n+1} + 2\varphi^n + \varphi^{n-1}) = \dfrac{1}{2}(\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}})$，$\bar{\partial}_t \varphi^n = \dfrac{1}{2\tau}(\varphi^{n+1} - \varphi^{n-1}) = \dfrac{1}{\tau}(\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^{n-\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2}(\bar{\partial}_t \varphi^{n+\frac{1}{2}} + \bar{\partial}_t \varphi^{n-\frac{1}{2}})$，$\bar{\partial}_{tt} \varphi^n = \dfrac{1}{\tau^2}(\varphi^{n+1} - 2\varphi^n + \varphi^{n-1}) = \dfrac{1}{\tau}(\bar{\partial}_t \varphi^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_t \varphi^{n-\frac{1}{2}})$.

问题(6) 的变分问题为：求 $\{u^n, \boldsymbol{q}^n\}: [0, T] \longrightarrow V \times M$，使

$$\begin{cases} (\beta \nabla u^n, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{q}^n, \boldsymbol{w}) & \forall\, \boldsymbol{w} \in M \\ (\bar{\partial}_{tt} u^n, v) + (2\alpha \bar{\partial}_t u^n, v) + (\boldsymbol{q}^{n,\frac{1}{4}}, \nabla v) = (f^{n,\frac{1}{4}}, v) + (R_1^n, v) + (2\alpha R_2^n, v) & \forall\, v \in V \\ u(\boldsymbol{X}, 0) = u_0(\boldsymbol{X}),\ u_t(\boldsymbol{X}, 0) = u_1(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \in \Omega \end{cases} \tag{23}$$

其中：$R_1^n = \bar{\partial}_{tt} u^n - u_{tt}^{n,\frac{1}{4}} = O(\tau^2)$，$R_2^n = \bar{\partial}_t u^n - u_t^{n,\frac{1}{4}} = O(\tau^2)$.

变分问题(23) 的全离散逼近格式为：求 $\{U^n, Q^n\}: [0, T] \longrightarrow V_h \times M_h$ 使

$$\begin{cases} (\beta \nabla U^n, \boldsymbol{w}_h) = (\boldsymbol{Q}^n, \boldsymbol{w}_h) & \forall\, \boldsymbol{w}_h \in M_h \\ (\bar{\partial}_{tt} U^n, v_h) + (2\alpha \bar{\partial}_t U^n, v_h) + (\boldsymbol{Q}^{n,\frac{1}{4}}, \nabla v_h) = (f^{n,\frac{1}{4}}, v_h) & \forall\, v_h \in V_h \\ U^0 = I_h^1 u_0(\boldsymbol{X}),\ U^1 = I_h^1\left(u_0(X) + u_1(\boldsymbol{X})\tau + \dfrac{\tau^2}{2} u_{tt}(\boldsymbol{X}, 0)\right) \end{cases} \tag{24}$$

其中：$u_{tt}(\boldsymbol{X}, 0) = -2\alpha u_1(\boldsymbol{X}) + \nabla \cdot (\beta \nabla u_0(\boldsymbol{X})) + f(\boldsymbol{X}, 0)$.

定理 4 设 $\{u^n, \boldsymbol{q}^n\}$，$\{U^n, \boldsymbol{Q}^n\}$ 分别是问题(23),(24) 的解，若 $u \in H^4(\Omega)$，$u_t, u_{tt} \in H^2(\Omega)$，$\boldsymbol{q} \in (H^2(\Omega))^2$，则

$$\|I_h^1 u^n - U^n\|_1 + \|I_h^2 q^n - Q^n\|_0 = O(h^2 + \tau^2) \tag{25}$$

证 为方便误差估计，记 $u^n - U^n = (u^n - I_h^1 u^n) + (I_h^1 u^n - U^n) \triangleq \eta^n + \xi^n$，$\boldsymbol{q}^n - \boldsymbol{Q}^n = (\boldsymbol{q}^n - I_h^2 \boldsymbol{q}^n) + (I_h^2 \boldsymbol{q}^n - \boldsymbol{Q}^n) \triangleq \boldsymbol{\rho}^n + \boldsymbol{\theta}^n$，则由(23) 和(24) 式可导出如下误差方程

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\rho}^n + \boldsymbol{\theta}^n, \boldsymbol{w}_h) = (\beta \nabla \xi^n, \boldsymbol{w}_h) + (\beta \nabla \eta^n, \boldsymbol{w}_h) & \forall\, \boldsymbol{w}_h \in M_h \\ (\bar{\partial}_{tt} \xi^n, v_h) + (2\alpha \bar{\partial}_t \xi^n, v_h) + (\boldsymbol{\theta}^{n,\frac{1}{4}}, \nabla v_h) = -(\bar{\partial}_{tt} \eta^n, v_h) - \\ (2\alpha \bar{\partial}_t \eta^n, v_h) - (\boldsymbol{\rho}^{n,\frac{1}{4}}, \nabla v_h) + (R_1^n, v_h) + (2\alpha R_2^n, v_h) & \forall\, v_h \in V_h \end{cases} \tag{26}$$

在(26) 式中取 $v_h = \bar{\partial}_t \xi^n$，$\boldsymbol{w}_h = \boldsymbol{\theta}^n$，有

$$\begin{aligned} &(\bar{\partial}_{tt} \xi^n, \bar{\partial}_t \xi^n) + (2\alpha \bar{\partial}_t \xi^n, \bar{\partial}_t \xi^n) + (\beta \nabla \xi^{n,\frac{1}{4}}, \nabla \bar{\partial}_t \xi^n) = -(\bar{\partial}_{tt} \eta^n, \bar{\partial}_t \xi^n) - \\ &(2\alpha \bar{\partial}_t \eta^n, \bar{\partial}_t \xi^n) - (\beta \nabla \eta^{n,\frac{1}{4}}, \nabla \bar{\partial}_t \xi^n) + (R_1^n, \bar{\partial}_t \xi^n) + (2\alpha R_2^n, \bar{\partial}_t \xi^n) \triangleq \sum_{i=1}^{5} G_i \end{aligned} \tag{27}$$

先将(27) 式的左端变形为

$$\begin{aligned} &(\bar{\partial}_{tt} \xi^n, \bar{\partial}_t \xi^n) + (2\alpha \bar{\partial}_t \xi^n, \bar{\partial}_t \xi^n) + (\beta \nabla \xi^{n,\frac{1}{4}}, \nabla \bar{\partial}_t \xi^n) \geqslant (2\tau)^{-1}(\|\bar{\partial}_t \xi^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 - \\ &\|\bar{\partial}_t \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_0^2 + \|\beta^{\frac{1}{2}} \nabla \xi^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 - \|\beta^{\frac{1}{2}} \nabla \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_0^2) + 2a_0 \|\bar{\partial}_t \xi^n\|_0^2 \end{aligned} \tag{28}$$

接下来估计(27)式的右端各项，注意到文献[19]已证明下面不等式

$$\| \bar{\partial}_{tt}\eta^n \|_0^2 \leqslant C\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \| \eta_{tt} \|_0^2 \mathrm{d}s，\| \bar{\partial}_t\eta^n \|_0^2 \leqslant C\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \| \eta_t \|_0^2 \mathrm{d}s \tag{29}$$

$\forall u \in H^s(\Omega)$，记 $\| u \|_{L^\infty(H^s(\Omega))} = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \| u \|_{H^s(\Omega)}$，由(29)式可得

$$| G_1 + G_2 | \leqslant Ch^4(\| u_{tt} \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \| u_t \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2) + \frac{a_0}{2}\| \bar{\partial}_t\xi^n \|_0^2 \tag{30}$$

由(4)式可导出

$$\begin{aligned}| G_3 | &\leqslant Ch^2 | u^{n,\frac{1}{4}} |_4 \| \bar{\partial}_t\xi^n \|_0 \leqslant Ch^4 | u^{n,\frac{1}{4}} |_4^2 + \frac{a_0}{2}\| \bar{\partial}_t\xi^n \|_0^2 \leqslant \\ &Ch^4 \| u \|_{L^\infty(H^4(\Omega))}^2 + \frac{a_0}{2}\| \bar{\partial}_t\xi^n \|_0^2\end{aligned} \tag{31}$$

借助于 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$| G_4 + G_5 | \leqslant C(\| R_1^n \|_0^2 + \| R_2^n \|_0^2) + \frac{a_0}{2}\| \bar{\partial}_t\xi^n \|_0^2 \leqslant C\tau^4 + \frac{a_0}{2}\| \bar{\partial}_t\xi^n \|_0^2 \tag{32}$$

根据(30)－(32)式及(28)式，有

$$\begin{gathered}(2\tau)^{-1}(\| \bar{\partial}_t\xi^{n+\frac{1}{2}} \|_0^2 - \| \bar{\partial}_t\xi^{n-\frac{1}{2}} \|_0^2 + \| \beta^{\frac{1}{2}}\nabla\xi^{n+\frac{1}{2}} \|_0^2 - \| \beta^{\frac{1}{2}}\nabla\xi^{n-\frac{1}{2}} \|_0^2) \leqslant \\ Ch^4(\| u_{tt} \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \| u_t \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \| u \|_{L^\infty(H^4(\Omega))}^2) + C\tau^4\end{gathered} \tag{33}$$

基于 $| \xi^{n-\frac{1}{2}} |_1^2 = \frac{1}{4}(| \xi^n |_1^2 + | \xi^{n-1} |_1^2) + \frac{1}{2}(\nabla\xi^n，\nabla\xi^{n-1})$ 且 $(\nabla\xi^n，\nabla\xi^{n-1}) \leqslant \frac{1}{4} | \xi^n |_1^2 + | \xi^{n-1} |_1^2$，对(33)式两端关于 n 从 1 到 $J-1$ 求和可得

$$\begin{aligned}| \xi^J |_1^2 &\leqslant C\| \bar{\partial}_t\xi^{\frac{1}{2}} \|_0^2 + C\| \beta^{\frac{1}{2}}\nabla\xi^{\frac{1}{2}} \|_0^2 + Ch^4\sum_{i=1}^{J-1}(\| u_{tt} \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \| u_t \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \| u \|_{L^\infty(H^4(\Omega))}^2) + \\ &C\sum_{i=1}^{J-1}\tau^4 + 2 | \xi^{J-1} |_1^2 + C\sum_{i=1}^{J-2} | \xi^{J-1} |_1^2\end{aligned} \tag{34}$$

注意到 $\xi^0 = 0$，$\xi^1 = U^1 - I_h^1 u^1 = U^1 - I_h^1(u_0(X) + \tau u_1(X) + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}(X，0) + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt}(X，\delta)) = O(\tau^3)$，有

$$\| \bar{\partial}_t\xi^{\frac{1}{2}} \|_0^2 + \| \beta^{\frac{1}{2}}\nabla\xi^{\frac{1}{2}} \|_0^2 \leqslant \tau^{-2}\| \xi^1 - \xi^0 \|_0^2 + C | \xi^1 + \xi^0 |_1^2 = O(\tau^4) \tag{35}$$

又因为 $(N-1)\tau \leqslant T$，综合(34)，(35)式，利用离散 Gronwall 引理，并注意到 $\xi \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$，可导出

$$\| \xi^J \|_1^2 = O(h^4 + \tau^4) \tag{36}$$

另一方面，在(30)式中取 $\boldsymbol{w}_h = \boldsymbol{\theta}^n$，类似于定理 2 中(21)式的推导过程，并结合(33)式可证得(25)式，定理证毕.

类似于第 2 节中关于整体超收敛的推导过程可得全离散格式下相应的整体超收敛结果.

注：文献[5]选取双线性 Q_{11} 元和类 Wilson 元作为逼近空间，采用 H^1－Galerkin 混合有限元方法在半离散格式下得到了具有 $O(h)$ 阶的收敛性结果且整体自由度为 $7NP$. 本文选取最低阶混合单元对 $Q_{11} + Q_{01} \times Q_{10}$ 作为逼近空间，利用混合元新格式在半离散和全离散格式下导出了具有 $O(h^2)$ 阶的超逼近性和超收敛结果；同时，本文选取单元对的整体自由度也只有 $3NP$.

参考文献：

[1]　LAI S Y. The Asymptotic Theory of Semilinear Perturbed Telegraph Equation and Its Application [J]. Applied Mathematics and Mechanics，1997，18(7)：657－662.

[2]　赖绍永. 非线性摄动电报方程的渐近理论及其应用 [J]. 数学物理学报，1998，18(2)：149－153.

[3]　何斯日古楞，李　宏. 电报方程的时间间断时空有限元方法 [J]. 高校应用数学学报，2012，27(4)：425－438.

[4]　郭　勇，张建文，杜晓姣. 一类具有非局部边界的非线性电报方程的初边值问题 [J]. 应用数学，2014，27(2)：258－265.

[5]　马　戈，周家全，石东洋. 电报方程 H^1－Galerkin 非协调混合有限元分析 [J]. 数学的实践与认识，2010，40(16)：107－112.

[6]　李永献，石东伟. 电报方程的 H^1－Galerkin 非协调混合有限元逼近 [J]. 数学的实践与认识，2015，45(6)：286－293.

[7] 王芬玲，赵艳敏，石东洋．电报方程的类 Wilson 非协调有限元分析 [J]．数学杂志，2013，33(2)：290－300.
[8] 陈绍春，陈红如．二阶椭圆问题新的混合元格式 [J]．计算数学，2010，32(2)：213－218.
[9] 石东洋，李明浩．二阶椭圆问题一种新格式的高精度分析 [J]．应用数学学报，2014，37(1)：45－58.
[10] 张亚东，石东洋．各向异性网格下抛物方程一个新的非协调混合元收敛性分析 [J]．计算数学，2013，35(2)：171－180.
[11] 石东洋，张亚东．抛物型方程一个新的非协调混合元超收敛性分析及外推 [J]．计算数学，2013，35(4)：337－352.
[12] 赵艳敏，石东伟，王芬玲．非线性双相滞热传导方程的新混合元超收敛分析 [J]．数学的实践与认识，2014，44(5)：269－274.
[13] SHI D Y，ZHANG Y D. High Accuracy Analysis of a New Nonconforming Mixed Finite Element Scheme for Sobolev Equation [J]. Applied Mathematics and Computation，2011，218(7)：3176－3186.
[14] 史艳华，石东洋．Sobolev 方程新混合元方法的高精度分析 [J]．系统科学与数学，2014，34(4)：452－463.
[15] 王芬玲，樊明智，石东洋．非线性 sine-Gordon 方程的一个新非协调混合元格式 [J]．应用数学，2014，27(3)：498－506.
[16] 王萍莉，石东伟，王芬玲．四阶强阻尼波动方程新混合元模式的高精度分析 [J]．应用数学，2015，28(2)：368－377.
[17] 林　群，严宁宁．高效有限元构造与分析[M]．保定：河北大学出版社，1996.
[18] HALE J K. Ordinary Differential Equations[M]. New York：Willey，1969
[19] SHI D Y，ZHANG D. Approximation of Nonconforming Quasi-Wilson Element for Sine-Gordon Equations [J]. Journal of Computational Mathematics，2013，31(3)：271－282.

On High Accuracy Analysis of a New Lowest Order Mixed Finite Element in Telegram Equations

LI Yong-xian[1]，　DIAO　Qun[2]

1. School of Mathematics and Physics，Henan University of Urban Construction，Pingdingshan He´nan 467036，China；
2. School of Mathematics and Informatics，Pingdingshan University，Pingdingshan He´nan 467000，China

Abstract：A new lowest order mixed finite element scheme which can satisfy LBB condition automatically has been proposed for telegraph equations by means of the bilinear element and its gradients spaces. Based on the mean-value technique，transformation of the derivative with respect to time t，high accuracy analysis and interpolated postprocessing approach，the superclose properties and superconvergence results of the primitive solution in H^1-norm and the flux in L^2-norm have been obtained for semi-discrete and fully-discrete schemes respectively，which are one order higher than that of traditional error estimates.

Key words：telegraph equations；new mixed finite element scheme；semi-discrete and fully-discrete；superclose properties；superconvergence

责任编辑　张　枸