DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.03.002

上半平面中带平方根的 Hilbert 边值问题①

史西专， 张利利

黄河科技学院 信息工程学院，郑州 450063

摘要：讨论了上半平面中带平方根的 Hilbert 边值问题. 先对未知函数进行结构分析，再把该问题转化为典型的上半平面中的 Hilbert 边值问题，然后通过关于实轴的对称扩张，将该问题进一步等价于实轴上的 Riemann 边值问题. 利用已有结果得到了该问题的可解性定理.

关 键 词：Hilbert 边值问题；上半平面；Riemann 边值问题；实轴

中图分类号：O175.8 **文献标志码：A** **文章编号：**1000-5471(2017)03-0007-05

解析函数边值问题是复分析研究的一个重要方面，它既有理论意义又有广泛的应用，如在弹性力学、断裂力学及工程技术中都有重要的应用. 文献[1]中给出了上半平面中及单位圆内的 Hilbert 边值问题的通常提法，并得出了这些问题一般解和可解性理论. 文献[2]研究了边界过原点的任意半平面中的 Hilbert 边值问题，在文献[3]中又讨论了上半平面中含参变未知函数的 Hilbert 边值问题. 文献[4]提出了一种带平方根的 Hilbert 边值问题，并给出了在封闭光滑曲线上的解法. 文献[5－6]研究了这种边值问题在封闭光滑曲线上的非正则型情况的解.

本文考虑把积分路径由封闭曲线推广为无穷直线，讨论这种带平方根的 Hilbert 边值问题在上半平面中的解法. 虽然可以用分式线性变换把实轴变为 w 平面上的圆周而采用文献[4]中的结果来处理问题，但我们是通过对未知函数进行结构分析，把该问题转化为一般的上半平面中的 Hilbert 边值问题，然后再关于实轴对称扩张，使该问题进一步等价于一种实轴上的 Riemann 边值问题. 利用经典的 Riemann 边值问题理论，得到了带平方根的 Hilbert 边值问题在上半平面中的可解性定理.

定义[1] 设 $f(x)$ 是定义在 X(实轴)上的连续复函数. 如果：

1) 在包含原点在内的充分大的闭区间 I 上 $f(x) \in H^{\mu}$；

2) 在 I 之外，即在 $\pm\infty$ 的邻域内满足条件

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant A\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right|^{\mu} (0 < \mu \leqslant 1),\ x_1,\ x_2 \in X - I$$

则称 $f(x) \in \hat{H}^{\mu}(X)$，或简记为 $\hat{H}^{\mu}$. 若不强调 μ，可记为 $\hat{H}$.

设 $L = X$ 为实轴，Z^+ 为上半平面，Z^- 为下半平面. 我们的问题是：求一个在 Z^+ 内全纯、在 $\overline{Z^+} = Z^+ + X$ 上连续的函数 $\Psi(z)$(要求 $\Psi(\infty)$ 有限)，满足下列带平方根的 Hilbert 边值条件

$$\mathrm{Re}[\lambda(x) \sqrt{\Psi^+(x)}] = c(x),\ x \in X \tag{1}$$

其中：$\lambda(x), c(x) \in \hat{H}(X)$，$\lambda(x) \neq 0$；$\sqrt{\Psi^+(x)}$ 在 X 上连续且单值.

问题(1)的指标定义为

---

① 收稿日期：2015-07-15

基金项目：河南省科技计划项目(132300410217，142300410342).

作者简介：史西专(1976-)，男，河南南阳人，讲师，主要从事复分析及其应用的教学和研究.

$$\kappa=\frac{1}{\pi}[\arg\overline{\lambda(x)}]_{-\infty}^{+\infty}$$

设 $\Psi(z)$ 在 Z^+ 内共有 N 个奇数阶的不同零点 $a_1,a_2,\cdots,a_N$，其中 N 连同 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的位置均预先任意指定. 当 N 为奇数或偶数时，情况是不一样的，下面将分别讨论.

1 N 为偶数时，问题的解

当 $N=2n$ 是偶数时，记

$$\Pi(z)=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_N) \tag{2}$$

在 Z^+ 中作连接 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的适当割线，取定 $\sqrt{\Pi(z)}$ 的某一单值分支. 于是 $\dfrac{\Psi(z)}{\Pi(z)}$ 在 Z^+ 内全纯，在 X 上连续，且在 Z^+ 内无奇数阶零点，所以

$$\sqrt{\Psi(z)}=\sqrt{\Pi(z)}\Phi(z) \tag{3}$$

其中 $\Phi(z)$ 在 Z^+ 内全纯，连续到 X 上.

于是，问题(1) 就可变为

$$\mathrm{Re}[\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}\Phi^+(x)]=c(x),\ x\in X \tag{4}$$

这是一个典型的上半平面中的 H 问题，其系数属于 $\hat{H}$ 类函数，其指标为

$$K=\frac{1}{\pi}[\arg\overline{\lambda(x)}]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\pi}\left[\arg\overline{\sqrt{\Pi(x)}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\kappa-N$$

先把问题(4) 中的未知函数 $\Phi(z)$ 对称扩张到下半平面 Z^-：$\bar{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar{z})}$，再令

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z),\ z\in Z^+\\ \bar{\Phi}(z),\ z\in Z^-\end{cases}$$

因此问题(4) 又可改写为

$$\Omega^+(x)=G(x)\Omega^-(x)+g(x),\ x\in X \tag{5}$$

其中

$$G(x)=-\frac{\overline{\lambda(x)}\ \overline{\sqrt{\Pi(x)}}}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}},\ g(x)=\frac{2c(x)}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}} \tag{6}$$

于是，H 问题(4) 就等价于 R 问题(5) 在 R_0 中求解，并要求满足附加条件

$$\Omega^-(x)=\overline{\Omega^+(x)}$$

令

$$G_0(x)=\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^K G(x) \tag{7}$$

显然 $G_0(x)\in\hat{H}$，$G_0(x)\neq 0$，$G_0(\infty)=G(\infty)\neq 0$，且 $G_0(x)$ 的指标 $\mathrm{Ind}_X G_0(x)=0$，故可以在 X 上取定 $\log G_0(x)$ 的一单值连续分支，且易证 $\log G_0(x)\in\hat{H}$.

引进函数

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log G_0(x)}{x-z}\mathrm{d}x,\ z\notin X \tag{8}$$

则 $\Gamma(\infty)=0$，且 $\Gamma^{\pm}(x)\in\hat{H}$. 又由于 $|G_0(x)|=1$，故

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Theta(x)}{x-z}\mathrm{d}x$$

其中

$$\Theta(x)=\arg\left[-\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^K\frac{\overline{\lambda(x)}\ \overline{\sqrt{\Pi(x)}}}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}}\right]=\pi+2K\arg(x+i)-2\arg[\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}] \tag{9}$$

为一实函数. 由此立刻知道，

$$\overline{\Gamma}(z)=\Gamma(z),\ \Gamma^-(x)=\overline{\Gamma^+(x)} \tag{10}$$

再记

$$X(z)=\begin{cases}(z+i)^{-K}\mathrm{e}^{\Gamma(z)},\ z\in Z^+\\(z-i)^{-K}\mathrm{e}^{\Gamma(z)},\ z\in Z^-\end{cases} \tag{11}$$

则由(10)式知，$\overline{X}(z)=X(z)$.

再令

$$Y(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\Gamma(z)},\ z\in Z^+\\\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^K\mathrm{e}^{\Gamma(z)},\ z\in Z^-\end{cases} \tag{12}$$

则由(10)式知，$\overline{Y}(z)=\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^K Y(z)$.

现考虑 H 问题(4)的解[1]：

1）当 $K\geqslant 0$，即 $\kappa\geqslant N$ 时，

$$\Omega_0(z)=\frac{Y(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(x)}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}Y^+(x)(x-z)}dx \tag{13}$$

为 R_0 问题(5)的一个特解，且

$$\overline{\Omega_0}(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^K\frac{Y(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^K\frac{c(x)}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}Y^+(x)(x-z)}dx$$

因此，

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2}[\Omega_0(z)+\overline{\Omega_0}(z)]=$$

$$\frac{Y(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1+\left(\frac{z-i}{z+i}\frac{x+i}{x-i}\right)^K\right]\frac{c(x)}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}Y^+(x)(x-z)}dx \tag{14}$$

就是 H 问题(4)的一个特解.

于是，H 问题(4)的一般解为

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+X(z)Q_K(z) \tag{15}$$

其中 $\Phi_0(z)$ 以(14)式给出，$X(z)$ 以(11)式给出，$Q_K(z)$ 为 K 次任意实系数多项式.

2）当 $K\leqslant -2$，即 $\kappa\leqslant N-2$ 时，当且仅当可解条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(x)}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}Y^+(x)(x+i)^j}\mathrm{d}x=0,\ j=2,3,\cdots,-K \tag{16}$$

满足时，R_0 问题(5)有唯一解

$$\Omega(z)=\frac{Y(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(z+i)c(x)}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}Y^+(x)(x-z)(x+i)}\mathrm{d}x \tag{17}$$

由于这时 R 问题(5)在 R_0 中的解唯一，且 $\overline{\Omega}(z)$ 亦必为其解，则必然有 $\overline{\Omega}(z)=\Omega(z)$，从而 $\Phi(z)=\Omega(z)$，即(17)式就已经是 H 问题(4)的唯一解.

求出了 H 问题(4)的解，再利用(3)式也就解决了问题(1)，于是我们得：

定理 1　上半平面中带平方根的 Hilbert 边值问题(1)，当 $\kappa\geqslant N$ 时，其一般解为 $\Psi(z)=\Pi(z)\Phi(z)^2$，其中 $\Pi(z)$ 以(2)式给出，$\Phi(z)$ 以(15)式给出；当 $\kappa\leqslant N-2$ 时，当且仅当满足可解条件(16)时有唯一解 $\Psi(z)=\Pi(z)\Phi(z)^2$，其中 $\Pi(z)$ 仍由(2)式给出，$\Phi(z)$ 则由(17)式给出.

2　N 为奇数时，问题的解

当 $N=2n+1$ 是奇数时，在 L 上取一个点，不妨设为 a_0，构造 $\Pi(z)$ 如下

$$\Pi(z)=(z-a_0)(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_N) \tag{18}$$

于是$\dfrac{\Psi(z)}{\Pi(z)}$在 Z^+ 内全纯，除间断点 a_0 外在 X 上连续，且在 Z^+ 内无奇数阶零点. 同样在 Z^+ 中作连接 a_0,a_1，

$a_2, \cdots, a_N$ 的适当割线，并取定 $\sqrt{\Pi(z)}$ 的某一单值分支后，(3) 式仍然成立，不过其中的 $\Pi(z)$ 应为(18) 式，其中的 $\Phi(z)$ 在 Z^+ 内全纯，其边值除在 a_0 处可能有不超过 $\frac{1}{2}$ 阶的奇异性外，在 X 上连续.

此种情况下，问题(1) 仍可变为 H 问题(4)，并可进一步转化为 R 问题(5). 注意(6) 式中的 $G(x)$ 与 $g(x)$，虽然 $\Pi(x)$ 在 X 上有零点 a_0，但在 a_0 处可能有不超过 $\frac{1}{2}$ 阶的奇异性，其中 $G(x) \neq 0$ 且 $G(x) \in \hat{H}_0$(即分段 $G(x) \in H$)，所以，此时(5) 式是一个在唯一节点 a_0 处有第一类间断系数的正则型 R 问题(不妨称为 R^* 问题).

我们要在 h_0 类中求解. 易知

$$\frac{1}{2\pi}[\arg G(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \kappa - N - \frac{1}{2}$$

故此时 R^* 问题(5) 在 h_0 类中的指标是奇数：

$$K = -\left[-\left(\kappa - N - \frac{1}{2}\right)\right] = \kappa - N$$

(符号“[·]”在这里表示向下取整).

同上一节一样，先考虑 R^* 问题(5) 的解，再考虑 H 问题(4) 的解，从而解决我们提出的问题(1).

本节中仍设 $G_0(x)$ 形式上如(7) 式，$Y(z)$ 形式上如(12) 式，但其中的 $\Gamma(z)$ 不再如(8) 式，而是

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z+i}{x+i} \frac{\log G_0(x)}{x-z}\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log G_0(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z+i}{x+i} \frac{\Theta(x)}{x-z}\mathrm{d}x - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Theta(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(xz+1)\Theta(x)}{(x^2+1)(x-z)}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{19}$$

这里 $\Theta(x)$ 形式上仍如(9) 式. 此时仍有 $\overline{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$，$\overline{Y}(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^K Y(z)$.

1) 当 $K \geqslant -1$，即 $\kappa \geqslant N-1$ 时，

$$\Omega_0(z) = \frac{Y(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z+i}{x+i} \frac{c(x)}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}Y^+(x)(x-z)}\mathrm{d}x \tag{20}$$

为 R^* 问题(5) 的一个特解，且

$$\overline{\Omega_0}(z) = \frac{Y(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{z-i}{x-i}\right)\left(\frac{z-i}{z+i}\frac{x+i}{x-i}\right)^K \frac{c(x)}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}Y^+(x)(x-z)}\mathrm{d}x$$

因此，

$$\begin{aligned}\Phi_0(z) &= \frac{1}{2}[\Omega_0(z) + \overline{\Omega_0}(z)] = \\ &\frac{Y(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{z+i}{x+i} + \frac{z-i}{x-i}\left(\frac{z-i}{z+i}\frac{x+i}{x-i}\right)^K\right] \frac{c(x)}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}Y^+(x)(x-z)}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{21}$$

就是 H 问题(4) 的一个特解.

于是，H 问题(4) 的一般解为

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{Y(z)}{(z+i)^K}Q_K(z) \tag{22}$$

其中：$\Phi_0(z)$ 以(5) 式给出，$Q_K(z)$ 为 K 次任意实系数多项式($Q_{-1}(z) \equiv 0$)，由于此时 $z \in Z^+$，故应取 $Y(z) = \mathrm{e}^{\Gamma(z)}$.

2) 当 $K \leqslant -3$，即 $\kappa \leqslant N-3$ 时，当且仅当可解条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(x)}{\lambda(x)\sqrt{\Pi(x)}Y^+(x)(x+i)^j}\mathrm{d}x = 0,\ j = 2,3,\cdots,-K \tag{23}$$

满足时，R^* 问题(5) 有唯一解(20). 由于这时 R^* 问题(5) 在 h_0 类中的解唯一，且易证 $\overline{\Omega_0}(z)$ 亦为其解，则必然有 $\overline{\Omega_0}(z) = \Omega_0(z)$，从而 $\Phi(z) = \Omega_0(z)$，即(20) 式就已经是 H 问题(4) 的唯一解.

求出了 H 问题(4) 的解，再利用(3) 式也就解决了问题(1)，于是我们得：

定理 2　上半平面中带平方根的 Hilbert 边值问题(1)，当 $\kappa \geqslant N-1$ 时，其一般解为 $\Psi(z)=\Pi(z)\Phi(z)^2$，其中 $\Pi(z)$ 以(18)式给出，$\Phi(z)$ 以(22)式给出；当 $\kappa \leqslant N-3$ 时，当且仅当满足可解条件(23)时有唯一解 $\Psi(z)=\Pi(z)\Phi(z)^2$，其中 $\Pi(z)$ 仍由(18)式给出，$\Phi(z)$ 则由(20)式给出.

参考文献：

[1] 路见可. 解析函数边值问题 [M]. 2 版. 武汉：武汉大学出版社，2004.

[2] 曹丽霞. 边界过原点的任意半平面中的 Hilbert 边值问题 [J]. 数学的实践与认识，2011，41(24)：194－199.

[3] 曹丽霞，李平润，孙　平. 上半平面中含参变未知函数的 Hilbert 边值问题 [J]. 数学的实践与认识，2012，42(2)：189－194.

[4] LU Jian-ke. On Hilbert Boundary Value Problems with Square Roots [J]. 数学理论与应用，2003，22(3)：1－4.

[5] 赵　爽. 带平方根的非正则型 Hilbert 边值问题 [J]. 绥化学院学报，2008，28(5)：180－182.

[6] 张军阳，杜金元. 非正则型 Hilbert 边值问题 [J]. 数学杂志，2008，28(5)：578－584.

[7] LU Jian-ke. Non-homogeneous Riemann Boundary Value Problem with Radicals [J]. Wuhan Univ J of Natural Sci，2002，7(4)：379－382.

Hilbert Boundary Value Problem with Square Roots in the Upper Half-Plane

SHI Xi-zhuan，　ZHANG Li-li

School of Information and Engineering，Huanghe S & T University，Zhengzhou 450063，China

Abstract：Hilbert boundary value problem with square roots in the upper half-plane has been discussed. By analyzing the structure of the unknown function，the problem has been transformed into a typical Hilbert boundary value problem in the upper half-plane. Then the problem is further equivalent to a kind of Riemann boundary value problem on the real axis by extension of symmetry with respect to the real axis. As a result，we establish the theorems of its solvability according to the known theory.

Key words：Hilbert boundary value problem；upper half-plane；Riemann boundary value problem；real axis

责任编辑　张　构