第 42 卷　第 2 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2017 年 2 月
Vol. 42　No. 2　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Feb. 2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.02.002

关于不定方程 $7x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ [①]

张　配，　罗　明

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要运用 Pell 方程、递推序列、同余式及(非)平方剩余等一些初等的证明方法，对不定方程

$$7x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$$

的解进行了研究. 证明出该不定方程仅有正整数解 $(x,y)=(8,7)$，同时得出了这个不定方程的全部整数解，它们是：$(0,0)$，$(-3,0)$，$(-2,0)$，$(-1,0)$，$(0,-3)$，$(-3,-3)$，$(-2,-3)$，$(-1,-3)$，$(8,7)$，$(-11,7)$，$(8,-10)$，$(-11,-10)$.

关　键　词： 不定方程；整数解；递归序列；平方剩余

中图分类号： O156.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2017)02-0005-05

当 $(p,q)=1(p,q\in\mathbb{N}_+)$ 时，对形如

$$px(x+1)(x+2)(x+3)=qy(y+1)(y+2)(y+3)$$

的不定方程已有不少研究工作[1-10]. 在本文中，我们将证明当 $(p,q)=(7,11)$ 时，不定方程

$$7x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

仅有正整数解 $(x,y)=(8,7)$.

先将方程(1)化为

$$[7(x^2+3x+1)]^2-77(y^2+3y+1)^2=-28 \tag{2}$$

易知方程 $x^2-77y^2=-28$ 的全部整数解[1]，由以下两个类给出：

$$x_n+y_n\sqrt{77}=\pm(7+\sqrt{77})(u_n+v_n\sqrt{77})=\pm(7+\sqrt{77})(351+40\sqrt{77})^n \qquad n\in\mathbb{N}_+$$

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{77}=\pm(-7+\sqrt{77})(u_n+v_n\sqrt{77})=\pm(-7+\sqrt{77})(351+40\sqrt{77})^n \qquad n\in\mathbb{N}_+$$

其中 $7+\sqrt{77}$ 是 $x^2-77y^2=-28$ 的最小正整数解，$351+40\sqrt{77}$ 是 Pell 方程 $u^2-77v^2=1$ 的基本解. 因为 $x_n+y_n\sqrt{77}$ 与 $\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{77}$ 是共轭的，易知 $\bar{y}_n=y_{-n}$，于是方程(2)的解应满足

$$(2y+3)^2=4y_n+5 \tag{3}$$

或

$$(2y+3)^2=-4y_n+5 \tag{4}$$

由(3)，(4)式不难推出下列关系式：

① 收稿日期：2016-09-16
基金项目：国家自然科学基金项目(11471265).
作者简介：张　配(1990-)，女，河南周口人，硕士研究生，主要从事代数数论的研究.

$$y_{n+1}=702y_n-y_{n-1} \qquad y_0=1,\ y_1=631 \tag{5}$$

$$u_{n+1}=702u_n-u_{n-1} \qquad u_0=1,\ u_1=351 \tag{6}$$

$$v_{n+1}=702v_n-v_{n-1} \qquad v_0=0,\ v_1=40 \tag{7}$$

$$u_{2n}=u_n^2+77v_n^2=2u_n^2-1 \qquad v_{2n}=2u_nv_n \tag{8}$$

$$y_n=u_n+7v_n \tag{9}$$

$$u_{n+2km}\equiv(-1)^k u_n \pmod{u_m} \tag{10}$$

$$v_{n+2km}\equiv(-1)^k v_n \pmod{u_m} \tag{11}$$

$$y_{n+2km}\equiv(-1)^k y_n \pmod{u_m} \tag{12}$$

下面将证明(3)式仅当 $n=0,-1$ 时成立，由此求得方程(2)的全部整数解，进而求得方程(1)的全部正整数解.

1 $(2y+3)^2=4y_n+5$ 的解

本节将考察(3)式的解，即 n 取何值时 $4y_n+5$ 为完全平方数.

引理 1 设 $2\mid m$，$m>0$，则 $\left(\dfrac{\pm 28v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\dfrac{5u_m\pm 28v_m}{301}\right)$.

证 由(9)式知 $2\nmid u_m$，所以有：

$$u_{2m}\equiv 2u_m^2-1\equiv 1 \pmod 8$$

$$\left(\frac{-1}{u_{2m}}\right)=1 \qquad \left(\frac{2}{u_{2m}}\right)=1$$

因为 $2\mid m$，有 $u_m\equiv 1 \pmod 4$，则 $\left(\dfrac{-1}{u_m}\right)=1$，则 $\left(\dfrac{-1}{u_{2m}}\right)=1$. 由(9)式，可推知

$$\left(\frac{\pm 28v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\pm 56u_mv_m+10u_m^2}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{u_m}{u_{2m}}\right)\left(\frac{\pm 28v_m+5u_m}{u_{2m}}\right)=$$
$$\left(\frac{u_{2m}}{u_m}\right)\left(\frac{u_{2m}}{\pm 28v_m+5u_m}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{77v_m^2+u_m^2}{\pm 28v_m+5u_m}\right)=$$
$$\left(\frac{2\ 709}{\pm 28v_m+5u_m}\right)=\left(\frac{9}{\pm 28v_m+5u_m}\right)\left(\frac{301}{\pm 28v_m+5u_m}\right)=$$
$$\left(\frac{\pm 28v_m+5u_m}{301}\right)$$

引理 2 若(3)式成立，则 $n\equiv 0,-1 \pmod{900}$.

证 用对序列 $\{4y_n+5\}$ 取模的方法证明.

mod 29，排除 $n\equiv 4,7 \pmod{10}$，此时 $4y_n+5\equiv 11,3 \pmod{10}$，剩余 $n\equiv 0,1,2,3,5,6,8,9 \pmod{10}$.

mod 71，排除 $n\equiv 1,2 \pmod{10}$，剩余 $n\equiv 0,3,5,6,8,9 \pmod{10}$.

mod 239，排除 $n\equiv 3,8 \pmod{10}$，剩余 $n\equiv 0,5,6,9 \pmod{10}$.

mod 61，排除 $n\equiv 5,6,9,15 \pmod{20}$，剩余 $n\equiv 0,10,16,19 \pmod{20}$.

mod 101，排除 $n\equiv 16 \pmod{20}$，剩余 $n\equiv 0,10,19 \pmod{20}$.

下面用计算排除 $n\equiv 10 \pmod{20}$. 令 $n=20t+10$. 若 $2\mid t$，则 $n\equiv 2 \pmod 8$；若 $2\nmid t$，则 $n\equiv 6 \pmod 8$.

mod 79，排除 $n\equiv 2 \pmod 8$，mod 3 119，排除 $n\equiv 6 \pmod 8$，剩余 $n\equiv 0,19 \pmod{20}$.

mod 9 601，排除 $n\equiv 19,40,59,60,80 \pmod{100}$，剩余 $n\equiv 0,39,79,99 \pmod{100}$.

mod 401，排除 $n\equiv 14 \pmod{25}$，因此排除 $n\equiv 39 \pmod{100}$.

mod 149，排除 $n\equiv 29 \pmod{50}$，因此排除 $n\equiv 79 \pmod{100}$，剩余 $n\equiv 0,20,99 \pmod{100}$.

mod 269，排除 $n\equiv 1,3,4,6,7,9,10,11,13 \pmod{15}$.

mod 5 851，排除 $n\equiv 2,5,8 \pmod{15}$，剩余 $n\equiv 0,12,14 \pmod{15}$.

mod 271，排除 $n\equiv 15\pmod{45}$，剩余 $n\equiv 0,12,14,27,29,30,42,44\pmod{45}$.

mod 811，排除 $n\equiv 12,45,57,72,74,75,90,119,132\pmod{135}$，剩余 $n\equiv 0,14,27,29,30,42,44,59,87,89,102,104,117,120,134\pmod{135}$.

mod 1 621，排除 $n\equiv 14,44,87,89,102,120\pmod{135}$，剩余 $n\equiv 0,27,29,30,42,59,104,117,134\pmod{135}$.

mod 27 539，排除 $n\equiv 27,30,59,117\pmod{135}$，剩余 $n\equiv 0,29,42,104,134\pmod{135}$.

mod 2 971，排除 $n\equiv 2\pmod{27}$，因此排除 $n\equiv 29\pmod{135}$，剩余 $n\equiv 0,42,104,134\pmod{135}$.

综上所述，$n\equiv 0,-1\pmod{900}$.

引理 3　设 $n\equiv 0\pmod{900}$. 当 $n\neq 0$ 时，$4y_n+5$ 为非平方数；当 $n=0$ 时，$4y_n+5$ 为平方数.

证　令 $n=2\cdot k\cdot 3^2\cdot 5\cdot 2^t(t\geqslant 1,\ 2\nmid k)$. 对 $\{5u_n\pm 28v_n\}$ 取 mod 301，所得的两个剩余序列周期均为 11. 而对 $\{2^t\}$ 取 mod 11，剩余序列具有周期 10. 对 k 分两种情况讨论：

情况 1　$k\equiv 1\pmod 4$.

令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 1,2,3,4\pmod{10}\\ 3^2\cdot 2^t & t\equiv 5,6\pmod{10}\\ 5\cdot 2^t & t\equiv 0,7,8,9\pmod{10}\end{cases}$$

则当 $t(\geqslant 1)\pmod{10}=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 时，

$$m\pmod{11}=5,2,4,8,5,2,4,2,4,8$$

对应地有

$$\{5u_n+28v_n\}\pmod{301}=117,40,187,173,117,40,187,40,187,173$$

这些数均为模 301 的平方非剩余.

于是，由(9),(11) 式及引理 1，有

$$4y_n+5\equiv 4y_{2m}+5\equiv 28v_{2m}+5\pmod{u_{2m}}$$

得

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{28v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m+28v_m}{301}\right)=-1$$

从而 $4y_n+5$ 为非平方数，故这种情况下(3) 式不成立.

情况 2　$k\equiv -1\pmod 4$.

令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 6,7,8,9\pmod{10}\\ 3^2\cdot 2^t & t\equiv 0,1,2,3\pmod{10}\\ 5\cdot 2^t & t\equiv 4,5\pmod{10}\end{cases}$$

则当 $t(\geqslant 1)\pmod{10}=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 时，

$$m\pmod{11}=9,7,3,6,3,6,9,7,3,6$$

对应地有

$$\{5u_n-28v_n\}\pmod{301}=40,187,173,117,173,117,40,187,173,117$$

这些数均为模 301 的平方非剩余.

于是，由(9),(11) 式及引理 1，有

$$4y_n+5\equiv 4y_{2m}+5\equiv -28v_{2m}+5\pmod{u_{2m}}$$

得

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{28v_{2m}-5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m-28v_m}{301}\right)=-1$$

从而 $4y_n+5$ 为非平方数，故这种情况下(3) 式不成立.

当 $n=0$ 时，$4y_n+5=3^2$. 证毕.

引理 4 设 $n\equiv-1(\bmod 90)$，当 $n>-1$ 时，$4y_n+5$ 为非平方数.

证 设 $n=1+2\cdot 3^r m$，$r\geqslant 1$，$3\mid m$，$5\mid m$，则

$$m\equiv\pm 15,\pm 30(\bmod 32)$$

由(12) 式，有

$$4y_n+5\equiv-4y_{-1}+5\equiv-279(\bmod u_m)$$

得

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-279}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{31}\right)$$

对(7) 式取 mod 31 得一周期为 32 的序列. 由 $m\equiv\pm 15,\pm 30(\bmod 32)$ 得

$$u_m\equiv 21,13(\bmod 31)$$

均为 mod 31 的平方非剩余，故 $\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=-1$，矛盾. 从而 $4y_n+5$ 为非平方数.

当 $n=-1$ 时，$4y_n+5=17^2$. 证毕.

由引理 3 可得：

推论 1 设 $n\equiv-1(\bmod 900)$，且 $n>0$，则 $4y_n+5$ 为非平方数.

2 $(2y+3)^2=-4y_n+5$ 的解

引理 5 若(4) 式成立，则 $n=0$.

证 由(4) 式知

$$(2y_n+3)^2=-4y_n+5>0$$

由(5) 式知：当 $n\neq 0$ 时，$y_n>1$，从而负数不可能是完全平方数；当 $n=0$ 时，$-4y_n+5=1^2$，结论成立.

3 主要结果

根据前两节的讨论，现给出本文的主要结果：

定理 1 不定方程

$$7x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$$

仅有正整数解 $(x,y)=(8,7)$.

证 由引理 2、引理 3 知 $(2y+3)^2=4y_0+5=9$，因此 $y=0,-3$.

由引理 4、引理 5 知 $(2y+3)^2=4y_{-1}+5=289$，因此 $y=7,-10$.

由此，容易知道方程(1) 共有 12 组整数解. 其中有 8 组平凡解使得方程(1) 两端都为 0，即：$(0,0)$，$(-3,0)$，$(-2,0)$，$(-1,0)$，$(0,-3)$，$(-3,-3)$，$(-2,-3)$，$(-1,-3)$. 另外有 4 组非平凡解，它们是：$(8,7)$，$(-11,7)$，$(8,-10)$，$(-11,-10)$. 因此，不定方程

$$7x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$$

仅有正整数解 $(x,y)=(8,7)$. 证毕.

参考文献：

[1] 柯 召，孙 琦. 谈谈不定方程[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011：26－27.

[2] 宣体佐. 关于不定方程 $y(y+1)(y+2)(y+3)=5x(x+1)(x+2)(x+3)$ [J]. 北京师范大学学报(自然科学版)，

1982(3)：27－34.

[3] 罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(1+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1991，8(1)：1－8.

[4] 程　瑶，马玉林. 不定方程 $x(x+1)(1+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2007，24(3)：27－30.

[5] 段辉明，杨春德. 关于不定方程 $x(x+1)(1+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2009，32(1)：60－63.

[6] 罗　明，朱德辉，马芙蓉. 关于不定方程 $3x(x+1)(1+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2009，34(5)：16－21.

[7] 瞿云云，曹　慧，罗永贵，等. 关于不定方程 $x(x+1)(1+2)(x+3)=15y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(6)：9－14.

[8] 郭凤明，罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(1+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(10)：13－16.

[9] 张　洪，罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(1+2)(x+3)=Dy(y+1)(y+2)(y+3)$(其中 $D=21，23$) [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2015，32(7)：56－61.

[10] 林昌娜，罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(1+2)(x+3)=34y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：10－14.

On The Diophantine Equation $7x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$

ZHANG　Pei，　LUO　Ming

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，with the elementary method of Pell equations，recurrence sequence，congruent from and quadratic residue，the author has shown that the only solution in positive integers of the equation

$$7x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$$

is $(x, y)=(8, 7)$. At the same time，we obtained all integer solutions of the equation，they are：$(0, 0)$，$(-3, 0)$，$(-2, 0)$，$(-1, 0)$，$(0, -3)$，$(-3, -3)$，$(-2, -3)$，$(-1, -3)$，$(8, 7)$，$(-11, 7)$，$(8, -10)$，$(-11, -10)$.

Key words：diophantine equation；integer solution；recurrence sequence；quadratic remainder

责任编辑　廖　坤