第 42 卷 第 1 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2017 年 1 月
Vol. 42 No. 1　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jan. 2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.01.006

一类排它过程的不变测度的研究[①]

徐　静

安徽师范大学 数学计算机科学学院,安徽 芜湖 241000

摘要: 研究了一类 $p(\cdot,\cdot)$ 在双随机性的条件下,具有常数密度的 Bernoulli 乘积测度的 2-步排它过程不变测度.

关 键 词: 简单排它过程; 2-步排它过程; 不变测度

中图分类号: O211.6　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1000-5471(2017)01-0031-04

无穷粒子马尔科夫过程是从 20 世纪 70 年代开始发展起来的新的概率论分支,有着深刻的统计物理背景,受到国际概率论学者和物理学者的普遍重视. 但是,由于无穷粒子系统的研究具有多样性和丰富性,目前一般理论并不系统,处理方法也因模型而异,因此它是有广阔的发展空间,并有重要应用前景的数学分支. 简单排它过程由 Spitzer[1] 于 1970 年首先提出,它是无穷粒子系统研究领域研究最多的模型之一. 如 Liggett[2],Andjel[3],Guiol[4] 研究了 k-步排它过程的某些性质,并给出了一个实例: S 为有限集,2-步排它过程,$p(\cdot,\cdot)$ 在双随机的条件下,不能保证具有常数密度的 2-步排它过程的乘积测度的不变性存在. 本文构造一类 2-步排它过程 $p(\cdot,\cdot)$ 具有双随机性,而常数密度乘积测度的不变测度是存在的.

设 S 为有限或可数集,k-步排它过程是具有转移概率 $p(\cdot,\cdot)$,状态空间为 $X=\{0,1\}^S$ 上的连续时间马尔科夫过程. 设 $\eta\in\{0,1\}^S$,其演化规则如下:

1) 每个位置至多只有一个粒子.

2) 如果在 x 位置上有一个粒子,则其等待参数为 1 的指数时间后,这个粒子跳到序列 $(X_n)_{1\leqslant n\leqslant k}$ 中它所遇到的第一个空位,这里 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为初始位置在 x,转移概率为 $p(\cdot,\cdot)$ 的马氏链.

3) 如果没有遇到空位,则粒子不动. 换言之,如果在 x 位有粒子想要跳,它可以按照马氏链 $(X_n)_{n\geqslant 0}$(初始位置在 x),不多于 k 步跳到它所遇到的第一个空位. 否则,粒子在原位不动.

显然,k-步排它过程是简单排它过程的自然推广.

设 S 为有限或可数集,$(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为 S 上具有转移矩阵 $p(\cdot,\cdot)$ 的马氏链. $P^x(X_0=x)=1$. 令 $k=\{1,2,\cdots\}$ 在假定 $\sup\limits_{y\in S}\sum\limits_{x\in S}p(x,y)<+\infty$ 下. 定义 k-步排它过程

$\eta_{\cdot}=(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $\{0,1\}^S$ 上的 Feller 过程,其无穷小母元 Ω_k 定义为

$$\Omega_k f(\eta)=\sum_{\eta(x)=1,\ \eta(y)=0} q_k(x,y;\eta)[f(\eta_{xy})-f(\eta)] \tag{1}$$

这里 f 为任意柱函数,$\eta_{xy}(x)=\eta(y)$,$\eta_{xy}(y)=\eta(x)$,且 $\eta_{xy}(z)=\eta(z)$,$z\neq x,y$.

$\eta(x)=1$ 表示组态 η 在 x 位置上有一粒子; $\eta(x)=0$ 表示组态 η 在 x 位置上是空的.

$q_k(x,y;\eta)=E^x[\prod_{i=1}^{\sigma_y-1}\eta(X_i);\sigma_y\leqslant\sigma_x,\sigma_y\leqslant k]$ 为组态 η 从 x 运动到 y 上的速率. $\sigma_y=\inf\{n>1: X_n=y\}$ 为初始位置在 x,首次达到 y 的时刻.

---

① 收稿日期: 2015-11-22
基金项目: 全国统计科学研究计划重点项目(2013LZ17); 安徽省高等学校省级自然科学研究项目(KJ2010B345).
作者简介: 徐　静(1963-),男,安徽芜湖人,副教授,主要从事概率论与数理统计研究.

由 Hille-Yosida's定理，Ω_k 的闭包在$C(X)$上可以定义一个连续马氏半群 $S_k(t)$，它相应于一个 k-步排它过程$(\eta_t)_{t\geqslant 0}$. 这里，$C(X)$ 为 $X=\{0,1\}^S$ 上的连续函数类.

k-步排它过程$(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ 速率也可以表示为 $\forall x.\ y\in S,\ \eta\in X$

$$q_k(x,y;\eta)=p(x,y)+\sum_{z\neq x,y}p(x,z)p(z,y)\eta(z)+\cdots \tag{2}$$

设 P 是 X 上概率测度的全体，当 $S=Z^d$ 时，S 表示为 P 上平移不变的测度的全体.

对每个 $\mu\in P$.

定义 $\mu S_k(t)$ 的概率测度为

$$\int f du S_k(t)=\int S_k(t) f du \qquad f\in C(X)$$

设 D 为 $X=\{0,1\}^S$ 上的柱函数全体，I_k 表示 k-步排它过程不变概率测度集，即

$$I_k=\{\mu\in P:\mu S_k(t)=\mu\ \ \forall f\in D\}=\{\mu\in P:\int\Omega_k f du=0\quad\forall f\in D\} \tag{3}$$

令 ρ: $S\to[0,1]$，v_ρ 表示乘积测度：$\nu_\rho\{\eta(x_i)=1,1\leqslant i\leqslant n\}=\prod_{i=1}^{n}\rho(x_i)$

这里，$n=1,2,\cdots$，$x_i\in S\ 1\leqslant i\leqslant n$

1 主要结果

定义 1 如果 $p(\cdot,\cdot)$ 满足：$\sum_x p(x,y)=1\quad\forall y\in S$，则称 $p(\cdot,\cdot)$ 具有双随机性.

对于简单排它过程[2]：对任意常数 $\rho\in[0,1]$，$p(\cdot,\cdot)$ 具有双随机性，则 $v_\rho\in I_1$.

对于 k-步排它过程[4]：任意 k，(a) 若 $p(\cdot,\cdot)$ 是关于 π 可逆的，则 $v_\rho\in I_k$；(b) 若 $p(x,y)=p(0,y-x)$，任意 $x,y\in Z^d$，则对任意常数 $\rho\in[0,1]$，$v_\rho\in I_k$

如果 2-步排它过程是紧邻的，即：若 $y=x+1$，则 $p(x,y)=p_x$；若 $y=x-1$，则 $p(x,y)=q_x$；若其他情形，则 $p(x,y)=0$.

其中，$p_x+q_x=1(0\leqslant p_x\leqslant 1)$，$\forall x,y\in Z$，于是我们有：

定理 2 设 2-步排它过程是紧邻的，若 $p_{x-1}=p_{x+1}$，$\forall x\in Z$，则对任意常数 $\rho\in[0,1]$，有 $\nu_\rho\in I_2$

证 对于 2-步紧邻排它过程，由 $p_{x-1}=p_{x+1}$，$\forall x\in Z$，易知 $p(\cdot,\cdot)$ 满足双随机性.

若 $p_x=p_{x+1}$，则有平移不变测度.

现设 $p_x\neq p_{x+1}$ 不妨取 $p_x=\alpha\qquad p_{x+1}=\beta(\alpha\neq\beta)\qquad\forall x\in Z$

令 $f(\eta)=\begin{cases}1 & \text{如果 } \eta(x)=1\quad\forall x\in A\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$ 　　这里 $A\subset Y\quad|A|=n$

由式(3)可得，只要证$\int\Omega_2 f(\eta)dv_\rho=0$即可. 事实上，由式(1)、式(2)，常数$\rho\in[0,1]$ $v_\rho\{\eta:\eta(x)=1\}=\rho$ 并注意到紧邻性，我们有

$$\begin{aligned}&\int\Omega_2 f(\eta)dv_\rho=\sum_{x,y}\int q_2(x,y;\eta)\eta(x)(1-\eta(y)[f(\eta_{xy})-f(\eta)]dv_\rho=\\&\rho^n(1-\rho)\{[\sum_{x\notin A}\sum_{y\in A}p(x,y)-\sum_{x\in A}\sum_{y\notin A}p(x,y)]+\\&[\sum_{x\notin A}\sum_{z=y\pm1\in A}\sum_{y\in A}p(x,z)p(z,y)-\sum_{x\in A}\sum_{z=x\pm1\in A}\sum_{y\notin A}p(x,z)p(z,y)]+\\&\rho[\sum_{x\notin A}\sum_{z=y\pm1\notin A}\sum_{y\in A}p(x,z)p(z,y)-\sum_{x\in A}\sum_{z=x\pm1\notin A}\sum_{y\notin A}p(x,z)p(z,y)]\}\end{aligned}$$

下面，我们只需要证下列 3 式为 0 即可.

$$\sum_{x\notin A}\sum_{y\in A}p(x,y)-\sum_{x\in A}\sum_{y\notin A}p(x,y)$$

$$\sum_{x\notin A}\sum_{z=y\pm1\in A}\sum_{y\in A}p(x,z)p(z,x)-\sum_{x\in A}\sum_{z=x\pm1\in A}\sum_{y\notin A}p(x,z)p(z,y)$$

$$\sum_{x\notin A}\sum_{z=y\pm1\notin A}\sum_{y\in A}p(x,z)p(z,y)-\sum_{x\in A}\sum_{z=y\pm1\notin A}\sum_{y\notin A}p(x,z)p(z,y)$$

由简单排它过程 $p(x,y)$ 双随机性可知，第 1 式的值等于 0.

下证第 2 式的值也为零，事实上，第 2 式的值

$$\sum_{x\notin A}\sum_{y\in A}\{p(x,y+1)p(y+1,y)+p(x,y-1)p(y-1,y)\}-$$

$$\sum_{x\in A}\sum_{y\notin A}\{x,x+1)p(x+1,y)+p(x,x-1)p(x-1,y)\}=$$

$$\sum_{y\in A}\{p(x,y+1)q_{y+1}+p(x,y-1)p_{y-1}\}-$$

$$\sum_{x\in A}\{p_xp(x+1,x+2))+q_xp(x-1,x-2)\}=$$

$$\sum_{y\in A}\{q_{y+2}q_{y+1}+p_{y-2}p_{y-1}\}-\sum_{x\in A}\{p_xp_{x+1}+q_xq_{x-1}\}=$$

$$\sum_{y\in A}\{(1-\alpha)(1-\beta)+\alpha\beta\}-\sum_{x\in A}\{\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)\}=0$$

同理可证第 3 式的值也等于 0. 于是定理获证.

对于非紧邻的 2 -步排它过程，设

$$p(x,y)=\begin{cases}p_x & y=x+1\\ q_x & y=x-1\\ r_x & y=x-2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\quad \text{其中 } p_x+q_x+r_x=1,\ 0\leqslant p_x,q_x,r_x\leqslant 1$$

则有

定理 3　2 -步非紧邻排它过程中，若 $r_x=r(\neq 0)$，$p_{x-1}=p_{x+1}$，$\forall x\in Z$，则对任意常数 $\rho\in[0,1]$　　$v_\rho\in I_2$

证　对于 2 -步非紧邻排它过程，若 $r_x=r(\neq 0)$，$p_{x-1}=p_{x+1}$，$\forall x\in Z$，易知 $p(x,y)$ 满足双随机性.

现设 $p_x\neq p_{x+1}$　　不妨取 $p_x=\alpha$　　$p_{x+1}=\beta(\alpha\neq\beta)$　　$\forall x\in Z$

对于常数 $\rho\in[0,1]$　　$v_\rho\{\eta:\eta(x)=1\}=\rho$，令：

$$f(\eta)=\begin{cases}1 & \text{如果 } \eta(x)=1\quad \forall x\in A\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\qquad \text{这里 } A\subset Y\ |A|=n$$

下证 $\int\Omega_2f(\eta)dv_\rho=0$. 事实上，由式(1),式(2)，并注意到常数 $\rho\in[0,1]$　$v_\rho\{\eta:\eta(x)=1\}=\rho$，我们有

$$\int\Omega_2f(\eta)dv_\rho=\sum_{x,y}\int q_2(x,y;\eta)\eta(x)(1-\eta(y)[f(\eta_{xy)})-f(\eta)]dv_\rho=$$

$$\rho^n(1-\rho)\{[\sum_{x\notin A}\sum_{y\in A}p(x,y)-\sum_{x\in A}\sum_{y\notin A}p(x,y)]+$$

$$[\sum_{x\notin A}\sum_{y\in A}\sum_{z\in A\backslash\{y\}}p(x,z)p(z,y)-\sum_{x\in A}\sum_{y\notin A}\sum_{z\in A\backslash\{x\}}p(x,z)p(z,y)]+$$

$$\rho[\sum_{x\notin A}\sum_{y\in A}\sum_{z\notin A}p(x,z)p(z,y)-\sum_{x\in A}\sum_{y\notin A}\sum_{z\notin A}p(x,z)p(z,y)]\}$$

由简单排它过程[2] 可知，第 1 个方括号的值为 0.

下证第 2 个方括号的值为 0，事实上，第 2 个方括号的值

$$\sum_{x\notin A}\sum_{y\in A}\sum_{z\in A\backslash\{y\}}p(x,z)p(z,y)-\sum_{x\in A}\sum_{y\notin A}\sum_{z\in A\backslash\{x\}}p(x,z)p(z,y)=$$

$$\sum_{x\notin A}\sum_{y\in A}\{p(x,y+1)p(y+1,y)+p(x,y+2)p(y+2,y)+p(x,y-1)p(y-1,y)\}-$$

$$\sum_{x\in A}\sum_{y\notin A}\{p(x,x+1)p(x+1,y)+p(x,x-1)p(x-1,y)+p(x,x-2)p(x-2,y)\}=$$

$$\sum_{y\in A}\{p(y+2,y+1)p(y+1,y)+p(y+3,y+1)p(y+1,y)+$$
$$p(y+4,y+2)p(y+2,y)+p(y+1,y+2)p(y+2,y)+p(y+3,y+2)p(y+2,y)+$$
$$p(y+1,y-1)p(y-1,y))\}+p(y-2,y-1)p(y-1,y))\}-$$
$$\sum_{x\in A}\{p(x,x+1)p(x+1,x+2)+p(x,x+1)p(x+1,x-1)+$$
$$p(x,x-1)p(x-1,x-2)+p(x,x-1)p(x-1,x-3)+p(x,x-2)p(x-2,x-3)+$$
$$p(x,x-2)p(x-2,x-4)+p(x,x-2)p(x-2,x-1)\}=$$
$$\sum_{y\in A}\{(1-\alpha-r)(1-\beta-r)+\alpha\beta-r^2+2r\}-\sum_{x\in A}\{\alpha\beta+(1-\alpha-r)(1-\beta-r)-r^2+2r\}=0$$

同理可证第3个方括号的值也为0. 于是定理获证.

参考文献:

[1] SPITZER F. Interaction of Markov Processes [J]. Adv Math, 1970, 5(2): 246-290.

[2] LIGGETT T M. Interacting Particle Systems [M]. New York: Springer, 1985.

[3] ANDJEL E D. The Asymmetric Simple Exclusion Process on Z d [J]. Zeitschrift Für Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete, 1981, 58(58): 423-432.

[4] GUIOL H. Some Properties of *k*-step Exclusion Process [J]. J Stat Phys, 1999, 94(3/4): 495-511.

On a Class of Invariant Measure for Exclusion Processes

XU Jing

College of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu Anhui 241000, China

Abstract: In the paper, A class of invariance of the product measure with constant densities on condition doubly stochastic for 2-step exclusion processes has been studied.

Key words: simple exclusion processes; 2-step exclusion processes; Invariant measure

责任编辑 夏 娟