

多维正态分布函数近似值的研究^①

江 伟^{1,2}, 奚 欢³

1. 广西贺州学院 人事处, 广西 贺州 542899;

2. 广西贺州学院 符号计算与工程数据处理重点实验室, 广西 贺州 542899;

3. 上海财经大学浙江学院 金融与统计系, 浙江 金华 321000

摘要: 运用矩阵的 Cholesky 分解技巧和全概率公式给出了高维正态分布函数的近似计算公式. 结果显示, 高维正态分布函数可用低维正态分布函数的加权值来近似. 该方法可推广到其它具有线性变换不变性的高维随机变量分布函数的计算. 最后, 给出了二维、三维和四维正态分布函数的计算实例, 并和 Cox 的相关结果作了比较.

关键词: 高维正态分布函数; Cholesky 分解; 全概率公式

中图分类号: O211.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2017)03-0001-06

在金融衍生品定价、风险管理和风险度量等方面经常会涉及到多维正态分布函数的计算^[1-3]. 由于多维正态分布函数没有解析解, 故学者们都尝试求解它的近似值, 常用到的方法有蒙特卡洛模拟和数值计算. 在前一种计算方法的研究过程中, 学者们主要通过减少随机数的样本方差来提高近似计算的精度, 如文献[4]通过协方差矩阵的 Cholesky 分解和重要抽样方法来减少计算误差; 文献[5]运用 GHK 和 RIS 模拟抽样方法来提高计算的精度和效率. 文献[6]则运用筛选抽样方法对多维正态分布函数进行估计, 该方法在维数很大时仍能得到高精度的结果. 在运用数值计算方法研究多维正态分布函数时, 学者们则通过转换积分形式、降低积分维数和蒙特卡洛模拟算法来提高计算的精度和效率, 如文献[7]用数学期望的泰勒展开式近似计算了二维和三维正态分布函数, 得到了比较精确的近似解. 文献[8-11]则分别用参变量积分法、球坐标变换法和分离变量法对高维正态分布函数进行了研究. 最近, 有学者以多维正态分布的分段禁忌优化算法为基础, 给每一阶段赋予不同的初始值, 对参数进行优化设置, 提高了多维连续函数解的精度^[12].

全概率公式将复杂事件的概率分解到互不相容的事件条件下进行求解, 有效地压缩复杂事件的讨论范围, 在统计应用中有着广泛的应用. 本文运用协方差矩阵的 Cholesky 分解和全概率公式给出了高维正态分布函数的近似计算公式, 该方法可推广到其它具有线性变换不变性的高维随机变量分布函数的计算过程中.

1 主要结果

考虑随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 即有密度函数

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n (\det(\boldsymbol{\Sigma}))}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (1)$$

① 收稿日期: 2015-07-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71271127), 贺州学院硕士点建设数学支撑学科自主课题(2016HZXYSX08); 贺州学院校级科研项目(2016ZC13).

作者简介: 江 伟(1972-), 男, 广西贺州人, 硕士, 讲师, 主要从事金融统计、金融数学的研究.

通信作者: 奚 欢, 理学硕士, 讲师.

其中: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, $\boldsymbol{\Sigma}$ 为 n 阶正定对称矩阵, $\det(\boldsymbol{\Sigma})$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 分别是它的行列式和逆矩阵. 设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 中第 i 行、第 j 列的元素为 $\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$, 则由多维正态分布的性质可知

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad (2)$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (3)$$

$$\rho_{ij} = \rho_{ji}, 1 \leq i, j \leq n \quad (4)$$

对任意 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 若 $\mu_i = 0$ 且 $\sigma_i = 1, 1 \leq i \leq n$, 则记 $\mathbf{X}$ 的分布函数为

$$F_n(\mathbf{x} | \boldsymbol{\Sigma}) \triangleq P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad (5)$$

否则, 记其分布函数为

$$G_n(\mathbf{x} | \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}) \triangleq P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad (6)$$

从而有下列定理:

定理 1 若 $\mu_i \neq 0$ 或 $\sigma_i \neq 1 (\sigma_i > 0), 1 \leq i \leq n$, 则

$$G_n(\mathbf{x} | \boldsymbol{\Sigma}) = F_n(\mathbf{y} | \boldsymbol{\Sigma}') \quad (7)$$

其中 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), y_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}, \boldsymbol{\Sigma}'$ 中第 i 行、第 j 列元素为 $\rho_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$.

定理 2 若 $\mu_i = 0$ 且 $\sigma_i = 1, 1 \leq i \leq n$, 则

$$F_n(\mathbf{x} | \boldsymbol{\Sigma}) \simeq \sum_{k=1}^m [\varphi(y_{k+1}) - \varphi(y_k)] F_{n-1}(\mathbf{Z}_k | \boldsymbol{\Omega}) \quad (8)$$

其中 $y_k = c + \frac{(x_1 - c)(k-1)}{m}, 1 \leq k \leq m+1, m \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\frac{x_1 - c}{m}$ 足够小, 且满足 $\varphi(c) \approx 0, \mathbf{z}_k = (z_{k,1}, \dots,$

$z_{k,n-1}), z_{k,i-1} = \frac{x_i - a_{i1}y_{k+1}}{\sqrt{b_i}}, b_i = \sum_{j=2}^i a_{ij}^2, i = 2, \dots, n, a_{ij}$ 为 n 阶下三角矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行、第 j 列元素, 满

足 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Omega}$ 为 $n-1$ 阶矩阵, 其第 i 行、第 j 列元素 $\rho'_{ij} = \frac{\sum_{k=2}^i a_{ik}a_{jk}}{\sqrt{b_i b_j}}, \varphi(x)$ 为标准正态分布函数.

引理 1 设随机向量 $\mathbf{X}$ 满足(1)式, 若 $\mu_i = 0$ 且 $\sigma_i = 1, 1 \leq i \leq n$, 则存在主对角元素全为正数的下三角矩阵 $\mathbf{A}$ 使得 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\Sigma}$, 且有

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(Z_1, \dots, Z_n)^T \quad (9)$$

其中 $Z_1, \dots, Z_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布.

证明: 因为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为正定的对称矩阵, 所以由 Cholesky 分解定理知, 存在唯一的主对角线元素都是正数的下三角矩阵 $\mathbf{A}$ 使得 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\Sigma}$. 此时, 若 $Z_1, \dots, Z_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布, 则由正态分布的线性不变性可知 $\mathbf{A}(Z_1, \dots, Z_n)^T$ 仍为正态随机向量, 且有

$$E(\mathbf{A}(Z_1, \dots, Z_n)^T) = \mathbf{A}(E(Z_1), \dots, E(Z_n))^T = (0, \dots, 0) \quad (10)$$

$$\text{Var}(\mathbf{A}(Z_1, \dots, Z_n)^T) = \mathbf{A}\text{Cov}((Z_1, \dots, Z_n)^T, (Z_1, \dots, Z_n))\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\Sigma} \quad (11)$$

从而结论得证.

定理 1 的证明:

若 $\mu_i \neq 0$ 或 $\sigma_i \neq 1 (\sigma_i > 0), 1 \leq i \leq n$, 则令 $Y_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}, 1 \leq i \leq n$. 此时, 由(2)和(3)式可知 $Y_i \sim N(0, 1), 1 \leq i \leq n$, 且有

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \rho_{ij}, 1 \leq i \neq j \leq n \quad (12)$$

另外, 由(6)式有分布函数

$$G_n(\mathbf{x} | \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}) \triangleq P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \leq \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \leq \frac{x_n - \mu_n}{\sigma_n}\right) =$$

$$P\left(Y_1 \leq \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \dots, Y_n \leq \frac{x_n - \mu_n}{\sigma_n}\right) \triangleq F_n(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\Sigma}') \quad (13)$$

其中: $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $y_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$, $\boldsymbol{\Sigma}'$ 中第 i 行、第 j 列元素为 ρ_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$.

从而定理 1 得证.

定理 2 的证明:

若 $\mu_i = 0$ 且 $\sigma_i = 1$, $1 \leq i \leq n$, 则由引理 1 知

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\Sigma}) &\triangleq P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \\ &P(\mathbf{A}(Z_1, \dots, Z_n)^T \leq \mathbf{x}) = \\ &P(Z_1 \leq x_1, \dots, \sum_{i=1}^k a_{ki} Z_i \leq x_k, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni} Z_i \leq x_n) = \\ &P\left(\sum_{j=1}^m (y_j < Z_1 \leq y_{j+1}) \cup (Z_1 \leq y_1), \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni} Z_i \leq x_n\right) = \\ &\sum_{j=1}^m P(y_j < Z_1 \leq y_{j+1}, \dots, \sum_{i=1}^k a_{ki} Z_i \leq x_k, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni} Z_i \leq x_n) + \\ &P(Z_1 \leq y_1, \dots, \sum_{i=1}^k a_{ki} Z_i \leq x_k, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni} Z_i \leq x_n) = \\ &\sum_{j=1}^m P\left(\sum_{i=1}^2 a_{2i} Z_i \leq x_2, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni} Z_i \leq x_n \mid y_j < Z_1 \leq y_{j+1}\right) P(y_j < Z_1 \leq y_{j+1}) + \\ &P(Z_1 \leq y_1, \dots, \sum_{i=1}^k a_{ki} Z_i \leq x_k, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni} Z_i \leq x_n) \triangleq \\ &p_1 + p_2 \end{aligned} \quad (14)$$

在(14)式推导过程中, 只须满足 $y_{m+1} = x_1$ 即可. 注意到, 当 $y_k = c + \frac{(x_1 - c)(k-1)}{m}$, $1 \leq k \leq m+1$,

$\varphi(c) \approx 0$, 且 $\frac{x_1 - c}{m}$ 足够小时

$$y_{m+1} = x_1, y_1 = c, p_2 \leq P(Z_1 \leq y_1) = \varphi(c) \approx 0 \quad (15)$$

另外, 在给定条件 $y_j \leq Z_1 \leq y_{j+1}$ 时

$$0 \leq |Z_1 - y_{j+1}| < \frac{x_1 - c}{m}$$

易知

$$P(Z_1 = y_{j+1}) = 1 \quad (16)$$

结合(14)式、(15)式和(16)式有

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\Sigma}) &\approx \sum_{k=1}^m P(a_{22} Z_2 \leq x_2 - a_{21} y_{k+1}, \dots, \sum_{i=2}^n a_{ni} Z_i \leq x_n - a_{n1} y_{k+1}) [\varphi(y_{k+1}) - \varphi(y_k)] = \\ &\sum_{k=1}^m F_{n-1}(\mathbf{z}_k \mid \boldsymbol{\Omega}) [\varphi(y_{k+1}) - \varphi(y_k)] \end{aligned} \quad (17)$$

在(17)式中, $\mathbf{z}_k = (z_{k,1}, \dots, z_{k,n-1})$, $z_{k,i-1} = \frac{x_i - a_{i1} y_{k+1}}{b_i}$, $b_i = \sum_{j=2}^i a_{ij}^2$, $i = 2, \dots, n$, a_{ij} 为 n 阶下三角矩

阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行、第 j 列元素, 满足 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\Omega}$ 为 $n-1$ 阶矩阵, 其第 i 行、第 j 列元素 $\rho'_{ij} = \frac{\sum_{k=2}^i a_{ik} a_{jk}}{\sqrt{b_i b_j}}$, $\varphi(x)$

为标准正态分布函数.

从而定理 2 得证.

2 数值计算

由定理 1 知, 多维正态分布函数都可转换成零均值、单位方差的多维正态分布函数, 故本节只考虑零均值、单位方差的多维正态分布函数的计算. 为了便于和 Cox 的结果^[1] 作比较, 首先将根据定理 2 给出 $L(a, b; \rho)$ 和 $L(a, b, c; \rho)$ 的计算结果, 数值分析结果如表 1、表 2 所示; 然后给出四维正态分布函数的计算结果, 数值分析结果见表 3, 其中四维正态分布的相关系数矩阵 Σ_1 和 Σ_2 如下:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.3 & 0.4 \\ 0.25 & 1 & 0.67 & 0.45 \\ 0.3 & 0.67 & 1 & 0.24 \\ 0.4 & 0.45 & 0.24 & 1 \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.26 & 0.35 & -0.45 \\ -0.26 & 1 & 0.45 & 0.65 \\ 0.35 & 0.45 & 1 & 0.35 \\ -0.45 & 0.65 & 0.35 & 1 \end{bmatrix}$$

3 结 论

通过比较表 1 和表 2 中的计算结果可以发现, 本文运用定理 2 计算出来的 $L(a, b; \rho)$ ($L(a, b; \rho) = P(X > a, Y > b)$, ρ 为随机变量 X 和 Y 的相关系数) 和 $L(a, b, c; \rho)$ ($L(a, b, c; \rho) = P(X > a, Y > b, Z > c)$, ρ 为随机变量 X, Y 和 Z 的相关系数矩阵) 近似值比文献[1] 的结果有更高的计算精度, 其中 $L(a, b; \rho)$ 的近似值在保留 4 位小数情况下和给出的精确值相同, $L(a, b, c; \rho)$ 的近似值和给出的精确值的误差小于 1‰. 另外, 由表 3 可知本文定理 2 计算出的四维正态分布函数和 Monte Carlo 模拟结果很接近, 误差较小. 最后, 由引理 1 和定理 2 的证明过程来看, 本文提出的方法可以推广到其它具有线性变换不变性的多维随机变量分布函数的计算过程中.

表 1 $L(a, b; \rho)$ 值计算表

ρ	(a, b)	$(0, 0)$	$(0, -\frac{1}{2})$	$(0, -1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(1, 1)$	$(1, \frac{1}{2})$	$(1, 0)$
0.2	exact	2 820	3 740	4 400	1 207	1 825	2 376	381	669	986
	Cox	2 820	3 740	4 400	1 207	1 825	2 376	381	669	986
	(8)	2 820	3 740	4 400	1 207	1 825	2 376	381	669	986
0.8	exact	3 976	4 692	4 944	2 186	2 778	3 022	976	1 351	1 531
	Cox	3 892	4 653	4 942	2 168	2 747	3 014	982	1 339	1 524
	(8)	3 976	4 692	4 944	2 186	2 778	3 022	976	1 351	1 531
0.9	exact	4 282	4 884	4 993	2 453	2 969	3 077	1 155	1 497	1 580
	Cox	4 096	4 900	4 997	2 326	2 953	3 079	1 116	1 478	1 579
	(8)	4 282	4 884	4 993	2 453	2 969	3 077	1 155	1 497	1 580

ρ	(a, b)	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, 1)$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(2, 2)$	$(2, \frac{3}{2})$	$(2, 1)$	$(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2}, 2)$	$(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$
0.2	exact	86	178	304	14	34	67	2	4	11
	Cox	86	178	304	14	34	67	2	4	11
	(8)	86	178	304	14	34	67	2	4	11
0.8	exact	349	530	631	98	165	209	22	41	55
	Cox	354	527	628	100	165	208	22	41	55
	(8)	349	530	631	98	165	209	22	41	55
0.9	exact	439	615	663	134	203	225	32	53	61
	Cox	435	605	663	135	200	225	32	53	61
	(8)	439	615	663	134	203	225	32	53	61

注: 1. exact 和 Cox 分别表示精确值和 Cox 计算值, (8)表示用文中(8)式计算值;

2. $L(a, b; \rho)$ 值均是放大 10000 倍的结果.

表 2 $L(a, b, c; \rho)$ 值计算表

(a, b, c)		$(2, 2, 2)$	$(2, 2, 1)$	$(2, 2, 0)$	$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 0)$	$(2, 1, -1)$	$(2, 0, 0)$	$(2, -1, -1)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 0)$	$(1, 1, -1)$
A	exact	62	96	98	195	208	209	227	228	742	968	976
	Cox	59	97	98	204	212	213	227	228	773	1 020	1 020
	(8)	64	101	106	201	216	213	234	231	746	974	980
B	exact	29	29	29	109	109	109	193	224	519	536	536
	Cox	28	29	29	109	109	109	193	224	530	532	532
	(8)	29	33	37	113	116	113	198	226	522	542	540

(a, b, c)		$(1, 0, 0)$	$(1, 0, -1)$	$(1, -1, -1)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, -1)$	$(0, 0, -2)$	$(-1, -1, -1)$	$(-1, -1, -2)$	$(-1, -2, -2)$	$(-2, -2, -2)$
A	exact	1 487	1 531	1 585	3 464	3 964	3 976	7 428	7 798	8 378	9 550
	Cox	1 536	1 553	1 586	3 881	4 278	4 282	8 158	8 244	8 412	7 969
	(8)	1 494	1 535	1 588	3 467	3 967	3 977	7 429	7 798	8 378	9 550
B	exact	1 178	1 179	1 520	3 053	3 155	3 155	7 209	7 362	8 291	9 515
	Cox	1 185	1 185	1 524	3 179	3 181	3 181	7 472	7 472	8 325	9 639
	(8)	1 183	1 183	1 522	3 055	3 158	3 156	7 210	7 363	8 291	9 515

注: 1. exact 和 Cox 分别表示精确值和 Cox 计算值, (8)表示用文中(8)式计算值;
2. A 中所有的相关系数都取 0.8, B 中 $\rho_{xy}=0.4$, $\rho_{xz}=\rho_{yz}=0.8$;
3. 表中各 $L(a, b, c; \rho)$ 值均是放大 10000 倍结果.

表 3 四维正态分布函数计算结果表

	a	b	c	d	(8)	MC		a	b	c	d	(8)	MC
Σ_1	-4 326	1 253	-11 465	11 892	613	614	Σ_1	-1 665.6	2 877	11 909	-376	321	321
	3 273	7 258	-1 364	593	2 141	2 147		1 746	-5 883	1 139	-956	1 282	1 284
	-1 867	21 832	10 668	-8 323	1 247	1 252		-4 326	11 909	-1 867	1 139	1 399	1 405
	-16 656	11 892	7 258	10 668	424	425		1 253	-376	-5 883	593	1 224	1 229
	2 877	3 273	21 832	-956	2 744	2 750		-11 465	1 746	-1 364	-8 323	350	351
Σ_2	-4 326	1 253	-11 465	11 892	514	515	Σ_2	-1 665.6	2 877	11 909	-376	55	55
	3 273	7 258	-1 364	593	1 781	1 777		1 746	-5 883	1 139	-956	797	796
	-1 867	21 832	10 668	-8 323	379	378		-4 326	11 909	-1 867	1 139	906	907
	-16 656	11 892	7 258	10 668	238	238		1 253	-376	-5 883	593	938	938
	2 877	3 273	21 832	-956	1 784	1 782		-11 465	1 746	-1 364	-8 323	47	47

注: 1. exact 和 Cox 分别表示精确值和 Cox 计算值, (8)表示用文中(8)式计算值;
2. 表中 a, b, c, d, Σ_1 和 Σ_2 均是随机产生, 且均是放大 10000 倍的结果.

参考文献:

[1] HULL J. 期权、期货和其他衍生品 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2009: 507—550.
[2] 徐承龙, 吴 倩, 孙丽华, 等. 组合风险的重要性抽样方法 [J]. 同济大学学报(自然科学版), 2015, 43(4): 633—638.
[3] 匡爱民. 具有多时点重置的欧式重置权证定价 [J]. 统计与决策, 2011, 323(12): 163—165.
[4] VIJVERBERG W P M. Monte Carlo Evaluation of Multivariate Normal Probabilities [J]. Journal of Economics, 1997, 76(1/2): 281—307.
[5] VIJVERBERG W P M. Rectangular and Wedge-shaped Multivariate Normal Probabilities [J]. Economics Letters, 2000, 68(1): 13—20.
[6] SÁNDOR Z, ANDRÁS P. Alternative Sampling Methods for Estimating Multivariate Normal Probabilities [J]. Journal of Econometrics, 2004, 120(2): 207—234.
[7] COX R, WERMUTH N. A Simple Approximation for Bivariate and Trivariate Normal Integrals [J]. International Statistics Review, 1991, 59(2): 263—269.
[8] DEÁK I. Random Number Generators and Simulation [J]. Journal of the American Statistical Association, 1992, 34(2):

338—341.

- [9] GENZ A. Numerical Computation of the Multivariate Normal Probabilities [J]. Journal of Computational and Graphical Statistics, 1992, 1(2): 141—149.
- [10] GENZ A. Numerical Computation of Rectangular Bivariate and Trivariate Normal and Probabilities [J]. Statistics and Computing, 2004, 14(3): 251—260.
- [11] PLACKETT R L. A Reduction Formula for Normal Multivariate Integrals [J]. Biometrika Trust, 1954, 41(3/4): 351—360.
- [12] 冀荣华, 李 想, 高万林, 等. 基于多维正态分布的分段禁忌优化算法 [J]. 计算机工程与应用, 2014, 20(1): 1—6.
- [13] 冀荣华, 李 想, 高万林, 等. 多维正态分布分段禁忌优化算法的参数优化 [J]. 计算机工程与应用, 2015, 51(9): 59—63.

On Multivariate Normal Probabilities Approximation

JIANG Wei^{1,2}, XI Huan³

1. Department of Personnel, Hezhou University, Hezhou Guangxi 542899, China;

2. Key Laboratory of Symbolic Computation and Engineering Data Processing, Hezhou University, Hezhou Guangxi 542899, China;

3. School of Statistics and Managemen, Shanghai University of Finance and Economics Zhejiang College, Jinhua Zhejiang, 321000, China

Abstract: An approximate expression of multivariate normal probabilities has been derived by the Cholesky decomposition of matrix and total probability theorem technique. It is shown that multivariate normal probabilities can be computed approximately with the weighted mean of lower dimensional multivariate normal probabilities. The technique can be also applied to solve other multivariate probabilities if the multivariate has properties of invariance of the linear transform. Finally, some numerical calculations from bivariate, trivariate, quadrivariate and compare results with Cox are given.

Key words: multivariate normal probabilities; Cholesky decomposition; total probability theorem

责任编辑 张 构