第 42 卷 第 3 期 西 南 师 范 大 学 学 报（自然科学版） 2017 年 3 月
Vol. 42 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Mar. 2017

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2017.03.003

二维扩展 Fisher-Kolmogorov 方程的线性化紧差分格式的最大模误差分析①

李 娟[1]， 高广花[2]

1. 南京审计大学金审学院 基础教学部，南京 210023；2. 南京邮电大学 理学院，南京 210023

摘要： 利用降阶法给出二维扩展 Fisher-Kolmogorov 方程的三层线性化紧差分格式，证明了解的存在唯一性及在 L_∞ 范数下时间方向二阶收敛、空间方向四阶收敛. 最后通过数值算例，验证差分格式是有效的.

关 键 词： 二维扩展 Fisher-Kolmogorov 方程；紧差分格式；非线性问题；线性化

中图分类号： O241.82 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2017)03-0012-10

Extended Fisher-Kolmogorov(EFK)方程应用广泛，备受关注. 文献[1-7]对该方程进行了理论研究. 文献[8-15]讨论 EFK 方程的数值算法，但数值格式仅在空间、时间上二阶收敛. 文献[16]给出了 EFK 方程的一个三层线性化紧差分格式，但是并未证明其解的存在唯一性及收敛性. 本文将利用带积分型余项的泰勒公式和降阶法给出 EFK 方程的线性化紧差分格式，并利用数学归纳法和能量分析法证明差分格式解的唯一性及在最大模范数下的收敛性. 在建立差分格式的过程中，用积分型余项表示截断误差，使得截断误差的差商与其自身为同阶无穷小，从而保证了收敛性的证明.

本文考虑如下二维扩展的 Fisher-Kolmogorov 方程的初边值问题：

$$u_t + \gamma\Delta^2 u - \Delta u + f(u) = 0,\ (x,\ y,\ t) \in \Omega \times (0,\ T] \tag{1}$$

$$u(x,\ y,\ 0) = u_0(x,\ y),\ (x,\ y) \in \Omega \tag{2}$$

$$u = u_{xx} = u_{yy} = 0 \qquad (x,\ y,\ t) \in \partial\Omega \times (0,\ T] \tag{3}$$

其中：$\Omega = (0,\ 1] \times (0,\ 1]$，$\gamma > 0$，$T > 0$，$f(u) = u^3 - u$，$\Delta$ 为拉普拉斯算子.

1 差分格式的建立

取正整数 M, N，记 $h = 1/M$，$\tau = T/N$，$x_i = ih$，$y_j = jh$，$0 \leqslant i,\ j \leqslant M$，$t_k = k\tau$，$0 \leqslant k \leqslant N$，$\Omega_h = \{(x_i,\ y_j) \mid 0 \leqslant i,\ j \leqslant M\}$，$\Omega_\tau = \{t_k \mid 0 \leqslant k \leqslant N\}$. 设 $U_h = \{u \mid u_{ij}^k,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 0 \leqslant k \leqslant N\}$ 是定义在 $\Omega_h \times \Omega_\tau$ 上的网格函数. 对任意的网格函数 $u \in U_h$，引入如下记号：

$$u_{ij}^{k+1/2} = (u_{ij}^{k+1} + u_{ij}^{k})/2,\ \delta_t u_{ij}^{k+1/2} = (u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k})/\tau,\ u_{ij}^{\bar{k}} = (u_{ij}^{k+1} + u_{ij}^{k-1})/2$$

$$\Delta_t u_{ij}^{k} = (u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k-1})/2\tau,\ \delta_x u_{i+1/2,\ j}^{k} = (u_{i+1,\ j}^{k} - u_{ij}^{k})/h,\ \delta_y u_{i,\ j+1/2}^{k} = (u_{i,\ j+1}^{k} - u_{ij}^{k})/h$$

---

① 收稿日期：2015-09-10

基金项目：国家自然科学青年基金项目(11401319)；江苏省高校自然科学研究面上项目(16KJD110002)；江苏省自然科学青年基金项目(BK20130860).

作者简介：李 娟(1983-)，女，河南获嘉人，讲师，硕士研究生，主要从事偏微分方程数值解研究.

$$\delta_x^2 u_{ij}^k = \begin{cases} (\delta_x u_{i+1/2,\ j}^k - \delta_x u_{i-1/2,\ j}^k)/h & 1 \leqslant i \leqslant M-1,\ 0 \leqslant j \leqslant M \\ u_{xx}(x_i,\ y_j,\ t_k) & i = 0,\ M,\ 0 \leqslant j \leqslant M \end{cases}$$

$$\delta_y^2 u_{ij}^k = \begin{cases} (\delta_y u_{i,\ j+1/2}^k - \delta_x u_{i,\ j-1/2}^k)/h & 0 \leqslant i \leqslant M,\ 1 \leqslant j \leqslant M-1 \\ u_{yy}(x_i,\ y_j,\ t_k) & 0 \leqslant i \leqslant M,\ j = 0,\ M \end{cases}$$

$$(A_1 u)_{ij}^k = \begin{cases} (u_{i+1,\ j}^k + 10u_{ij}^k + u_{i-1,\ j}^k)/12 & 1 \leqslant i \leqslant M-1,\ 0 \leqslant j \leqslant M \\ u_{ij}^k & i = 0,\ M,\ 0 \leqslant j \leqslant M \end{cases}$$

$$(A_2 u)_{ij}^k = \begin{cases} (u_{i,\ j+1}^k + 10u_{ij}^k + u_{i,\ j-1}^k)/12 & 0 \leqslant i \leqslant M,\ 1 \leqslant j \leqslant M-1 \\ u_{ij}^k & 0 \leqslant i \leqslant M,\ j = 0,\ M \end{cases}$$

设 $\overset{o}{U}_h = \{u \mid u = \{u_{ij},\ u_{0i} = 0,\ u_{Mi} = 0,\ u_{iM} = 0,\ u_{i0} = 0,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M\}\}$ 是定义在 $\Omega_h \times \Omega_\tau$ 上的网格函数. 对于任意的 $u, v \in \overset{o}{U}_h$，定义如下内积和范数：

$$(u,\ v) = h^2 \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M} u_{ij} v_{ij},\ \| u \|^2 = (u,\ u),\ \| \delta_x u \|^2 = h^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M} (\delta_x u_{i+1/2,\ j})^2$$

$$\| \delta_y u \|^2 = h^2 \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M-1} (\delta_y u_{i,\ j+1/2})^2,\ \| u \|_\infty = \max_{0 \leqslant i,\ j \leqslant M} | u_{ij} |$$

$$| u |_1 = \sqrt{\| \delta_x u \|^2 + \| \delta_y u \|^2},\ | u |_2 = \sqrt{\| \delta_x^2 u + \delta_y^2 u \|^2}$$

为了便于推导差分格式，引入下面辅助引理.

引理 1[17]　记 $\alpha(s) = (1-s)^3[5-3(1-s)^2]$，如果 $g(x) \in C^6[x_{i-1},\ x_{i+1}]$，则有

$$[g''(x_{i+1}) + 10g''(x_i) + g''(x_{i-1})]/12 - [g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1})]/h^2 =$$

$$(h^4/360)\int_0^1 [g^{(6)}(x_i + sh) + g^{(6)}(x_i - sh)]\alpha(s)\mathrm{d}s =$$

$$(h^4/240)g^{(6)}(x_i + \theta_i h),\ \theta_i \in (-1,\ 1)$$

下面利用降阶法，推导差分格式. 令 $v = u - \gamma\Delta u$，则问题(1)－(3) 等价于下面问题：

$$u_t + f(u) = \Delta v,\ (x,\ t) \in \Omega \times (0,\ T] \tag{4}$$

$$v = u - \gamma\Delta u,\ (x,\ t) \in \Omega \times (0,\ T] \tag{5}$$

$$u(x,\ y,\ 0) = u_0(x,\ y),\ (x,\ y) \in \Omega \tag{6}$$

$$u = u_{xx} = u_{yy} = 0,\ v = 0,\ (x,\ t) \in \partial\Omega \times (0,\ T] \tag{7}$$

在 $\Omega_h \times \Omega_\tau$ 上定义如下网格函数：$U_{ij}^k = u(x_i,\ y_j,\ t_k),\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 0 \leqslant k \leqslant N.$

在 $(x_i,\ y_j,\ t_{1/2})$ 处分别考虑方程(4) 和(5)，并应用带积分型余项的泰勒展式和引理 1，可得

$$A_1 A_2 \delta_t U_{ij}^{1/2} + A_1 A_2 f(U_{ij}^{1/2}) = (A_2 \delta_x^2 + A_1 \delta_y^2) V_{ij}^{1/2} + p_{ij}^0,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M \tag{8}$$

$$A_1 A_2 V_{ij}^{1/2} = A_1 A_2 U_{ij}^{1/2} - \gamma(A_2 \delta_x^2 + A_1 \delta_y^2) U_{ij}^{1/2} + q_{ij}^0,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M \tag{9}$$

其中

$$U_{ij}^{1/2} = u(x_i,\ y_j,\ 0) + (\tau/2)u_t(x_i,\ y_j,\ 0) + (\tau^2/4)u_{tt}(x_i,\ y_j,\ \xi),\ \xi \in (0,\ \tau),$$

$$u_t(x_i,\ y_j,\ 0) = \Delta u_0(x_i,\ y_j) - \gamma\Delta^2 u_0(x_i,\ y_j) - f(u_0(x_i,\ y_j))$$

且存在不依赖于 h, τ 的正常数 c_1，使得

$$| p_{ij}^0 | \leqslant c_1(h^4 + \tau^2),\ | q_{ij}^0 | \leqslant c_1(h^4 + \tau^2),\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M \tag{10}$$

在 $(x_i,\ y_j,\ t_k)$ 处分别考虑方程(4) 和(5)，应用带积分型余项的泰勒展式和引理 1，可得

$$A_1 A_2 \Delta_t U_{ij}^k + A_1 A_2 f(U_i^k) = (A_2 \delta_x^2 + A_1 \delta_y^2) V_{ij}^k + p_{ij}^k,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{11}$$

$$A_1 A_2 V_{ij}^k = A_1 A_2 U_{ij}^{\bar{k}} - \gamma(A_2 \delta_x^2 + A_1 \delta_y^2) U_{ij}^{\bar{k}} + q_{ij}^k,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{12}$$

其中 p_{ij}^k, q_{ij}^k 为截断误差，且存在不依赖于 h, τ 的正常数 c_2，使得

$$|p_{ij}^k| \leqslant c_2(h^4+\tau^2),\ |q_{ij}^k| \leqslant c_2(h^4+\tau^2),\ |\Delta_t q_{ij}^k| \leqslant c_2(h^4+\tau^2),$$
$$0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{13}$$

根据式(6),(7)可得

$$U_{ij}^0 = u_0(x_i,\ y_j),\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M \tag{14}$$
$$U_{0j}^k = 0,\ U_{Mj}^k = 0,\ U_{iM}^k = 0,\ U_{i0}^k = 0,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N \tag{15}$$
$$V_{0j}^k = 0,\ V_{Mj}^k = 0,\ V_{iM}^k = 0,\ V_{i0}^k = 0,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N \tag{16}$$

在式(8)-(16)中略去小量项，并用近似值 u_{ij}^k,v_{ij}^k 代替精确值 U_{ij}^k,V_{ij}^k，得到如下差分格式：

$$A_1A_2\delta_t u_{ij}^{1/2} + A_1A_2 f(\hat{u}_{ij}) = (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)v_{ij}^{1/2},\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M \tag{17}$$
$$A_1A_2 v_{ij}^{1/2} = A_1A_2 u_{ij}^{1/2} - \gamma(A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)u_{ij}^{1/2},\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M \tag{18}$$
$$A_1A_2\Delta_t u_{ij}^k + A_1A_2 f(u_{ij}^k) = (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)v_{ij}^k,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{19}$$
$$A_1A_2 v_{ij}^k = A_1A_2 u_{ij}^{\bar{k}} - \gamma(A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)u_{ij}^{\bar{k}},\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{20}$$
$$u_{ij}^0 = u_0(x_i,\ y_j),\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M \tag{21}$$
$$u_{0j}^k = 0,\ u_{Mj}^k = 0,\ u_{iM}^k = 0,\ u_{i0}^k = 0,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N \tag{22}$$
$$v_{0j}^k = 0,\ v_{Mj}^k = 0,\ v_{iM}^k = 0,\ v_{i0}^k = 0,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N \tag{23}$$

其中 $\hat{u}_{ij} = u(x_i,\ y_j,\ 0) + (\tau/2)u_t(x_i,\ y_j,\ 0)$.

将(18)式代入(17)式，将(20)式代入(19)式，可得到与(17)-(23)式等价的差分格式：

$$(A_1A_2)^2\delta_t u_{ij}^{1/2} + (A_1A_2)^2 f(\hat{u}_{ij}) = (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)(A_1A_2 u_{ij}^{1/2} - \gamma(A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)u_{ij}^{1/2}),$$
$$0 \leqslant i,\ j \leqslant M \tag{24}$$
$$(A_1A_2)^2\Delta_t u_{ij}^k + (A_1A_2)^2 f(u_i^k) = (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)(A_1A_2 u_{ij}^{\bar{k}} - \gamma(A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)u_{ij}^{\bar{k}}),$$
$$0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{25}$$
$$u_{ij}^0 = u_0(x_i,\ y_j),\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M \tag{26}$$
$$u_{0j}^k = 0,\ u_{Mj}^k = 0,\ u_{iM}^k = 0,\ u_{i0}^k = 0,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N \tag{27}$$

2 差分格式的理论分析

本节我们将证明差分格式的唯一可解性和收敛性. 为方便起见，引入几个辅助引理.

引理 2[18] 对于任意的 $u,v \in \overset{o}{U}_h$，有

$$(\delta_x^2 u,\ v) = (u,\ \delta_x^2 v),\ (\delta_y^2 u,\ v) = (u,\ \delta_y^2 v)$$
$$(A_1 u,\ v) = (u,\ A_1 v),\ (A_2 u,\ v) = (u,\ A_2 v),\ (4/9)\|u\| \leqslant \|A_1A_2 u\| \leqslant \|u\|$$

引理 3[19] 对于任意的网格函数 $v \in \overset{o}{U}_h$，有 $|v|_2 \leqslant (3/2)\|(A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)v\|$.

引理 4[20] 对于任意的网格函数 $v \in U_h$，存在正常数 k_1，使得

$$\|v\|_\infty \leqslant k_1\|v\|^{1/2}(|v|_2 + \|v\|)^{1/2}$$

定理 1 差分格式(24)-(27)有唯一的解.

证 记 $u^k = \{u_{ij}^k \mid 0 \leqslant i,\ j \leqslant M\}$. 由(26),(27)式，$u^0$ 已知. 由(24),(26),(27)式可得关于 u^1 的线性方程组. 要证它是唯一可解的，只需证其对应的齐次方程组

$$\begin{cases}(1/\tau)(A_1A_2)^2 u_{ij}^1 = (1/2)(A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)(A_1A_2 u_{ij}^1 - \gamma(A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)u_{ij}^1),\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M \\ u_{0j}^1 = 0,\ u_{Mj}^1 = 0,\ u_{iM}^1 = 0,\ u_{i0}^1 = 0,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant M\end{cases}$$

仅有零解.

用 u^1 与上面方程组的第一个方程作内积，

$$(1/\tau)((A_1A_2)^2u^1,u^1)=(1/2)((A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)A_1A_2u^1,u^1)-(\gamma/2)((A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)^2u^1,u^1)$$

由引理 2 可得

$$(1/\tau)\|A_1A_2u^1\|^2+(\gamma/2)\|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)u^1\|_2^2+(1/3)(\|A_2\delta_xu^1\|^2+\|A_1\delta_yu^1\|^2)\leqslant 0$$

从而有 $\|u^1\|^2=0$，故 $u_{ij}^1=0$，$0\leqslant i,j\leqslant M$，即 $k=1$ 时，差分格式是唯一可解的.

假设第 $k-1$ 层、第 k 层的解是唯一确定的. 由(25)和(27)式可得关于 u^{k+1} 的线性方程组. 要证其唯一可解性，只需证其对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1/\tau)(A_1A_2)^2u_{ij}^{k+1}=(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)(A_1A_2u_{ij}^{k+1}-\gamma(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)u_{ij}^{k+1}),\ 0\leqslant i,j\leqslant M\\ u_{0j}^{k+1}=0,\ u_{Mj}^{k+1}=0,\ u_{iM}^{k+1}=0,\ u_{i0}^{k+1}=0,\ 0\leqslant i,j\leqslant M\end{cases}$$

仅有零解. 易得 $u_{ij}^{k+1}=0$，$0\leqslant i,j\leqslant M$，即 u^{k+1} 是唯一可解的. 由数学归纳法知差分格式是唯一可解的.

下面，对差分格式(17)－(23)进行收敛性分析，证明数值解在最大模范数下收敛于问题(1)－(3)的精确解.

定理 2　记 $\mathrm{e}_{ij}^k=U_{ij}^k-u_{ij}^k$，$g_{ij}^k=V_{ij}^k-v_{ij}^k$，$0\leqslant i,j\leqslant M$，$0\leqslant k\leqslant N$. 假设问题(1)－(3)的解 $u(x,y,t)\in C^{(6,6,3)}(\Omega\times[0,T])$，则差分格式(17)－(23)的解按无穷范数收敛于问题(1)－(3)的解，收敛阶为 $O(h^4+\tau^2)$，即：存在不依赖于 h,τ 的正常数 c，使得

$$\|\mathrm{e}^k\|_\infty\leqslant c(h^4+\tau^2),\ 0\leqslant k\leqslant N \tag{$*$}$$

证　用(8)－(9)式、(11)－(12)式、(14)－(16)式分别减去(17)－(23)式，得如下误差方程：

$$A_1A_2\delta_t\mathrm{e}_{ij}^{1/2}=(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)g_{ij}^{1/2}+p_{ij}^0,\ 0\leqslant i,j\leqslant M \tag{28}$$

$$A_1A_2g_{ij}^{1/2}=A_1A_2\mathrm{e}_{ij}^{1/2}-\gamma(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}_{ij}^{1/2}+q_{ij}^0,\ 0\leqslant i,j\leqslant M \tag{29}$$

$$A_1A_2\Delta_t\mathrm{e}_{ij}^k+A_1A_2(f(U_{ij}^k)-f(u_{ij}^k))=(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)g_{ij}^k+p_{ij}^k,\ 0\leqslant i,j\leqslant M,\ 1\leqslant k\leqslant N-1 \tag{30}$$

$$A_1A_2g_{ij}^k=A_1A_2\mathrm{e}_{ij}^{\bar{k}}-\gamma(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}_{ij}^{\bar{k}}+q_{ij}^k,\ 0\leqslant i,j\leqslant M,\ 1\leqslant k\leqslant N-1 \tag{31}$$

$$\mathrm{e}_{ij}^0=0,\ 0\leqslant i,j\leqslant M \tag{32}$$

$$\mathrm{e}_{0j}^k=0,\ \mathrm{e}_{Mj}^k=0,\ \mathrm{e}_{iM}^k=0,\ \mathrm{e}_{i0}^k=0,\ 0\leqslant i,j\leqslant M,\ 1\leqslant k\leqslant N \tag{33}$$

$$g_{0j}^k=0,\ g_{Mj}^k=0,\ g_{iM}^k=0,\ g_{i0}^k=0,\ 0\leqslant i,j\leqslant M,\ 1\leqslant k\leqslant N \tag{34}$$

下面用数学归纳法证明定理结论(＊)式成立.

Ⅰ) 当 $k=0$ 时，$\|\mathrm{e}^0\|_\infty=0$，定理结论显然成立.

下面证 $k=1$ 时，$\|\mathrm{e}^1\|_\infty\leqslant c(h^4+\tau^2)$.

1) 先估计 $\|A_1A_2\mathrm{e}^1\|^2$.

用 $A_1A_2\mathrm{e}^{1/2}$ 与(28)式作内积，$(1/\gamma)A_1A_2g^{1/2}$ 与(29)式作内积，得

$$(A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2},A_1A_2\mathrm{e}^{1/2})=((A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)g^{1/2},A_1A_2\mathrm{e}^{1/2})+(p^0,A_1A_2\mathrm{e}^{1/2}) \tag{35}$$

$$(1/\gamma)(A_1A_2g^{1/2},A_1A_2g^{1/2})=(1/\gamma)(A_1A_2\mathrm{e}^{1/2},A_1A_2g^{1/2})-((A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^{1/2},A_1A_2g^{1/2})+(1/\gamma)(q^0,A_1A_2g^{1/2}) \tag{36}$$

将(35)式与(36)式相加，应用引理 2 及柯西施瓦兹不等式，注意到(33)式，可得

$$\begin{aligned}&(1/2\tau)(\|A_1A_2\mathrm{e}^1\|^2-\|A_1A_2\mathrm{e}^0\|^2)+(1/\gamma)\|A_1A_2g^{1/2}\|^2=\\&(1/2)(p^0,A_1A_2\mathrm{e}^1)+(1/2\gamma)(A_1A_2\mathrm{e}^1,A_1A_2g^{1/2})+(1/\gamma)(q^0,A_1A_2g^{1/2})\leqslant\\&(1/2)\|p^0\|\cdot\|A_1A_2\mathrm{e}^1\|+(1/2\gamma)\|A_1A_2\mathrm{e}^1\|\cdot\|A_1A_2g^{1/2}\|+(1/\gamma)\|q^0\|\cdot\|A_1A_2g^{1/2}\|\leqslant\\&(1/2)\|p^0\|^2+(1/8)\|A_1A_2\mathrm{e}^1\|^2+(1/\gamma)((1/8)\|A_1A_2\mathrm{e}^1\|^2+(1/2)\|A_1A_2g^{1/2}\|^2)+\\&(1/2\gamma)(\|q^0\|^2+\|A_1A_2g^{1/2}\|^2)\end{aligned}$$

从而可得

$$(1/2\tau)\|A_1A_2\mathrm{e}^1\|^2 \leqslant (1/8)(1+(1/\gamma))\|A_1A_2\mathrm{e}^1\|^2 + (1/2)\|p^0\|^2 + (1/2\gamma)\|q^0\|^2$$

当 $\tau \leqslant 2\gamma/(\gamma+1)$ 时，由上式可得

$$\|A_1A_2\mathrm{e}^1\|^2 \leqslant 2\tau\|p^0\|^2 + (2\tau/\gamma)\|q^0\|^2 \leqslant 2T(1+(1/\gamma))c_1^2(h^4+\tau^2)^2 \tag{37}$$

2) 下面估计 $|\mathrm{e}^1|_2$.

用 $A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2}$ 与(28)式作内积，$(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\delta_t\mathrm{e}^{1/2}$ 与(29)式作内积，得

$$(A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2}, A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2}) = ((A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)g^{1/2}, A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2}) + (p^0, A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2}) \tag{38}$$

$$(A_1A_2g^{1/2}, (A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\delta_t\mathrm{e}^{1/2}) = (A_1A_2\mathrm{e}^{1/2}, (A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\delta_t\mathrm{e}^{1/2}) - \gamma((A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^{1/2},$$
$$(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\delta_t\mathrm{e}^{1/2}) + (q^0, (A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\delta_t\mathrm{e}^{1/2}) \tag{39}$$

将(38)式与(39)式相加，应用引理 2 及柯西施瓦兹不等式，可得

$$\|A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2}\|^2 + (\gamma/2\tau)(\|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^1\|^2 - \|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^0\|^2) =$$
$$(p^0, A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2}) + (A_1A_2\mathrm{e}^{1/2}, (A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\delta_t\mathrm{e}^{1/2}) + (q^0, (A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\delta_t\mathrm{e}^{1/2}) \leqslant$$
$$\|p^0\|\cdot\|A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2}\| + \|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^{1/2}\|\cdot\|A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2}\| +$$
$$(1/\tau)\|q^0\|\cdot\|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^1\| \leqslant$$
$$(1/2)\|p^0\|^2 + (1/2)\|A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2}\|^2 + (1/2)\|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^{1/2}\|^2 + (1/2)\|A_1A_2\delta_t\mathrm{e}^{1/2}\|^2 +$$
$$(1/\gamma\tau)\|q^0\|^2 + (\gamma/4\tau)\|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^1\|^2$$

从而，可得

$$(\gamma/4\tau)\|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^1\|^2 \leqslant (1/2)\|p^0\|^2 + (1/8)\|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^1\|^2 + (1/\gamma\tau)\|q^0\|^2$$

当 $\tau \leqslant \gamma$ 时，由上式可得

$$\|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^1\|^2 \leqslant (2\tau/\gamma)\|p^0\|^2 + (4/\gamma^2)\|q^0\|^2 \leqslant (2/\gamma)(T+2/\gamma)c_1^2(h^4+\tau^2)^2 \tag{40}$$

根据引理 2、引理 3 和引理 4，由(37)式和(40)式，可得

$$\|\mathrm{e}^1\|_\infty \leqslant c_3(h^4+\tau^2)$$

其中 c_3 仅依赖于 c_1, T, γ，即 $k=1$ 时，定理结论成立.

Ⅱ) 假设当 $k=0,1,\cdots,m$ 时($0 \leqslant m \leqslant N-1$)，(*)式均成立. 下证 $k=m+1$ 时，结论成立.

当 $\tau^2+h^4 \leqslant 1/c$，有 $\|\mathrm{e}^k\|_\infty \leqslant c(h^4+\tau^2) \leqslant 1$，$1 \leqslant k \leqslant m$.

设 $|u(x,t)| \leqslant M_1$，可得 $\|u^k\|_\infty = \|U^k-(U^k-u^k)\|_\infty \leqslant \|U^k\|_\infty + \|\mathrm{e}^k\|_\infty \leqslant M_1+1$.

设 $|f'| \leqslant M_2$，应用微分中值定理，可得

$$|f(U_{ij}^k)-f(u_{ij}^k)| \leqslant M_2|\mathrm{e}_{ij}^k|,\ 1 \leqslant i,j \leqslant M-1,\ 1 \leqslant k \leqslant m$$
$$|A_1A_2(f(U_{ij}^k)-f(u_{ij}^k))| \leqslant M_2A_1A_2|\mathrm{e}_{ij}^k|,\ 1 \leqslant i,j \leqslant M-1,\ 1 \leqslant k \leqslant m$$
$$\|A_1A_2(f(U^k)-f(u^k))\| \leqslant M_2\|\mathrm{e}^k\| \leqslant (9M_2/4)\|A_1A_2\mathrm{e}^k\|,\ 1 \leqslant k \leqslant m$$

1) 用 $A_1A_2\mathrm{e}^{\bar{k}}$ 与(30)式作内积，$(1/\gamma)A_1A_2g^k$ 与(31)式作内积，可得

$$(A_1A_2\Delta_t\mathrm{e}^k, A_1A_2\mathrm{e}^{\bar{k}}) + (A_1A_2(f(U^k)-f(u^k)), A_1A_2\mathrm{e}^{\bar{k}}) =$$
$$((A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)g^k, A_1A_2\mathrm{e}^{\bar{k}}) + (p^k, A_1A_2\mathrm{e}^{\bar{k}}) \tag{41}$$

$$(1/\gamma)(A_1A_2g^k, A_1A_2g^k) =$$
$$(1/\gamma)(A_1A_2\mathrm{e}^{\bar{k}}, A_1A_2g^k) - ((A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^{\bar{k}}, A_1A_2g^k) + (1/\gamma)(q^k, A_1A_2g^k) \tag{42}$$

将(41)式和(42)式相加，应用引理 2，可得

$$(1/4\tau)(\|A_1A_2\mathrm{e}^{k+1}\|^2 - \|A_1A_2\mathrm{e}^{k-1}\|^2) + (1/\gamma)\|A_1A_2g^k\|^2 =$$
$$-(A_1A_2(f(U^k)-f(u^k)), A_1A_2\mathrm{e}^{\bar{k}}) + (p^k, A_1A_2\mathrm{e}^{\bar{k}}) +$$
$$(1/\gamma)(A_1A_2\mathrm{e}^{\bar{k}}, A_1A_2g^k) + (1/\gamma)(q^k, A_1A_2g^k) \tag{43}$$

在(43)式中将 k 改写成 l，并对 l 从 1 到 k 层求和，应用引理 2 及柯西施瓦兹不等式，可得

$$(1/4\tau)(\|A_1A_2e^{k+1}\|^2+\|A_1A_2e^k\|^2-\|A_1A_2e^1\|^2-\|A_1A_2e^0\|^2)+(1/\gamma)\sum_{l=1}^{k}\|A_1A_2g^l\|^2=$$

$$-\sum_{l=1}^{k}(A_1A_2(f(U^l)-f(u^l)),A_1A_2e^{\bar{l}})+\sum_{l=1}^{k}(p^l,A_1A_2e^{\bar{l}})+(1/\gamma)\sum_{l=1}^{k}(A_1A_2e^{\bar{l}},A_1A_2g^l)+$$

$$(1/\gamma)\sum_{l=1}^{k}(q^l,A_1A_2g^l)\leqslant$$

$$\sum_{l=1}^{k}\|A_1A_2(f(U^l)-f(u^l))\|\cdot\|A_1A_2e^{\bar{l}}\|+\sum_{l=1}^{k}\|p^l\|\cdot\|A_1A_2e^{\bar{l}}\|+$$

$$(1/\gamma)\sum_{l=1}^{k}\|A_1A_2e^{\bar{l}}\|\cdot\|A_1A_2g^l\|+(1/\gamma)\sum_{l=1}^{k}\|q^l\|\cdot\|A_1A_2g^l\|\leqslant$$

$$(1/2)\sum_{l=1}^{k}(81M_2^2/16\|A_1A_2e^l\|^2+\|A_1A_2e^{\bar{l}}\|)+(1/2)\sum_{l=1}^{k}(\|p^l\|^2+\|A_1A_2e^{\bar{l}}\|^2)+$$

$$(1/2\gamma)\sum_{l=1}^{k}(\|A_1A_2e^{\bar{l}}\|^2+\|A_1A_2g^l\|^2)+(1/2\gamma)\sum_{l=1}^{k}(\|q^l\|^2+\|A_1A_2g^l\|^2)$$

从而有

$$(1/4\tau)(\|A_1A_2e^{k+1}\|^2+\|A_1A_2e^k\|^2-\|A_1A_2e^1\|^2)\leqslant$$

$$(81M_2^2/32)\sum_{l=1}^{k}\|A_1A_2e^l\|^2+(1+(1/2\gamma))\sum_{l=1}^{k}\|A_1A_2e^{\bar{l}}\|^2+(1/2)\sum_{l=1}^{k}\|p^l\|^2+(1/2\gamma)\sum_{l=1}^{k}\|q^l\|^2\leqslant$$

$$[81M_2^2/32+1+(1/2\gamma)]\sum_{l=1}^{k}\|A_1A_2e^l\|^2+(1/2)[1+(1/2\gamma)](\|A_1A_2e^{k+1}\|^2+\|A_1A_2e^k\|^2)+$$

$$(1/2)\sum_{l=1}^{k}\|p^l\|^2+(1/2\gamma)\sum_{l=1}^{k}\|q^l\|^2$$

当 $\tau\leqslant\gamma/(4\gamma+2)$ 时，由(13) 和(37) 式 可得

$$\|A_1A_2e^{k+1}\|^2+\|A_1A_2e^k\|^2\leqslant$$

$$2\|A_1A_2e^1\|^2+[81M_2^2/32+1+(1/2\gamma)]8\tau\sum_{l=1}^{k}\|A_1A_2e^l\|^2+4\tau\sum_{l=1}^{k}\|p^l\|^2+(4\tau/\gamma)\sum_{l=1}^{k}\|q^l\|^2\leqslant$$

$$[81M_2^2/32+1+(1/2\gamma)]8\tau\sum_{l=1}^{k}\|A_1A_2e^l\|^2+c_4(h^4+\tau^2)^2 \tag{44}$$

其中 c_4 仅依赖于 c_1,c_2,γ,T.

2) 用 $A_1A_2\Delta_te^k$ 与(30) 式作内积，$(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\Delta_te^k$ 与(31) 式作内积，可得

$$(A_1A_2\Delta_te^k,A_1A_2\Delta_te^k)+(A_1A_2(f(U^k)-f(u^k)),A_1A_2\Delta_te^k)=$$
$$((A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)g^k,A_1A_2\Delta_te^k)+(p^k,A_1A_2\Delta_te^k) \tag{45}$$

$$(A_1A_2g^k,(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\Delta_te^k)=$$
$$(A_1A_2e^{\bar{k}},(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\Delta_te^k)-\gamma((A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)e^{\bar{k}},(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\Delta_te^k)+$$
$$(q^k,(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\Delta_te^k) \tag{46}$$

将(45) 式和(46) 式相加，由引理 2，可得

$$\|A_1A_2\Delta_te^k\|^2+(\gamma/4\tau)(\|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)e^{k+1}\|^2-\|(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)e^{k-1}\|^2)=$$
$$-(A_1A_2(f(U^k)-f(u^k)),A_1A_2\Delta_te^k)+(A_1A_2e^{\bar{k}},(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\Delta_te^k)+$$
$$(q^k,(A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\Delta_te^k)+(p^k,A_1A_2\Delta_te^k) \tag{47}$$

在(47) 式中将 k 改写成 l，并对 l 从 1 到 k 求和，可得

$$\sum_{l=1}^{k} \| A_1A_2\Delta_t e^l \|^2 + (\gamma/4\tau)(\| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^{k+1} \|^2 + \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^k \|^2 -$$

$$\| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^1 \|^2 - \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^0 \|^2) =$$

$$-\sum_{l=1}^{k}(A_1A_2(f(U^l) - f(u^l)), A_1A_2\Delta_t e^l) + \sum_{l=1}^{k}(A_1A_2 e^{\bar{l}}, (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)\Delta_t e^l) +$$

$$\sum_{l=1}^{k}(q^l, (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)\Delta_t e^l) + \sum_{l=1}^{k}(p^l, A_1A_2\Delta_t e^l) \tag{48}$$

下面估计(48)式右端的每一项

$$-\sum_{l=1}^{k}(A_1A_2(f(U^l) - f(u^l)), A_1A_2\Delta_t e^l) \leqslant \sum_{l=1}^{k} \| A_1A_2(f(U^l) - f(u^l)) \| \cdot \| A_1A_2\Delta_t e^l \| \leqslant$$

$$\sum_{l=1}^{k}[(243M_2^2/64) \| A_1A_2 e^l \|^2 + (1/3) \| A_1A_2\Delta_t e^l \|^2]$$

$$\sum_{l=1}^{k}(A_1A_2 e^{\bar{l}}, (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)\Delta_t e^l) = \sum_{l=1}^{k}((A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^{\bar{l}}, A_1A_2\Delta_t e^l) \leqslant$$

$$\sum_{l=1}^{k}[(3/4) \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^{\bar{l}} \|^2 + (1/3) \| A_1A_2\Delta_t e^l \|^2]$$

由文献[18]中的引理 4.2，可得

$$\sum_{l=1}^{k}(q^l, (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)\Delta_t e^l) \leqslant (\gamma/8\tau)(\| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^{k+1} \|^2 + \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^k \|^2) +$$

$$(1/2)\sum_{l=1}^{k-1} \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^l \|^2 + (1/2\tau\gamma)(\| q^k \|^2 + \| q^{k-1} \|^2) + \| q^2 \| \cdot \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^l \| +$$

$$(1/2)\sum_{l=2}^{k-1} \| \Delta_t q^l \|^2$$

$$\sum_{l=1}^{k}(p^l, A_1A_2\Delta_t e^l) \leqslant \sum_{l=1}^{k}[(3/4) \| p^l \|^2 + (1/3) \| A_1A_2\Delta_t e^l \|^2]$$

将上面估计式代入(48)式，可得

$$(\gamma/8\tau)(\| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^{k+1} \|^2 + \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^k \|^2) - (\gamma/4\tau) \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^l \|^2 \leqslant$$

$$\sum_{l=1}^{k}(243M_2^2/64) \| A_1A_2 e^l \|^2 + (5/4)\sum_{l=1}^{k-1} \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^l \|^2 + (3/4)\sum_{l=1}^{k} \| p^l \|^2 +$$

$$(3/8) \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^{k+1} \|^2 + (1/2\tau r)(\| q^k \|^2 + \| q^{k-1} \|^2) + \| q^2 \| \cdot \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^l \| +$$

$$(1/2)\sum_{l=2}^{k-1} \| \Delta_t q^l \|^2$$

当 $\tau \leqslant \gamma/6$ 时，由上式，可得

$$\| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^{k+1} \|^2 + \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^k \|^2 \leqslant$$

$$4 \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^1 \|^2 + (243M_2^2\tau/4\gamma)\sum_{l=1}^{k} \| A_1A_2 e^l \|^2 + (14\tau/\gamma)\sum_{l=1}^{k-1} \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^l \|^2 +$$

$$(12\tau/\gamma)\sum_{l=1}^{k} \| p^l \|^2 + (8/\gamma^2)(\| q^k \|^2 + \| q^{k-1} \|^2) + (16\tau/\gamma) \| q^2 \| \cdot \| (A_2\delta_x^2 + A_1\delta_y^2)e^l \| +$$

$$(8\tau/\gamma)\sum_{l=2}^{k-1} \| \Delta_t q^l \|^2 \tag{49}$$

由(44)式，可得

$$\| A_1A_2\mathrm{e}^k \|^2 + \| A_1A_2\mathrm{e}^{k-1} \|^2 \leqslant [(81M_2^2/32)+1+(1/2\gamma)]8\tau\sum_{l=1}^{k-1}\| A_1A_2\mathrm{e}^l \|^2 + c_4(h^4+\tau^2)^2 \quad (50)$$

将(50)式代入(49)式，注意到(13)，(40)式，可得

$$\| (A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^{k+1} \|^2 + \| (A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^k \|^2 \leqslant$$

$$(243/4\gamma)M_2^2\tau\{1+[(81M_2^2/32)+1+(1/2\gamma)]8\tau\}\sum_{l=1}^{k-1}\| A_1A_2\mathrm{e}^l \|^2 +$$

$$(14\tau/\gamma)\sum_{l=1}^{k-1}\| (A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^l \|^2 + c_5(\tau^2+h^4)^2 \quad (51)$$

其中 c_5 仅依赖于 c_1，c_2，γ，T.

记

$$E^k = \| (A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^{k+1} \|^2 + \| (A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^k \|^2 + \| A_1A_2\mathrm{e}^{k+1} \|^2 + \| A_1A_2\mathrm{e}^k \|^2$$

将(44)式与(51)式相加，可得

$$E^k \leqslant c_6\tau\sum_{l=1}^{k-1}E^l + c_7(h^4+\tau^2)^2,\ 1\leqslant k\leqslant m$$

其中：c_6 仅依赖于 M_2, T, γ，c_7 仅依赖于 c_1, c_2, γ, T.

由离散的 Grownwall 不等式，可得

$$E^m \leqslant c_7\mathrm{e}^{c_6T}(h^4+\tau^2)^2$$

从而可得

$$\| (A_2\delta_x^2+A_1\delta_y^2)\mathrm{e}^{m+1} \|^2 + \| A_1A_2\mathrm{e}^{m+1} \|^2 \leqslant c_7\mathrm{e}^{c_6T}(h^4+\tau^2)^2$$

由引理 2 和引理 3 可得

$$(4/9)\,|\,\mathrm{e}^{m+1}\,|_2^2 + (16/81)\| \mathrm{e}^{m+1} \|^2 \leqslant c_7\mathrm{e}^{c_6T}(h^4+\tau^2)^2$$

故由引理 4 可得

$$\| \mathrm{e}^{m+1} \|_\infty \leqslant c(h^4+\tau^2)$$

其中 c 仅依赖于 c_1, c_2, γ, T, M_2.

由数学归纳法，对于 $0\leqslant k\leqslant N$，$\| \mathrm{e}^k \|_\infty \leqslant c(h^4+\tau^2)$ 成立.

注　差分格式的理论分析不依赖于时间与空间的步长比，即空间和时间步长的取值没有相互的依赖性，只要空间和时间步长 h,τ 适当小，差分格式的解都依无穷范数收敛于问题的精确解.

3　数值算例

由于问题(1)－(3)精确解无法求出，在验证差分格式时，用粗网格与细网格相应点处差的绝对值作为该点处的误差. 下面采用两种方式验证差分格式的有效性.

1) 在问题(1)－(3)中取初值 $u_0(x, y)=\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$，参数 $\gamma=0.1$. 对于步长(h, h, τ)，定义差分格式的解 $u_{ij}^k(h, h, \tau)$.

记误差 $er(h, \tau)=\max\limits_{0\leqslant i,\ j\leqslant M}|\,u_{ij}^N(h, h, \tau)-u_{2i,\ 2j}^{4N}(h/2, h/2, \tau/4)\,|$. 数值计算结果如表 1 所示.

表 1　当 $T=0.1$ 时，(24)－(27)式的数值结果

τ	h	$er(h, \tau)$	$er(h, \tau)/(h^4+\tau^2)$
0.1/25	1/5	$2.352\mathrm{e}^{-3}$	$3.726\mathrm{e}^{2}$
0.1/100	1/10	$6.571\mathrm{e}^{-4}$	$1.041\mathrm{e}^{2}$
0.1/400	1/20	$2.945\mathrm{e}^{-4}$	$4.666\mathrm{e}^{1}$
0.1/1600	1/40	*	*

从表 1 可以看出，随着时间步长和空间步长的减小，$er(h, \tau)$ 和 $er(h, \tau)/(h^4+\tau^2)$ 都是单调递减的，

即能够找到一个正常数 C，使得 $er(h, \tau) \leqslant C(h^4 + \tau^2)$，表明数值解的误差精度达到了 $O(h^4 + \tau^2)$.

2) 在问题(1)—(3)中取初值 $u_0(x, y) = [10x^4(1-x)^4(x-0.5)][10y^4(1-y)^4(y-0.5)]$，时间 $T=0.1$，参数 $\gamma = 0.1$. 记阶数 $order = \log_2(er(h, \tau)/er(h/2, \tau/4))$. 取最佳步长比 $\tau = h^2$，计算差分格式(24)—(27). 具体数值结果见表 2.

表 2　差分格式 (24)—(27)式的最大模误差和收敛阶

τ	h	$er(h, \tau)$	$order$
1/100	1/10	1.303e^{-5}	4.051 4
1/400	1/20	7.858e^{-7}	3.885 5
1/1600	1/40	5.317e^{-8}	*
1/6400	1/80	*	*

从表 2 可以看出，差分格式在空间方向上四阶收敛，时间方向上二阶收敛.

参考文献：

[1] ADOMIAN G. Fisher-Kolmogorov Equation [J]. Applied Mathematics Letters, 1995, 8(2): 51—52.

[2] BERG J B. Uniqueness of Solutions for the Extended Fisher-Kolmogorov Equation [J]. Équations Aux Dérivées Partielles/ Partial Differential Equations, 1998, 326(4): 447—452.

[3] CONLON J G, DOERING C R. On Travelling Waves for the Stochastic Fisher-Kolmogorov-Petrovsky – Piscunov Equation [J]. Journal of Statistical Physics, 2005, 120(3—4): 421—477.

[4] ANDREU F, CASELLES V, MAZóN J M. A Fisher-Kolmogorov Equation with Finite Speed of Propagation [J]. Journal of Differential Equations, 2010, 248(10): 2528—2561.

[5] KUDRYASHOV N A, ZAKHARCHENKO A S. A Note on Solutions of the Generalized Fisher Equation [J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 32(3): 53—56.

[6] 马丽蓉，徐天华，帅维成. 二维 Extended Fisher-Kolmogorov 方程的全局吸引子 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2012, 34(8): 108—111.

[7] BELMONTE-BEITIA J, CALVO G F, PéREZ-GARCíA V M. Effective Particle Methods for Fisher-Kolmogorov Equations: Theory and Applications to Brain Tumor Dynamics [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2014 , 19(9): 3267—3283.

[8] MACíAS-DíAZ J E, PURI A. An Explicit Positivity-Preserving Finite-Difference Scheme for the Classical Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov Equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(9): 5829—5837.

[9] El-AZAB M S. An Approximation Scheme for a Nonlinear Diffusion Fisher's Equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 186(1): 579—588.

[10] BRANCO J R, FERREIRA J A, OLIVEIRA P. Numerical Methods for the Generalized Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov Equation [J]. Applied Numerical Mathematics, 2007, 57(1): 89—102.

[11] DANUMJAYA P, PANI A K. Numerical Methods for the Extended Fisher-Kolmogorov Equation [J]. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2006, 3(2): 186—210.

[12] APRAHAMIAN M, SOUROUJON D, TERSIAN S. Decreasing and Fast Solutions for a Second-Order Difference Equation Related to Fisher-Kolmogorov's Equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 363(1): 97—110.

[13] KHIARI N, OMRANI K. Finite Difference Discretization of the Extended Fisher-Kolmogorov Equation in Two Dimensions [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(11): 4151—4160.

[14] KADRI T, OMRANI K. A Second-Order Accurate Difference Scheme for an Extended Fisher – Kolmogorov Equation [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 61(12): 451—459.

[15] MACíAS-DíAZ J E. A Bounded Numerical Method for Approximating a Hyperbolic and Convective Generalization of

Fisher's Model with Nonlinear Damping [J]. Applied Mathematics Letters，2012，25(6)：946 - 951.

[16] 李　娟，高广花. 求解二维扩展 Fisher-Kolmogorov 方程的线性化紧差分格式 [J]. 江南大学学报(自然科学版)，2015，14(6)：862－865.

[17] SUN Z Z. On the Compact Difference Scheme for Heat Equation with Neumann Boundary Conditions [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations，2009，25(6)：1320－1341.

[18] LI J，SUN Z Z，ZHAO X. A Three Level Linearized Compact Difference Scheme for the Cahn-Hilliard Equation [J]. Science China Mathematics，2012，55(4)：805－826.

[19] 李　娟. Cahn-Hilliard 方程的高精度有限差分方法 [D]. 南京：东南大学，2009.

[20] ZHOU Y L. Applications of Discrete Functional Analysis of Finite Difference Method [M]. New York：International Academic Publishers，1990.

On Maximum Norm Error Analysis of a Linearized Compact Difference Scheme for the 2D Extended Fisher-Kolmogorov Equation

LI　Juan[1]，　GAO Guang-hua[2]

1. Department of Basic Course，Nanjing Audit University Jinshen College，Nanjing 210023，China；

2. College of Science，Nanjing University of Posts and Telecommunications，Nanjing 210023，China

Abstract：This article is related to the maximum norm error analysis of a three level linearized compact difference scheme for the 2D extended Fisher-Kolmogorov equation. The unique solvability and unconditional convergence of the difference solution are proved. The convergence order is $O(h^4+\tau^2)$ in the maximum norm. Numerical examples are given to demonstrate the theoretical results.

Key words：2D extend Fisher-Kolmogorov equation；compact difference scheme；nonlinear problem；linearization

责任编辑　张　构