DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2017.02.001

数论函数方程 $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}$ 的奇数解①

张 四 保

喀什大学 数学与统计学院，新疆 喀什 844008

摘要： 讨论了方程 $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}$ 的可解问题，利用初等方法给出了当 n 为奇数时该方程的奇数解，确定了该方程共有 5 个奇数解，其中 $\omega(n)$ 为正整数 n 的不同质因数的个数.

关　键　词： Euler 函数；数论函数方程；奇数解

中图分类号：O156.2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000－5471(2017)02－0001－04

Euler 函数 $\varphi(n)$ 是定义在正整数 n 上的函数[1]．涉及 Euler 函数 $\varphi(n)$ 方程正整数解的研究是初等数论中非常重要和有意义的课题[2]，所得到的研究结论也很丰富[3-8]．

定义 $\omega(n)$ 为 n 的不同质因子的个数．对于包含函数 $\omega(n)$ 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程的整数解的讨论已有很多相关结果．如文献[9]讨论了方程 $\varphi(n)=2^{\omega(n)}$ 解的问题，给出了其有 $n=1,3,4,10,12,30$ 这 6 个正整数解；文献[10]讨论了方程 $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}$ 解的问题，给出了其所有的 20 个正整数解；文献[2]讨论了方程 $\varphi(\varphi(\varphi(n)))=2^{\omega(n)}$ 解的问题，给出了其所有的 59 个正整数解．

本文主要讨论数论函数方程 $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}$ 的可解问题，利用初等数学方法给出了该方程当 n 为奇数时的全部奇数解．

定理 1　当 n 为奇数时，数论函数方程

$$\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)} \tag{1}$$

只有奇数解 $n=1,19,27,133,171$．

证　当 $n=1$ 时，$\omega(1)=0$，从而有：

$$\varphi(\varphi(n))=1 \qquad 2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}=1$$

因而 $n=1$ 是方程(1)的解．下面讨论 $n>2$ 且为奇数的情况．现令 $n=\prod_{i=1}^{k}P_i^{l_i}$ 为奇数 n 的标准分解式，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 为互异奇质数，$l_i>0$，$i=1,2,\cdots,k$．此时，有

$$\varphi(\varphi(n))=\varphi\Big(\prod_{i=1}^{k}P_i^{l_i-1}\prod_{i=1}^{k}(P_i-1)\Big)=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}$$

若 $l_i(i=1,2,\cdots,k)$ 中有 j 个大于等于 2，不妨假设 $l_1\geqslant 2$，$l_2\geqslant 2$，…，$l_j\geqslant 2$，则有

$$\varphi(\varphi(n))=\prod_{i=1}^{j}P_i^{l_i-2}\prod_{i=1}^{j}(P_i-1)\varphi\Big(\prod_{i=1}^{k}(P_i-1)\Big)=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}$$

因而在 $l_i(i=1,2,\cdots,k)$ 中有且仅有 1 个可能大于等于 3，否则方程(1)无解．此时，$\omega(n)=k$，下面对 k 的值分情况讨论：

情况 1　当 $k=1$ 时，此时：

$$n=P^l \qquad \omega(n)=1$$

---

① 收稿日期：2016－03－19

基金项目：新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2016D01A014)．

作者简介：张四保(1978－)，男，江西峡江人，副教授，主要从事数论的研究．

由方程(1)有

$$\varphi(\varphi(P^{l}))=\varphi(P^{l-1}(P-1))=2\times 3$$

当 $l=1$ 时，有

$$\varphi(P-1)=2\times 3$$

由于方程 $\varphi(y)=6$ 只有解 $y=7,9,14,18$，因而有 $P-1=7,9,14,18$，从而 $n=P=19$ 是方程(1)的解.

当 $l=2$ 时，有

$$(P-1)\varphi(P-1)=2\times 3$$

令 $X=P-1$，则 $X\varphi(X)=2\times 3$. 由于当 $y>2$ 时有 $\varphi(y)<y$，所以

$$\varphi^{2}(X)<X\varphi(X)<X^{2}$$

从而 $\varphi(X)<\sqrt{6}$，$X>\sqrt{6}$，因而只有 $\varphi(X)=2$，可得 $X=3,4,6$. 结合 $X\varphi(X)=2\times 3$，有 $X=3$. 从而 $P=4$ 不符合，因而此时方程(1)无解.

当 $l=3$ 时，有

$$P(P-1)\varphi(P-1)=2\times 3$$

此时，有 $P=3$. 因而 $n=P^{3}=27$ 是方程(1)的解.

当 $l\geqslant 4$ 时，有

$$P^{l-2}(P-1)\varphi(P-1)=2\times 3$$

此时 $P^{l-2}>2\times 3$，因而此时方程(1)无解.

情况 2 当 $k=2$ 时，此时：

$$n=P_1^{l_1}P_2^{l_2}\qquad \omega(n)=2$$

由方程(1)有

$$\varphi(\varphi(P_1^{l_1}P_2^{l_2}))=\varphi(P_1^{l_1-1}P_2^{l_2-1}(P_1-1)(P_2-1))=2^{2}\times 3^{2}\tag{2}$$

当 $l_1=l_2=1$ 时，由(2)式有

$$\varphi((P_1-1)(P_2-1))=2^{2}\times 3^{2}$$

令

$$(P_1-1)(P_2-1)=2^{\alpha}\prod_{j=1}^{s}q_j^{\beta_j}$$

其中 $\alpha\geqslant 2$，$q_1,q_2,\cdots,q_s$ 为互异奇质数，从而有

$$2^{\alpha-1}\prod_{j=1}^{s}q_j^{\beta_j-1}\prod_{j=1}^{s}(q_j-1)=2^{2}\times 3^{2}$$

由此可得 $s=1$，$\alpha=2$，$\beta_1=3$，$q_1=3$. 因而

$$(P_1-1)(P_2-1)=2^{2}\times 3^{3}$$

从而 $P_1=7$，$P_2=19$ 或者 $P_1=19$，$P_2=7$. 从而 $n=7\times 19=133$ 是方程(1)的解.

当 $l_1=1$，$l_2=2$ 时，由(2)式有

$$\varphi(\varphi(P_1P_2^{2}))=\varphi(P_2(P_1-1)(P_2-1))=2^{2}\times 3^{2}$$

令

$$P_2(P_1-1)(P_2-1)=2^{\alpha}\prod_{j=1}^{t}q_j^{\delta_j}$$

其中 $\alpha\geqslant 2$，$q_1,q_2,\cdots,q_s$ 为互异奇质数，从而有

$$2^{\alpha-1}\prod_{j=1}^{t}q_j^{\delta_j-1}\prod_{j=1}^{t}(q_j-1)=2^{2}\times 3^{2}\tag{3}$$

由于 δ_i 中至少有 1 项大于等于 1，则在(3)式中至少有 1 项为 q_j-1. 再由于 $\alpha-1\geqslant 1$，由(3)式有

$$2^{\alpha-2}\frac{q_1-1}{2}\prod_{j=1}^{t}q_j^{\delta_j-1}\prod_{j=2}^{t}(q_j-1)=3^{2}$$

由此可得 $t=1$，$\alpha=2$，$\delta_1=3$，$q_1=3$. 因而

$$P_2(P_1-1)(P_2-1)=2^{2}\times 3^{3}$$

由于 P_2 为奇质数，从而 $P_2=3$，$P_1=19$. 从而 $n=3^2\times19=171$ 是方程(1) 的解. 同理，当 $l_1=2$，$l_2=1$ 时，方程(1) 有解 $n=3^2\times19=171$.

当 $l_1=1$，$l_2=3$ 时，由(2) 式有

$$\varphi(\varphi(P_1P_2^3))=P_2(P_2-1)\varphi((P_1-1)(P_2-1))=2^2\times3^2$$

由此可知，$P_2=3$，而奇质数 P_1 不存在，从而此时方程(1) 无解. 同理，当 $l_1=3$，$l_2=1$ 时，当 $l_1=1$，$l_2\geqslant4$ 时，当 $l_1\geqslant4$，$l_2=1$ 时，方程(1) 都无解.

当 $l_1=2$，$l_2=2$ 时，由(2) 式有

$$\varphi(\varphi(P_1^2P_2^2))=(P_1-1)(P_2-1)\varphi((P_1-1)(P_2-1))=2^2\times3^2$$

令$(P_1-1)(P_2-1)=Y$，则有 $Y\varphi(Y)=36$. 由于当 $y>2$ 时有 $\varphi(y)<y$，所以有

$$\varphi^2(Y)<Y\varphi(Y)<Y^2$$

从而 $\varphi(Y)<6$，$Y>6$，因而只有 $\varphi(Y)=4$. 由于方程 $\varphi(y)=4$ 只有解 $y=5,8,10,12$，所以有 $Y=8,10,12$. 从而有 $P_1=3$，$P_2=5$，或者 $P_1=3$，$P_2=7$，或者 $P_1=5$，$P_2=3$，或者 $P_1=7$，$P_2=3$，但是这 4 组值并不满足方程(1)，因而此时方程(1) 无解.

当 $l_1=2$，$l_2=3$ 时，由(2) 式有

$$\varphi(\varphi(P_1^2P_2^3))=P_2(P_1-1)(P_2-1)\varphi((P_1-1)(P_2-1))=2^2\times3^2$$

从而 $P_2=3$，则有

$$\frac{P_1-1}{2}\varphi(2(P_1-1))=3$$

这是不可能的，因而此时方程(1) 无解. 同理，当 $l_1=3$，$l_2=2$ 时，方程(1) 无解.

当 $l_1=2$，$l_2\geqslant4$ 时，由(2) 式有

$$\varphi(\varphi(P_1^2P_2^4))=P_2^2(P_1-1)(P_2-1)\varphi((P_1-1)(P_2-1))=2^2\times3^2$$

显然此时方程(1) 无解. 同理，当 $l_1\geqslant4$，$l_2=2$ 时，方程(1) 无解.

情况 3　当 $k=3$ 时，此时：

$$n=P_1^{l_1}P_2^{l_2}P_3^{l_3}\qquad\omega(n)=3$$

由方程(1) 有

$$\varphi\Big(\varphi\Big(\prod_{i=1}^{3}P_i^{l_i}\Big)\Big)=\varphi\Big(\prod_{i=1}^{3}P_i^{l_i-1}\prod_{i=1}^{3}(P_i-1)\Big)=2^3\times3^3$$

令

$$\prod_{i=1}^{3}P_i^{l_i-1}\prod_{i=1}^{3}(P_i-1)=2^\alpha\prod_{j=1}^{h}q_j^{\lambda_j}$$

其中 $\alpha\geqslant3$，$q_1,q_2,\cdots,q_h$ 为互异奇质数，从而有

$$2^{\alpha-3}\frac{q_1-1}{2}\prod_{j=1}^{h}q_j^{\lambda_j-1}\prod_{j=2}^{h}(q_j-1)=3^3$$

从而有 $\alpha=3$，$h=1$，$q_1=3$，$\lambda_1=4$，因而有

$$\prod_{i=1}^{3}P_i^{l_i-1}\prod_{i=1}^{3}\frac{P_i-1}{2}=3^4\tag{4}$$

要使得(4) 式成立，则$\frac{P_1-1}{2}$，$\frac{P_2-1}{2}$，$\frac{P_3-1}{2}$ 都必须是 3^β 形式的正整数. 就$\frac{P_1-1}{2}$，$\frac{P_2-1}{2}$，$\frac{P_3-1}{2}$ 而言，由对称性以及 P_1,P_2,P_3 为不同的奇质数，因而只需考虑$\frac{P_1-1}{2}=1$，$\frac{P_2-1}{2}=3$，$\frac{P_3-1}{2}=3^3$，此时 $P_3=55$ 不是质数，因而此时方程(1) 无解.

情况 4　当 $k\geqslant4$ 时，此时：

$$n=\prod_{i=1}^{k}P_i^{l_i}\qquad\omega(n)=k$$

由方程(1) 有

$$\varphi(\varphi(n))=\varphi\Big(\prod_{i=1}^{k}P_i^{l_i-1}\prod_{i=1}^{k}(P_i-1)\Big)=2^k3^k$$

令

$$\prod_{i=1}^{k}P_i^{l_i-1}\prod_{i=1}^{k}(P_i-1)=2^{\alpha}\prod_{j=1}^{r}q_j^{\gamma_j}$$

其中 $\alpha\geqslant k$，$q_1,q_2,\cdots,q_r$ 为互异奇质数，从而有

$$2^{\alpha-k}\frac{q_1-1}{2}\prod_{j=1}^{r}q_j^{\gamma_j-1}\prod_{j=2}^{r}(q_j-1)=3^k$$

从而有 $\alpha=k$，$r=1$，$q_1=3$，$\gamma_1=k+1$，因而有

$$\prod_{i=1}^{k}P_i^{l_i-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{P_i-1}{2}=3^{k+1}$$

此时，$\frac{P_i-1}{2}(i=1,2,\cdots,k)$ 都必须是 3^{β} 形式的正整数，且

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{P_i-1}{2}>3^0\times3^1\times3^2\times\cdots\times3^{k-1}=3^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

而当 $k\geqslant4$ 时，$\frac{k(k-1)}{2}>k+1$，因而此时方程(1)无解.

综上所述，方程(1)只有奇数解 $n=1,19,27,133,171$.

参考文献：

[1] 闵嗣鹤，严士健. 初等数论 [M]. 3版. 北京：高等教育出版社，2009：58.

[2] 陈国慧. 一个包含Euler函数的方程 [J]. 纯粹数学与应用数学，2007，23(4)：439－445.

[3] 许 霞，徐小凡. 关于欧拉方程 $\varphi(ab)=2^k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：6－9.

[4] 张四保，席小忠. 有关方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解 [J]. 南京师大学报(自然科学版)，2016，39(1)：41－47.

[5] 陈 斌. 一类包含Smarandache函数的条件方程的可解性问题 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(8)：71－75.

[6] 张四保，刘启宽. 关于Euler函数一个方程的正整数解 [J]. 东北师大学报(自然科学版)，2015，47(3)：49－54.

[7] 田呈亮，付 静，白维祖. 一个包含欧拉函数的方程 [J]. 纯粹数学与应用数学，2010，26(1)：96－98.

[8] 孙翠芳，程 智. 若干包含Euler函数 $\varphi(n)$ 的方程 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2012，50(5)：859－862.

[9] 吕志宏. 两个数论函数及其方程 [J]. 纯粹数学与应用数学，2006，22(3)：303－306.

[10] 吕志宏. 一个包含Euler函数的方程 [J]. 西北大学学报(自然科学版)，2006，36(1)：17－20.

On Odd Integer Solutions of Arithmetic Functional Equation $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}$

ZHANG Si-bao

School of Mathematics and Statistics, Kashgar University, Kashgar Xinjiang 844008, China

Abstract: The solvability of equation $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}$ has been discussed, and the all odd solutions of it also been obtained in elementary methods when n is an odd. Finally, that the equation has 5 odd integer solutions has been identified, where $\omega(n)$ denotes the number of all different prime divisors of n.

Key words: Euler function; arithmetic functional equation; odd integer solution

责任编辑 廖 坤