第 42 卷 第 1 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2017 年 1 月
Vol. 42 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jan. 2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.01.004

Lévy 过程与更新过程的相依和的尾概率的渐近性①

崔召磊[1], 王岳宝[2], 于长俊[3]

1. 常熟理工学院 数学与统计学院,江苏 常熟 215500;2. 苏州大学 数学科学学院,江苏 苏州 215006;
3. 南通大学 理学院,江苏 南通 226019

摘要: 给出了一类 Lévy 过程与更新过程和的尾概率的渐近性,这两个过程满足一种可以包含部分正相关和负相关的非常宽泛的相依结构. 在此基础上针对一些特殊情形,讨论了这些相依和的最大值的尾概率的渐近性.

关 键 词: Lévy 过程;更新过程;尾概率的渐近性

中图分类号:O211 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2017)01-0020-07

在风险理论中,更新过程和 Lévy 过程是重要的研究对象. 对它们的系统介绍,可以参见文献[1-2]. 近年来,许多学者基于这两类基本的随机过程,提出并研究了一些更复杂的随机过程,例如:文献[3-4]等考虑了被扩散过程(布朗运动)干扰的更新过程;文献[5]研究了被谱负 Lévy 过程干扰的一般风险过程. 然而,上述研究均基于两个随机过程相互独立的前提条件. 而在相依情形下,对两个随机过程之和的研究,却并不多见.

近年来,为研究离散随机变量和的渐近性,许多学者提出了一些非常宽泛的相依结构[6-8]. 本文将对文献[6]定义的相依结构进行推广,从而定义一种随机过程之间的相依结构. 并在此基础上,研究两类随机过程和的渐近性问题.

首先,我们给出本文的一些约定和记号. 若无特别说明,本文极限均指 $x\to\infty$. 对两个正函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,若 $\lim f_1(x)/f_2(x)=1$,则记 $f_1(x)\sim f_2(x)$;若 $\lim f_1(x)/f_2(x)=0$,则记 $f_1(x)=o(f_2(x))$;若 $\limsup f_1(x)/f_2(x)<\infty$,则记 $f_1(x)=O(f_2(x))$;若 $\limsup f_1(x)/f_2(x)\leqslant 1$,则记 $f_1(x)\lesssim f_2(x)$;若 $\liminf f_1(x)/f_2(x)\geqslant 1$,则记 $f_1(x)\gtrsim f_2(x)$. 记 $x\wedge y=\min\{x,y\}$,$x\vee y=\max\{x,y\}$. 特别地,对于任意随机变量 Z,记 $Z^+=Z\vee 0$. 对于任意分布函数 V,记其尾分布为 $\overline{V}(x)=1-V(x)$.

文献[6]在研究随机变量有限和的尾概率时,引入了如下相依结构.

假设 A 两个随机变量 Z_1,Z_2 满足下列关系,对 $1\leqslant i\neq j\leqslant 2$,有

$$\lim_{x_i\wedge x_j\to\infty} P(|Z_i|>x_i \mid Z_j>x_j)=0$$

该结构可以部分地包含正相关和负相关,是一类非常宽泛的相依结构. 本文将这种相依结构引入到随机过程领域来刻画某些随机过程之间的相依性.

假设 A* 两个随机过程 $X_1=\{X_1(t),t\geqslant 0\}$ 和 $X_2=\{X_2(t),t\geqslant 0\}$ 满足下列关系,对任意的 $t>0$ 及 $1\leqslant i\neq j\leqslant 2$,有

---

① 收稿日期:2015-06-01
基金项目:国家自然科学基金项目(11071182,11226208,11426139).
作者简介:崔召磊(1981-),男,山东莱州人,讲师,主要从事保险理论的研究.

$$\lim_{x_i \wedge x_j \to \infty} P(|X_i(t)| > x_i \mid X_j(t) > x_j) = 0$$

我们将在定理 2 中证明，满足该相依结构的随机过程是存在的.

本文将讨论假设 A* 下的更新过程与 Lévy 过程的和的渐近性问题，且本文的讨论侧重于重尾情形. 称一个随机变量 Z(或者其分布 V) 是重尾的，若对任意 $\varepsilon > 0$，$Ee^{\varepsilon Z} = \infty$；反之，则称为轻尾的. 下面介绍本文涉及到的几个重尾分布族.

定义 1　称分布 V 属于长尾分布族，记作 $V \in \mathscr{L}$，如果

$$\overline{V}(x-1) \sim \overline{V}(x)$$

记

$$\mathscr{H}(V) = \{h(x): \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+;\ h(x) \to \infty,\ x^{-1}h(x) \to 0 \text{ 且 } \overline{V}(x-t) \sim \overline{V}(x) \text{ 在 } |t| \leqslant h(x) \text{ 上一致成立}\}.$$

下述命题 1 显然成立，相关结论可参见文献[9－10].

命题 1　$V \in \mathscr{L} \Leftrightarrow \mathscr{H}(V) \neq \varnothing$.

定义 2　称分布 V 属于控制变化尾分布族，记作 $V \in \mathscr{D}$，如果

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{V}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{V}(x)} < \infty$$

根据文献[11] 的定理2.1.7，若 $V \in \mathscr{D}$，则当 x 足够大时，存在常数 $\beta > 0$ 及 $D = D(\beta) > 0$，对任意的 $\Lambda > 1$ 及 $\lambda \in [1, \Lambda]$，

$$\frac{\overline{V}(\lambda x)}{\overline{V}(x)} \geqslant D(1+o(1))\lambda^{\beta}$$

满足上述条件的 β 的上确界称为下阶 Matuszewska 指数，记为 $\beta^*(V)$.

文献[12] 引入了如下的一致变化尾分布族.

定义 3　称分布 V 属于一致变化尾分布族，记作 $V \in \mathscr{C}$，如果

$$\lim_{y \downarrow 1} \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{V}(yx)}{\overline{V}(x)} = 1$$

$\mathscr{C} \subset \mathscr{D} \cap \mathscr{L}$，且该包含关系是严格成立的[13].

1　主要结果

假设 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 是一个 Lévy 过程，即 X 是一个具有平稳独立增量且随机连续的随机过程，记

$$Ee^{ixX(t)} = e^{t\psi(x)}$$

根据 Lévy-Khintchin 公式，

$$\psi(x) = ibx - 2^{-1}\sigma^2 x^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixy} - 1 - ixy1_{(|y|\leqslant 1)})\rho(dy),\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

其中：$b \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma \geqslant 0$ 是常数，ρ 是一个 Borel 测度，通常被称为 Lévy 测度，$\rho(\{0\}) = 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty}(1 \wedge x^2)\rho(dx) < \infty$.

约定由 X 生成的自然 σ-代数流满足右连续性和完备性假设. 周知，Lévy 过程可以表示为 3 个相互独立的部分，即 $X \overset{d}{=} X^{(1)} + X^{(2)} + \sigma B$，其中 $B = \{B(t), t \geqslant 0\}$ 是一个布朗运动，而对某个 $\delta > 0$，$X^{(1)}$，$X^{(2)}$ 的特征函数的对数函数可以分别表示为

$$\psi_1(x) = ibx + \int_{y>\delta} (e^{ixy} - 1 - ixy1_{(|y|\leqslant 1)})\rho(dy)$$

及

$$\psi_2(x) = \int_{y\leqslant\delta} (e^{ixy} - 1 - ixy1_{(|y|\leqslant 1)})\rho(dy)$$

具体可见文献[2]的定理19.2和19.3.

假设$Y(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i$，其中$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一个更新计数过程，$\{\xi_i,i\geqslant 1\}$是一列独立同分布的随机变量，其共同的分布记为$F$. 记$R(t)=X(t)+Y(t)$，$t\geqslant 0$，本文将主要讨论$R(t)$的尾概率的渐近性质. 需要指出的是，该过程可以解释为带Lévy过程型金融风险干扰的更新风险模型的净亏损额度总和. 本文主要结果如下.

定理1 假设$Y(t)$与$X(t)$满足假设A^*且$F\in\mathscr{D}\cap\mathscr{L}$. 记$G(A)=\dfrac{\rho(A\cap(\delta,\infty))}{\rho(\delta,\infty)}$. 则有如下结论：

(i) 若G是轻尾的，则对任意$t>0$，

$$P(R(t)>x)\sim P(Y(t)>x)\sim EN(t)\overline{F}(x)$$

(ii) 若$G\in\mathscr{D}\cap\mathscr{L}$，则对任意$t>0$，

$$P(R(t)>x)\sim P(X(t)>x)+P(Y(t)>x)\sim\overline{G}(x)+EN(t)\overline{F}(x)$$

进一步地，一个很自然的问题就是：两个过程之间是否可以引入假设A^*这种相依关系？下面的定理2给出了两个随机过程满足假设A^*的充分条件，并且对任意常数$T>0$，我们可以得到相应过程在有限区间$[0,T]$上的最大值的尾概率的渐近性. 而最大值的尾概率在风险理论中常可以解释为时刻T之前破产的破产概率.

定理2 假设$U(t)=\sum_{j=1}^{\widetilde{N}(t)}\eta_j+B(t)-t$，$t\geqslant 0$，其中$\{\widetilde{N}(t),t\geqslant 0\}$是一个更新计数过程，$\{B(t),t\geqslant 0\}$是一个布朗运动，而$\eta_j$，$j\geqslant 1$是独立同分布的随机变量，其分布函数为$K\in\mathscr{C}$. 假设$\{Y(t),t\geqslant 0\}$如定理1所述且$F\in\mathscr{C}$. 若对任意自然数$i,j$，$\xi_i$与$\eta_j$满足假设A，$\{B(t),t\geqslant 0\}$，$\{N(t),t\geqslant 0\}$，$\{\widetilde{N}(t),t\geqslant 0\}$，$\{\xi_i,i\geqslant 1\}$及$\{\eta_i,i\geqslant 1\}$相互独立，$\{\widetilde{N}(t),t\geqslant 0\}$与$\{N(t),t\geqslant 0\}$相互独立，则$\{Y(t),t\geqslant 0\}$与$\{U(t),t\geqslant 0\}$满足假设$A^*$且

$$P(\max_{0\leqslant t\leqslant T}(Y(t)+U(t))>x)\sim EN(T)\overline{F}(x)+E\widetilde{N}(T)\overline{K}(x)$$

注1 通过下文定理2证明易知，该定理中的$U(t)$可以写成更一般的形式，$U(t)=\sum_{j=1}^{\widetilde{N}(t)}\eta_j+\sigma B(t)-ct$，$t\geqslant 0$，其中$c$是一个常数. 此外，当$\{\widetilde{N}(t),t\geqslant 0\}$是一个泊松过程时，则$\{U(t),t\geqslant 0\}$就是一个Lévy过程.

为证明上述两个定理，我们需要以下几个引理.

引理1 设Z_1,Z_2是实值随机变量，满足假设A，其分布分别为V_1，V_2. 假设$V_1\in\mathscr{D}\cap\mathscr{L}$.

(i) 若$V_2\in\mathscr{D}\cap\mathscr{L}$，则

$$P(Z_1+Z_2>x)\sim\overline{V}_1(x)+\overline{V}_2(x)$$

(ii) 若$\overline{V}_2(x)=o(\overline{V}_1(x))$，则

$$P(Z_1+Z_2>x)\sim\overline{V}_1(x)$$

证 由于(ii)与(i)的证明是类似的，因此我们只需证明(i). 首先，对任意$h\in\mathscr{H}(V_1)\cap\mathscr{H}(V_2)$，易知

$$\begin{aligned}P(Z_1+Z_2>x)=&P(Z_1+Z_2>x,\{Z_1\leqslant h(x)\}\cup\{Z_2\leqslant h(x)\})+\\&P(Z_1+Z_2>x,Z_1>h(x),Z_2>h(x))\leqslant\\&P(Z_1>x-h(x))+P(Z_2>x-h(x))+P\left(Z_1>h(x),Z_2>\frac{x}{2}\right)+\\&P\left(Z_1>\frac{x}{2},Z_2>h(x)\right)=:\\&\sum_{k=1}^{4}I_k(x)\end{aligned}\tag{2}$$

由随机变量Z_1,Z_2满足假设A且$V_1,V_2\in\mathscr{D}$知，

$$I_3(x)=P\left(Z_1>h(x)\mid Z_2>\frac{x}{2}\right)P\left(Z_2>\frac{x}{2}\right)=$$

$$o(\overline{V}_2(x)) \tag{3}$$

类似可得

$$I_4(x) = o(\overline{V}_1(x)) \tag{4}$$

又 $I_1(x) \sim \overline{V}_1(x)$ 及 $I_2(x) \sim \overline{V}_2(x)$ 是显然的，结合(2)－(4) 式可得

$$P(Z_1 + Z_2 > x) \lesssim \overline{V}_1(x) + \overline{V}_2(x) \tag{5}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} P(Z_1 + Z_2 > x) \geqslant & P(Z_1 + Z_2 > x, -h(x) \leqslant Z_1 \leqslant h(x)) + \\ & P(Z_1 + Z_2 > x, -h(x) \leqslant \eta \leqslant h(x)) \geqslant \\ & P(Z_1 > x + h(x)) + P(Z_2 > x + h(x)) - \\ & P(Z_1 > x + h(x), |\eta| \geqslant h(x)) - P(Z_2 > x + h(x), |Z_1| \geqslant h(x)) =: \\ & \sum_{k=1}^{4} J_k(x) \end{aligned}$$

采用类似于(3) 式中的方法容易证明，$J_3(x) = o(\overline{V}_1(x))$ 及 $J_4(x) = o(\overline{V}_2(x))$. 而 $J_1(x) \sim \overline{V}_1(x)$ 及 $J_2(x) \sim \overline{V}_2(x)$ 是显然的，因此

$$P(Z_1 + Z_2 > x) \gtrsim \overline{V}_1(x) + \overline{V}_2(x) \tag{6}$$

由(5),(6) 式知结论成立.

定理 1 的证明　由 $F \in \mathscr{D} \cap \mathscr{L}$ 及文献[14] 的定理 5.1 知，对于任意给定的 $t > 0$，$Y(t)$ 的分布属于 $\mathscr{D} \cap \mathscr{L}$ 且

$$P(Y(t) > x) \sim EN(t)\overline{F}(x) \tag{7}$$

进一步地，由文献[2] 的定理 25.18 知，

$$X(t) \overset{d}{=} X^{(1)}(t) + X^{(2)}(t) + \sigma B(t),\ t \geqslant 0$$

其中$\{X^{(1)}(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 $\rho(\delta, \infty)$，增量分布为 G 的带漂移的复合泊松过程，$\{B(t), t \geqslant 0\}$ 是布朗运动，而$\{X^{(2)}(t), t \geqslant 0\}$ 是具有任意正指数阶矩的随机过程.

(i) 对于任意 $t \geqslant 0$，若 G 是轻尾的，则 $X^{(1)}(t)$ 是轻尾的. 又由于 $B(t)$ 具有任意的指数阶矩，故知 $X(t)$ 是轻尾的. 结合(7) 式及引理(ii) 可立得结论.

(ii) 由 $G \in \mathscr{D} \cap \mathscr{L}$ 及文献[14] 的定理 3.1 可知，对任意的 $t > 0$，$X(t)$ 的分布属于 $\mathscr{D} \cap \mathscr{L}$. 结合引理(i) 立知结论成立.

根据文献[6] 的引理 4.2，容易得到下述结论.

引理 2　设$\{Z_i, i \geqslant 1\}$ 是一列独立同分布的随机变量列，且对于任意自然数 i，Z_i 均与随机变量 W 满足假设 A，则对任意的 $n \geqslant 1$，有

$$\lim_{x \wedge y \to \infty} P(|\sum_{i=1}^{n} Z_i| > y \mid W > x) = 0$$

进一步地，我们可以得到如下更一般的结论.

引理 3　假设$\{Z_i, i \geqslant 1\}$ 与$\{W_i, i \geqslant 1\}$ 是两个独立同分布的随机变量列，且对任意自然数 i,j,Z_i 与 W_j 满足假设 A. 又设 $N,\widetilde{N}$ 是两个相互独立的整值随机变量，且均与$\{Z_i, i \geqslant 1\}$ 和$\{W_j, j \geqslant 1\}$ 相互独立. 若 Z_1 的分布 $V_1 \in \mathscr{D} \cap \mathscr{L}$，且对某个 $\alpha > |\beta^*(V_1)| + 1$，$E\widetilde{N}^{\alpha} < \infty$，则

$$\lim_{x \wedge y \to \infty} P(|\sum_{j=1}^{N} W_j| > y \mid \sum_{i=1}^{\widetilde{N}} Z_i > x) = 0$$

证　首先，对任意的 $n_1, n_2 \geqslant 1$，由 $V_1 \in \mathscr{D} \cap \mathscr{L}$ 及假设 A 得，当 $x \wedge y \to \infty$ 时，

$$P(|\sum_{j=1}^{n_1} W_j| > y \mid \sum_{i=1}^{n_2} Z_i > x) = \frac{P(|\sum_{j=1}^{n_1} W_j| > y, \sum_{i=1}^{n_2} Z_i > x)}{P(\sum_{i=1}^{n_2} Z_i > x)} \leqslant$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_2} P(|\sum_{j=1}^{n_1} W_j| > y,\ Z_i > \frac{x}{n_2})}{P(\sum_{i=1}^{n_2} Z_i > x)} \leqslant$$
$$\frac{\sum_{i=1}^{n_2} P\left(|\sum_{j=1}^{n_1} W_j| > y \mid Z_i > \frac{x}{n_2}\right) P\left(Z_i > \frac{x}{n_2}\right)}{CP(Z_1 > x)} \to 0 \tag{8}$$

因此，根据控制收敛定理，对任意的 n，当 $x \wedge y \to \infty$ 时，

$$P(|\sum_{j=1}^{N} W_j| > y \mid \sum_{i=1}^{n} Z_i > x) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(|\sum_{j=1}^{k} W_j| > y \mid \sum_{i=1}^{n} Z_i > x\right) P(N = k) \to 0 \tag{9}$$

又由 $V_1 \in \mathscr{D} \cap \mathscr{L}$ 易知

$$P(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}} Z_i > x) \sim E\widetilde{N} P(Z_1 > x)$$

于是，存在常数 $0 < C_2 < 1$ 使得对于充分大的 x，

$$P(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}} Z_i > x) \geqslant C_2\, E\widetilde{N} P(Z_1 > x) \tag{10}$$

而由 $V_1 \in \mathscr{D}$ 及文献[15]的定理2知，对于任意 $\alpha > |\beta^*(V_1)| + 1$，存在常数 C_1 使得对于任意 $n \geqslant 1$ 及 $x \geqslant 0$，

$$P(\sum_{i=1}^{n} Z_i > x) \leqslant C_1\, n^{\alpha} P(Z_1 > x) \tag{11}$$

由(9)-(11)式，$E\widetilde{N}^{\alpha} < \infty$ 及控制收敛定理得，当 $x \wedge y \to \infty$ 时，

$$P(|\sum_{i=1}^{N} W_j| > y \mid \sum_{i=1}^{\widetilde{N}} Z_i > x) \leqslant$$
$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(|\sum_{j=1}^{N} W_j| > y,\ \sum_{i=1}^{n} Z_i > x) P(\widetilde{N} = n)}{C_2 E\widetilde{N} P(Z_1 > x)} \leqslant$$
$$\frac{C_1}{C_2 E\widetilde{N}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P(|\sum_{j=1}^{N} W_j| > y \mid \sum_{i=1}^{n} Z_i > x) P(\widetilde{N} = n) \to 0$$

故引理得证.

引理4 假设随机变量 Z_1, Z_2 满足假设A，并且都与随机变量 Z_3 独立. 如果 Z_1 的分布 $V_1 \in \mathscr{D}$ 且 $P(Z_3 > x) = O(P(Z_1 > x))$，则 $Z_1 + Z_3$ 与 Z_2 满足假设A.

证 首先由引理2易知，

$$\lim_{x \wedge y \to \infty} P(|Z_1 + Z_3| > x \mid Z_2 > y) = 0$$

另一方面，

$$P(|Z_2| > y \mid Z_1 + Z_3 > x) = \frac{P(|Z_2| > y,\ Z_1 + Z_3 > x)}{P(Z_1 + Z_3 > x)} \leqslant$$
$$\frac{P\left(|Z_2| > y \mid Z_1 > \frac{x}{2}\right) P\left(Z_1 > \frac{x}{2}\right)}{P\left(Z_1 > \frac{3x}{2}\right) P\left(Z_3 \geqslant -\frac{x}{2}\right)} + \frac{P(|Z_2| > y) P(Z_3 > \frac{x}{2})}{P\left(Z_1 > \frac{3x}{2}\right) P\left(Z_3 \geqslant -\frac{x}{2}\right)} =:$$
$$I_1(x,\ y) + I_2(x,\ y)$$

因此，由 Z_1, Z_2 满足假设A及 $V_1 \in \mathscr{D}$ 知，当 $x \wedge y \to \infty$ 时，

$$I_1(x,\ y) \to 0$$

由 $V_1 \in \mathscr{D}$ 且 $P(Z_3 > x) = O(P(Z_1 > x))$ 知，当 $x \wedge y \to \infty$ 时，

$$I_2(x,\ y) \to 0$$

从而引理得证.

定理 2 的证明　首先，由于$\{N(t), t \geqslant 0\}$与$\{\widetilde{N}(t), t \geqslant\}$均为更新计数过程，因此对于任意给定的$t>0$，$N(t)$与$\widetilde{N}(t)$均为轻尾的. 由引理 3 可知，$\{Y(t), t \geqslant 0\}$与$\{\sum_{j=1}^{\widetilde{N}(t)} \eta_j, t \geqslant 0\}$满足假设 A^*，进而由引理 4 知，$\{Y(t), t \geqslant 0\}$与$\{U(t), t \geqslant 0\}$满足假设 A^*. 故由引理 1 知，

$$\begin{aligned} P(\max_{0 \leqslant t \leqslant T}(Y(t)+U(t))>x) &\gtrsim P(Y(T)+U(T)>x) \sim \\ & P(Y(T)>x)+P\Big(\sum_{j=1}^{\widetilde{N}(T)} \eta_j>x\Big) \end{aligned} \tag{12}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} P(\max_{0 \leqslant t \leqslant T}(Y(t)+U(t))>x) \leqslant & P(\sum_{i=1}^{N(T)} \xi_i^{+}+\sum_{j=1}^{\widetilde{N}(T)} \eta_j^{+}+\max_{0 \leqslant t \leqslant T} B(t)>x) \leqslant \\ & P(\sum_{i=1}^{N(T)} \xi_i^{+}+\sum_{j=1}^{\widetilde{N}(T)} \eta_j^{+}>x-2\sqrt{x}, \max_{0 \leqslant t \leqslant T} B(t)<2\sqrt{x})+ \\ & P(\max_{0 \leqslant t \leqslant T} B(t) \geqslant 2\sqrt{x}) \leqslant \\ & P(\sum_{i=1}^{N(T)} \xi_i^{+}+\sum_{j=1}^{\widetilde{N}(T)} \eta_j^{+}>x-2\sqrt{x})+ \\ & P(\max_{0 \leqslant t \leqslant T} B(t) \geqslant 2\sqrt{x}) \end{aligned}$$

其中

$$P(\max_{0 \leqslant t \leqslant T} B(t) \geqslant 2\sqrt{x})=o(e^{-x})=o(P(\xi_1>x) \wedge P(\eta_1>x))$$

并且，容易验证，任意自然数 i 与 j，ξ_i^{+}与η_j^{+}满足假设 A. 由 $F, K \in \mathscr{C}$ 及引理 3 和引理(i) 可得

$$P(\max_{0 \leqslant t \leqslant T}(Y(t)+U(t))>x) \lesssim P(Y(T)>x)+P(\sum_{j=1}^{\widetilde{N}(T)} \eta_j>x) \tag{13}$$

因此，由(12),(13) 式及文献[14] 的定理 5.1 立知结论成立.

参考文献：

[1] EMBRECHTS P, KLÜPPELBERG C, MIKOSCH, T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance [M]. New York: Springer, 1997.

[2] SATO K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions [M]//Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[3] DUFRESNE F, GERBER H. Risk Theory for the Compound Poisson Processes that Is Perturbed by Diffusion [J]. Insurance Math Econom, 1991, 10(1): 51－59.

[4] LI S, GARRIDO J. The Gerber-Shiu Function in a Sparre Andersen Risk Process Perturbed by Diffusion [J]. Scand Act J, 2005(3): 161－186.

[5] GARRIDO J, MORALES M. On the Expected Discounted Penalty Function for Lévy Risk Processes [J]. N Am Actuar Journal, 2007, 10(4): 196－218.

[6] GELUK J, TANG Q. Asymptotic Tail Probabilities of Sums of Dependent Subexponential Random Variables [J]. J Theor Probab, 2009, 22(4): 871－882.

[7] LIU L. Precise Large Deviations for Dependent Random Variables with Heavy Tails [J]. Stat Probab Lett, 2009, 79(9): 1290－1298.

[8] WANG K, WANG Y, GAO Q. Uniform Asymptotics for the Finite-Time Ruin Probability of a Dependent Risk Model with a Constant Interest Rate [J]. Methodol Comput Appl Prob, 2013, 15(1): 109－124.

[9] 王开永，王岳宝，张雅文. 广义次指数族的卷积根的封闭性 [J]. 应用数学，2007，20(1)：47－52.

[10] 王开永，王岳宝，陈　乾. 带不同分布增量随机和的局部渐近性 [J]. 数学年刊，2007，28(A)：867－878.

[11] BINGHAM N H, GOLDIE C M, TEUGELS J L. Regular Variation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[12] CLINE, D B H, SAMORODNITSKY G. Subexponentiality of the Product of Independent Random Variables [J]. Stochastic Process Appl, 1994, 49(1): 75-98.

[13] WANG Y, WANG K, CHENG D. Precise Large Deviations for Sums of Negatively Associated Random Variables with Common Dominatedly Varying Tails [J]. Acta Math Sin (English Series), 2006, 22(6): 1725-1734.

[14] PAKES A. Convolution Equivalence and Infinite Divisibility [J]. J Appl Probab, 2004, 41(2): 407-424.

[15] DALEY D, OMEY E, VESILO R. The Tail Behaviour of a Random Sum of Subexponential Random Variables and Vectors [J]. Extremes, 2007, 10(1): 21-39.

On Asymptotic Tail Probabilities of the Sums of the Dependent Lévy Processes and Renewal Processes

CUI Zhao-lei[1], WANG Yue-bao[2], YU Chang-jun[3]

1. School of Mathematics and Statistics, Changshu Institute of Technology, Changshu Jiangsu, 215500, China;

2. Department of Mathematics, Soochow University, Suzhou Jiangsu, 215006, China;

3. School of Science, Nantong University, Nantong Jiangsu, 226019, China

Abstract: In this paper, the asymptotics for the tail probabilities of the sums of Lévy processes and renewal processes have been presented, where the two processes satisfy the dependence structures given by reference. Based on these results, for some special cases, we have discussed the asymptotic behavior for the tail probabilities of the maxima of these dependent sums.

Key words: Lévy processes; renewal processes; asymptotic tail probability

责任编辑　张　枸