DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.03.004

求解广义非凸变分不等式组的迭代算法①

艾 艺 红

重庆工商大学派斯学院 基础部,重庆 合川 401520

摘要:引入和研究了一类新的广义非凸变分不等式组,这类变分不等式组包括了一些已知和新的非凸变分不等式组及变分不等式作为特例. 利用投影技巧给出了一个求解此类非凸变分不等式组的迭代算法,最后证明了该算法在适当条件下收敛. 所得的结果修正了一些相关研究的错误结论,也推广改进了一些结论.

关 键 词:非凸变分不等式组;投影技巧;迭代算法;Lipschitzian 连续

中图分类号:**O177.91** **文献标志码**:**A** **文章编号**:1000-5471(2017)03-0022-05

文献[1]引入并探讨了一类新的非凸变分不等式,证明了该非凸变分不等式与不动点问题等价,并由此给出了一个求解非凸变分不等式解的预测 —— 校正投影算法. 然而,文献[1]所给出的等价关系并不能成立,因而结论也不能成立. 受此启发,本文修正了文献[1]的错误,同时引入并研究了一类更广泛的非凸变分不等式组问题,并将一些已知的和新的变分不等式问题作为特例,利用投影技巧,我们给出了一个求解此类非凸变分不等式组的迭代算法,最后证明了该算法在适当条件下收敛.

除非特别声明,本文通篇假设 H 是一个实 Hilbert 空间,其内积和范数分别为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$. K 是一个 H 中的非空凸集. 设 u 为 H 中的一点,我们以 $d_K(u)=\inf\|v-u\|$, $\forall v\in K$ 表示 u 到 K 的距离函数.

定义 1[2-3] 称 $N_K^P(u):=\{\xi\in H:\ \exists\alpha>0\ s.t.\ u\in P_K[u+\alpha\xi]\}$ 为 K 在 u 的近似正规锥,其中 $P_K[u]=\{u^*\in K:\ d_K(u)=\|u-u^*\|\}$.

近似正规锥 $N_K^P(u)$ 具有如下性质:

引理 1[2-3] 设 K 为 H 的非空闭子集,则 $\zeta\in N_K^P(u)$ 的充要条件是存在一个常数 $\alpha=\alpha(\zeta,u)>0$ 使得

$$\langle\zeta,v-u\rangle\leqslant\alpha\|v-u\|^2,\ \forall v\in K$$

定义 2[2-3] 称 $N_K^C(u)=\overline{co}[N_K^P(u)]$ 为 Clarke 正规锥,其中 $\overline{co}$ 表示凸集的闭包. 显然,$N_K^P(u)\subseteq N_K^C(u)$,且 $N_K^C(u)$ 是闭凸集,但 $N_K^P(u)$ 是凸集,却不一定是闭集.

定义 3[2-3] 对于给定的 $r\in(0,\infty]$,子集 K_r 被称为一致 r-近似正规集当且仅当每一个非零近似正规锥 $N_{K_r}^P(u)$ 都可以表示为一个 r-球,即对 $\forall u\in K_r$ 和 $0\neq\xi\in N_{K_r}^P(u)$,我们有

$$\left\langle\frac{\xi}{\|\xi\|},v-u\right\rangle\leqslant\left(\frac{1}{2r}\right)\|v-u\|^2,\ \forall v\in K_r$$

一致近似正规集是足够大的,它包含了凸集、p-凸集、H 中的 $C^{1,1}$ 子流形和许多其它的非凸集等. 显然,对于 $r=+\infty$,一致 r-近似正规集 K_r 与 K 等价.

引理 2[2-3] 设 K 为 H 的非空闭子集,$r\in(0,+\infty]$,如果 $K_r=\{u\in H:\ d_K(u)<r\}$ 是一致近似正规集,则

(i) $\forall u\in K_r$,$P_{K_r}(u)\neq\varnothing$.

---

① 收稿日期:2016-06-12

基金项目:重庆市教委教改基金项目(153192).

作者简介:艾艺红(1977-),重庆人,讲师,硕士,主要从事变分不等式及其最优化算法的研究.

(ii) $\forall r' \in (0, r)$，P_{K_r} 在 $K_{r'}$ 上是 δ-Lipschitz 连续算子，其中 $\delta = \dfrac{r}{r-r'}$.

(iii) 近似正规锥 $N_{K_r}^P(u)$ 是闭的集值映射.

如果 $r = r' = +\infty$，即 $K_r = K$，那么众所周知算子 P_K 是在 K 上的非扩张映射.

定义 4[1]　设 $T, A: K_r \longrightarrow K_r$ 是单值映射，称映射 $N: K_r \times K_r \longrightarrow K_r$

1) 在第一变元关于 T 为 γ-强单调的，如果存在常数 $\gamma > 0$ 使得

$$\langle N(Tx_1, \cdot) - N(Tx_2, \cdot), x_1 - x_2 \rangle \geqslant \gamma \| x_1 - x_2 \|^2 \qquad \forall x_1, x_2 \in K_r$$

2) 在第一变元为 μ-Lipschitzian 连续的，如果存在常数 $\mu > 0$，使得

$$\| N(Tx_1, \cdot) - N(Tx_2, \cdot) \| \leqslant \mu \| Tx_1 - Tx_2 \| \qquad \forall x_1, x_2 \in K_r$$

注：当 $N(\cdot, \cdot) = T(\cdot)$ 时，该定义就退变成 γ-强单调和 μ-Lipschitzian 连续的定义.

文献[1]介绍了一类新的非凸变分不等式问题：设 K_r 为 H 中的一致近似正规子集，$T, A: K_r \longrightarrow K_r$，$N: K_r \times K_r \longrightarrow K_r$ 是单值映射，$\sigma: K_r \longrightarrow R$ 为一函数且满足 $0 \leqslant \sigma \leqslant \dfrac{\| N(Tu, Au) \|}{2r}$，求 $u \in K_r$，使得

$$\langle N(Tu, Au), v-u \rangle + \sigma \| v-u \|^2 \geqslant 0, \ \forall v \in K_r \tag{1}$$

引理 3[1]　给定 $z \in H$，$u \in K_r$ 满足不等式

$$\langle u-z, v-u \rangle + \sigma \| v-u \|^2 \geqslant 0, \ \forall v \in K_r \tag{2}$$

当且仅当 $u = P_{K_r} z$，其中 P_{K_r} 是 H 在一致近似正规子集 K_r 上的投影，这里 $0 \leqslant \sigma \leqslant \dfrac{\| u-z \|}{2r}$.

在这里，我们指出文献[1]的引理 3 的证明有错误. 为了便于说明，我们先把文献[1]引理 3 的证明再叙述一遍如下：

证　假设 $u \in K_r$，$u \neq z$ 是问题(2)的一个解，那么，利用定义 3，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle u-z, v-u \rangle + \sigma \| v-u \|^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \\
&\langle \frac{z-u}{\| u-z \|}, v-u \rangle \leqslant \frac{\sigma}{\| u-z \|} \| v-u \|^2 \leqslant \frac{1}{2r} \| v-u \|^2 \Leftrightarrow \\
&z-u \in N_{K_r}^P(u) \Leftrightarrow \\
&z \in (I + N_{K_r}^P)(u) \Leftrightarrow \\
&u = (I + N_{K_r}^P)^{-1} z \Leftrightarrow \\
&u = P_{K_r} z
\end{aligned}$$

其中 I 表示恒等算子，同时我们也用了这个众所周知的事实 $P_{K_r} = (I + N_{K_r}^P)^{-1}$.

如果 $u = z$，我们有

$$0 = z-u \in N_{K_r}^P(u) \Leftrightarrow z \in (I + N_{K_r}^P)(u) \Leftrightarrow u = P_{K_r} z$$

证毕.

事实上，通过仔细察看该证明过程，不难发现该结论只能是一个充分条件而不是充要条件. 因为依据定义 3，我们有

$$z-u \in N_{K_r}^P(u) \Rightarrow \langle \frac{z-u}{\| u-z \|}, v-u \rangle \leqslant \frac{1}{2r} \| v-u \|^2$$

但这并不能推出：

$$\langle \frac{z-u}{\| u-z \|}, v-u \rangle \leqslant \frac{\sigma}{\| u-z \|} \| v-u \|^2$$

因为 $0 \leqslant \sigma \leqslant \dfrac{\| u-z \|}{2r}$，当然也就不能推出

$$\langle u-z, v-u \rangle + \sigma \| v-u \|^2 \geqslant 0$$

所以要想引理 3 成立，当且仅当 $\sigma = \dfrac{\| u-z \|}{2r}$ 时才行. 因此，文献[1]利用引理 3 得出问题(1)等同于一个不动点问题，即

$$u = P_{K_r}[u - \rho N(Tu, Au)] \tag{3}$$

其中常数 $\rho > 0$，失去了理论依据. 所以，要想文献[1]的结论成立，就应该修改问题(1)为：

$$\langle N(Tu, Au), v - u\rangle + \frac{\| N(Tu, Au)\|}{2r}\| v - u\|^2 \geqslant 0, \ \forall v \in K_r \tag{4}$$

类似的道理，文献[2-3]中所提出的非凸变分不等式问题也应该做相应的修改才行.

受到最近相关文献在非凸变分不等式方面研究的启发，本文提出一类新的非凸变分不等式组.

设 K_r 为 H 中的一致近似正规子集，T_1, T_2, A_1, A_2：$K_r \longrightarrow K_r$，M, N：$K_r \times K_r \longrightarrow K_r$ 是单值映射，现考虑一类新的非凸变分不等式组问题：求 $x, y \in K_r$，使得

$$\begin{cases}\langle \rho N(T_1 y, A_1 y) + x - y, v - x\rangle + \dfrac{\| \rho N(T_1 y, A_1 y) + x - y\|}{2r}\| v - x\|^2 \geqslant 0 \\ \langle \tau M(T_2 x, A_2 x) + y - x, v - y\rangle + \dfrac{\| \tau M(T_2 x, A_2 x) + y - x\|}{2r}\| v - y\|^2 \geqslant 0\end{cases} \tag{5}$$

如果 $N(\cdot, \cdot) = M(\cdot, \cdot) = T(\cdot)$，问题(5)就退化成文献[4]所研究的非凸变分不等式问题：求 $x \in K_r$，使得

$$\langle Tx, v - x\rangle + \frac{\| Tx\|}{2r}\| v - x\|^2 \geqslant 0$$

类似地，适当选取映射 M, N, T_1, T_2, A_1, A_2 以及集合 K_r，可以得到问题(4)以及相关文献所研究的问题作为特例，还可以得到一些新的非凸变分不等式问题作为问题(5)的特例.

利用文献修正的引理3，显然问题(5)等同于一个不动点问题，即：

$$\begin{cases}x = P_{k_r}[y - \rho N(T_1 y, A_1 y)] \\ y = P_{k_r}[x - \tau M(T_2 x, A_2 x)]\end{cases}$$

其中常数 $\rho, \tau > 0$. 利用这一等价关系，我们提出如下迭代算法：

算法1 对于任意给定的初始点 $x_0, y_0 \in K_r$，由以下迭代格式计算$\{x_n\}$和$\{y_n\}$：

$$\begin{cases}x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n P_{K_r}[y_n - \rho N(T_1 y_n, A_1 y_n)] \\ y_n = P_{k_r}[x_n - \tau M(T_2 x_n, A_2 x_n)]\end{cases} \tag{6}$$

其中 $\alpha_n \in [0, 1]$，$n = 0, 1, 2, \cdots$.

引理4[5-7] 假设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$是三个非负实数序列且满足下面条件：

$$a_{n+1} \leqslant (1 - t_n)a_n + b_n + c_n, \ \forall n \geqslant 0$$

其中 $t_n \in (0, 1)$，$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$，$b_n = 0(t_n)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \leqslant \infty$，那么 $\alpha_n \to 0 (n \to \infty)$

下面讨论算法1的收敛性.

定理1 设 K_r 为 H 中的一致近似正规子集，P_{K_r} 在 $K_{r'}$ 上是 δ-Lipschitz 连续的，其中 $\delta = \dfrac{r}{r - r'}$，映射 N 在第一变元关于 T_1 为 γ_1 一强单调并在第一变元为 μ_1-Lipschitzian 连续的，在第二变元为 μ_2-Lipschitzian 连续的；M 在第一变元关于 T_2 为 γ_2 -强单调，在第一变元 l_1-Lipschitz 连续，在第二变元为 l_2-Lipschitz 连续；T_1 为 K_1-Lipschitz 连续；T_2 为 K_2-Lipschitzian 连续；A_1 为 λ_1-Lipschitz 连续；A_2 为 λ_2-Lipschitz 连续；对于任意给定的 $x_0, y_0 \in K_r$，如果满足条件：

(i) $\alpha_n \in (0, 1)$，$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$，

(ii) $0 < \rho < \dfrac{r'}{1 + \| N(T_1 y, A_1 y)\|}$，$0 < \tau < \dfrac{r'}{1 + \| M(T_2 x, A_2 x)\|}$，

(iii) $\theta_1 \theta_2 < \dfrac{1}{\delta^2}$.

其中

$$\theta_1 = \sqrt{1 - 2\rho\gamma_1 + \rho^2 u_1^2 k_1^2} + \rho\mu_2\lambda_1, \ \theta_2 = \sqrt{1 - 2\tau\gamma_2 + \tau^2 l_1^2 k_2^2} + \tau l_2 \lambda_2$$

则由算法1所生成的近似解序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$收敛到问题(5)的解：$x^*, y^* \in K_r$.

证　设 $x^*, y^* \in K_r$ 是问题(5)的解，即

$$\begin{cases} x^* = P_{k_r}[y^* - \rho N(T_1 y^*, A_1 y^*)] \\ y^* = P_{k_r}[x^* - \tau M(T_2 x^*, A_2 x^*)] \end{cases}$$

由(6)式可得，

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| = &\|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n P_{k_r}[y_n - \rho N(T_1 y_n, A_1 y_n)] - \\ &(1-\alpha_n)x^* - \alpha_n P_{k_r}[y^* - \rho N(T_1 y^*, A_1 y^*)]\| \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|x_n - x^*\| + \alpha_n \|P_{k_r}[y_n - \rho N(T_1 y_n, A_1 y_n)] - P_{k_r}[y^* - \rho N(T_1 y^*, A_1 y^*)]\| \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|x_n - x^*\| + \alpha_n\delta\|y_n - \rho N(T_1 y_n, A_1 y_n) - [y^* - \rho N(T_1 y^*, A_1 y^*)]\| \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|x_n - x^*\| + \alpha_n\delta\|y_n - y^* - \rho[N(T_1 y_n, A_1 y_n) - N(T_1 y^*, A_1 y_n)]\| + \\ &\alpha_n\delta\rho\|N(T_1 y^*, A_1 y_n) - N(T_1 y^*, A_1 y^*)\| \end{aligned} \tag{7}$$

这里用到了算子 P_{k_r} 在 $K_{r'}$ 上是 δ-Lipschitz 连续的，其中 $\delta = \dfrac{r}{r-r'}$.

由 N, T_1, A_1 的 Lipschitzian 连续性和 N 在第一变元关于 T_1 为 γ_1 一强单调的定义有

$$\begin{aligned} &\|y_n - y^* - \rho[N(T_1 y_n, A_1 y_n) - N(T_1 y^*, A_1 y_n)]\|^2 \leqslant \\ &\|y_n - y^*\|^2 - 2\rho\gamma_1\|y_n - y^*\|^2 + \rho^2\mu_1^2\|T_1 y_n - T_1 y^*\|^2 \leqslant \\ &\|y_n - y^*\|^2 + \rho^2\mu_1^2 k_1^2\|y_n - y^*\|^2 - 2\rho\gamma_1\|y_n - y^*\|^2 = \\ &[1 - 2\rho\gamma_1 + \rho^2\mu_1^2 k_1^2]\|y_n - y^*\|^2 \end{aligned}$$

即

$$\|y_n - y^* - \rho[N(T_1 y_n, A_1 y_n) - N(T_1 y^*, A_1 y_n)]\| \leqslant \sqrt{1 - 2\rho\gamma_1 + \rho^2\mu_1^2 k_1^2}\,\|y_n - y^*\| \tag{8}$$

$$\|N(T_1 y^*, A_1 y_n) - N(T_1 y^*, A_1 y^*)\| \leqslant \mu_2\|A_1 y_n - A_1 y^*\| \leqslant \mu_2\lambda_1\|y_n - y^*\| \tag{9}$$

由(7),(8),(9)式有

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant (1-\alpha_n)\|x_n - x^*\| + \alpha_n\delta\sqrt{(1 - 2\rho\gamma_1 + \rho^2 u_1^2 k_1^2}\,\|y_n - y^*\| + \alpha_n\delta\rho\mu_2\lambda_1\|y_n - y^*\| \tag{10}$$

令 $\theta_1 = \sqrt{1 - 2\rho\gamma_1 + \rho^2\mu_1^2 k_1^2} + \rho\mu_2\lambda_1$，那么(10)式可改写成

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant (1-\alpha_n)\|x_n - x^*\| + \alpha_n\delta\theta_1\|y_n - y^*\| \tag{11}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \|y_n - y^*\| = &\|P_{k_r}[x_n - \tau M(T_2 x_n, A_2 x_n)] - P_{k_r}[x^* - \tau M(T_2 x^*, A_2 x^*)]\| \leqslant \\ &\delta\|x_n - \tau M(T_2 x_n, A_2 x_n) - [x^* - \tau M(T_2 x^*, A_2 x^*)]\| + \\ &\delta\tau\|M(T_2 x^*, A_2 x_n) - M(T_2 x^*, A_2 x^*)\| \end{aligned} \tag{12}$$

这里用到了 P_{k_r} 在 $K_{r'}$ 上是 δ-Lipschitz 连续的，其中 $\delta = \dfrac{r}{r-r'}$.

$$\begin{aligned} &\|x_n - x^* - \tau[M(T_2 x_n, A_2 x_n) - M(T_2 x^*, A_2 x_n)]\|^2 \leqslant \\ &\|x_n - x^*\|^2 - 2\tau\gamma_2\|x_n - x^*\|^2 + \tau^2 l_1^2\|T_2 x_n - T_2 x^*\|^2 \leqslant \\ &[1 - 2\tau\gamma_2 + \tau^2 l_1^2 k_2^2]\|x_n - x^*\|^2 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\|M(T_2 x^*, A_2 x_n) - M(T_2 x^*, A_2 x^*)\| \leqslant l_2\|A_2 x_n - A_2 x^*\| \leqslant \\ &l_2\lambda_2\|x_n - x^*\| \end{aligned} \tag{14}$$

这里用到了 M, T_2, A_2 的 Lipschitizan 连续性和 M 在第一变元关于 T_2 为 γ_2 -强单调的定义.

由(12),(13),(14)式有

$$\|y_n - y^*\| \leqslant (\delta\sqrt{1 - 2\tau\gamma_2 + \tau^2 l_1^2 k_2^2} + \delta\tau l_2\lambda_2)\|x_n - x^*\| \tag{15}$$

令 $\theta_2 = \sqrt{1 - 2\tau\gamma_2 + \tau^2 l_1^2 k_2^2} + \tau l_2\lambda_2$

则(15)式可写成

$$\|y_n - y^*\| \leqslant \delta\theta_2\|x_n - x^*\| \tag{16}$$

将(16)式代入(11)式可得

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - x^* \| &\leqslant (1-\alpha_n) \| x_n - x^* \| + \alpha_n \delta^2 \theta_1 \theta_2 \| x_n - x^* \| = \\ &[1-\alpha_n(1-\delta^2\theta_1\theta_2)] \| x_n - x^* \| \end{aligned} \tag{17}$$

在定理1的假设条件下根据引理4就有 $\| x_n - x^* \| \to 0 (n \to \infty)$ 以及 $\| y_n - y^* \| \to 0 (n \to \infty)$，即序列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$收敛到问题(5)的解 $x^*, y^* \in K_r$，证毕.

参考文献:

[1] 殷 羽. 求解一类非凸变分不等式的近似点算法[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(8): 29-32.

[2] NOOR M A. An Extragradien Algorithm for Solving General Nonconvex Variation Inequalities [J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(8): 917-921.

[3] NOOR M A. On an Implicit Method for Nonconvex Variational Inequalities [J]. J Optim Theory Appl, 2010, 147(2): 411-417.

[4] BALOOEE J. Projection Method Approach for General Regularized Non-convex Variational Inequalities [J]. J Optim Theory Appl, 2013, 159(1): 192-209.

[5] WAN B, ZHAN X G. A Proximal Point Algorithm for a System of Generalized Mixed Variation Inequalities [J]. J Syst Sci Complex, 2012, 25(2): 964-972.

[6] CHANG S S, JOSEPH L H, Chan C K. Generalized System for Relaxed Cocoercive Variational Inequalities in Hilbert Spaces[J]. Appl. Math. Lett, 2007, 20(3): 329-334.

[7] HUANG Z Y, NOOR M A. An Explicit Projection Method for a System of Nonlinear Variational Inequalities with Different (γ, R)-Cocoercive Mappings [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 191(2): 356-361.

[8] BALOOEE J, KIM J K. Some Remarks on Regularized Nonconvex Variational Inequalities [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2013(1): 531-547.

[9] 张 亮, 吴至友. 非凸变分不等式的四步投影算法及其收敛性分析[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(10): 109-113.

Iterative Methods for a System of Generalized Nonconvex Variational Inequalities

AI Yi-hong

Section of Foundation Education, Pass College of Chongqing Technology and Business University, Hechuan Chongqing 401520, China

Abstract: In this paper, a new system of generalized nonconvex variational inequalities have been introduced and studied. This class of system of variational inequalities includes certain known and new systems of nonconvex variational inequalities as special cases. By means of the projection technique, we have employed a new interative method for the system of generalized nonconvex variational inequalities. It has been proved that the new interative method converges under certain conditions. The algorithm and results present in this paper not only fixed the incorrect algorithms and results existing in the related records, but also improved and extended the previously known results.

Key words: system of nonconvex variational inequalities; projection technique; interative method; Lipschitzian continuous

责任编辑 张 枸