DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2017.03.006

关于±1 在多项式不可约性中的应用①

张　萍

南充职业技术学院 人文艺术系，四川 南充 637131

摘要：证明了整系数多项式在 5 个以上的点处取±1，则必全取 1 或者全取－1. 作为应用，证明了 $n(n\geqslant 8)$次整系数多项式若在$\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个以上的整数处取值为±1，则其在有理数上不可约等几个结论.

关　键　词：不可约多项式；有理数域；偶函数

中图分类号：O151　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000－5471(2017)03－0034－05

关于多项式不可约性，特别是有理数域上多项式不可约性的研究由来已久，并作为线性代数和近世代数的基础知识在文献[1-8]中均有详细论述，特别是艾森斯坦判别法的引入为我们判定有理数域上的多项式不可约性提供了方便. 近来，许多关于这方面的研究及应用仍备受关注，参见文献[9－11]. 然而，如何判定一个多项式是否可约依旧十分困难，本文利用正负一的特殊性质研究一类整系数多项式在有理数的不可约性，给出了一些多项式不可约性的判定条件，进一步丰富了这方面的研究.

引理 1　设整系数多项式 $f(x)$ 在 4 个不同整数处的取值为 1，则 $f(x)$ 在任意整数处的取值不可能为－1.

证　设整数 $a_1<a_2<a_3<a_4$ 满足 $f(a_i)=1$，$1\leqslant i\leqslant 4$，则存在整系数多项式 $g(x)$ 使得 $f(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)g(x)$. 若存在 $a\in Z$，$f(a)=-1$，则

$$-2=f(a)-1=(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)g(a)\tag{1}$$

从而对任意的 $1\leqslant i\leqslant 4$，有$(a-a_i)\mid 2$. 所有 $a-a_i=\pm 1$ 或者 $a-a_i=\pm 2$. 而 $a_1<a_2<a_3<a_4$，所以 $a-a_i$，$1\leqslant i\leqslant 4$ 互不相同，且易知

$$\begin{cases}a-a_1=2\\ a-a_2=1\\ a-a_3=-1\\ a-a_4=-2\end{cases}$$

此时，$(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)=4$，不可能整除－2，与式(1)矛盾. 证毕.

对偶地，我们可以证明下面引理：

引理 2　设整系数多项式 $f(x)$ 在 4 个不同整数处的取值为－1，则 $f(x)$ 在任意整数处的取值不可能为 1.

引理 3　设整系数多项式 $f(x)$ 在 5 个不同整数处的取值为 ±1，则必全取 1 或者全取 －1.

证　假设命题不成立，则存在 5 个不同整数，设为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，满足存在 $a_i,a_j,f(a_i)=1$，$f(a_j)=-1$. 下面分 4 种情况讨论如下：

---

① 收稿日期：2016－07－20

作者简介：张　萍(1982－)，女，四川南充人，硕士，讲师，主要从事高等数学教育和数学建模研究.

第 1 种情形：4 个点处取 1，1 个点处取 -1. 这种情况已在引理 1 中证明了.

第 2 种情形：3 个点处取 1，2 个点处取 -1. 不防设 $f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=1$，$f(a_4)=f(a_5)=-1$，且 $a_1<a_2<a_3$，$a_4<a_5$，则存在整系数多项式 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 使得

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_1(x)+1 \tag{2}$$

$$f(x)=(x-a_4)(x-a_5)f_2(x)-1 \tag{3}$$

取 $x=a_4$，a_5 代入(2) 式，得

$$\begin{cases}(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)f_1(a_4)=-2\\(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)f_2(a_5)=-2\end{cases} \tag{4}$$

从而 $(a_4-a_i)\mid 2$，$(a_5-a_i)\mid 2$，$1\leqslant i\leqslant 3$.

注意 $a_5-a_1>a_5-a_2>a_5-a_3$，且 $a_5-a_1>a_4-a_1>a_4-a_2>a_4-a_3$. 得

$$\begin{cases}a_5-a_1=2\\a_5-a_2=1\\a_5-a_3=-1\\a_4-a_1=1\\a_4-a_2=-1\\a_4-a_3=-2\end{cases} \tag{5}$$

由此可知 $a_3-a_2=(a_5-a_2)-(a_5-a_3)=1-(-1)=2$，以及 $a_3-a_2=(a_4-a_2)-(a_4-a_3)$，从而 $-1-(-2)=1$，矛盾.

第 3 种情形：3 个点处取 -1，2 个点处取 1. 类似第 2 种情形.

第 4 种情形：4 个点处取 -1，1 个点处取 1. 类似第 1 种情形.

因此，$f(x)$ 在 5 个不同整数处的取值为 ± 1，则必全取 1 或者全取 -1. 证毕.

利用引理 1，2 我们可以证明下面的结论.

命题 1　设整数 $n\geqslant 12$，并且 n 次整系数多项式 $f(x)$ 在 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个以上的整数处取值为 ± 1，则 $f(x)$ 在有理数上不可约.

证　因为 $n\geqslant 12$，所以 $f(x)$ 在 7 个以上整数处的取值为 ± 1. 因此 $f(x)$ 在至少 4 个整数处的取值为 1 或者 -1. 我们只对取值为 1 的情形进行证明，取值为 -1 的情形类似可证.

由引理 1，2 可知 $f(x)$ 在这些整数点处取值相等，全为 1，则存在整系数多项式 $g(x)$ 使得

$$f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_{[\frac{n}{2}]+1})g(x)+1 \tag{6}$$

如果 $f(x)$ 在有理数域上可约，则存在次数大于 0 的整系数多项式 $p(x)$，$q(x)$ 使得 $f(x)=p(x)q(x)$. 即 $p(a_i)q(a_i)=1$，$1\leqslant i\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$. 所以 $p(a_i)=q(a_i)=1$ 或者 -1，$1\leqslant i\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

同理，由引理1,2可知 $p(x)$,$q(x)$ 在这些整数处的取值全为1或者全为-1. 下面分2种情形进行讨论.

第 1 种情形全为 1. 此时 $(x-a_1)\cdots(x-a_{[\frac{n}{2}]+1})\mid(p(x)-1)$，且

$$(x-a_1)\cdots(x-a_{[\frac{n}{2}]+1})\mid(q(x)-1)$$

然而 $\deg p(x)+\deg q(x)=n$. 若 $\deg p(x)\leqslant\deg q(x)$，则 $\deg p(x)<\left[\frac{n}{2}\right]+1$，从而 $p(x)=1$，矛盾. 若 $\deg q(x)\leqslant\deg p(x)$，则 $q(x)=1$，也矛盾.

第 2 种情形全为 -1. 类似于第 1 种情形.

因此 $f(x)$ 在有理数上不可约. 证毕.

实际上，利用引理 3 我们可以将上述命题进一步推广.

命题2 设整数 $n \geqslant 8$，并且 n 次整系数多项式 $f(x)$ 在 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个以上的整数处取值为 ± 1，则 $f(x)$ 在有理数上不可约.

证 因为 $n \geqslant 8$，所以 $f(x)$ 在至少5个以上的整数处 $a_1, a_2, \cdots, a_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ 的取值为 ± 1. 由引理3可知 $f(x)$ 在这些点处的取值全为1或者全为 -1. 下面分2种情形进行讨论.

第1种情形全为1. 若 $f(x)$ 可约，则存在整系数多项式 $g(x)$，$h(x)$ 使得 $f(x)=g(x)h(x)$，且 $1 \leqslant \deg h(x) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$，则 $g(a_i)h(a_i)=1$，从而 $g(a_i)=h(a_i)=1$ 或者 -1，$1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$. 再次利用引理3可知 $g(x)$，$h(x)$ 在这些整数处的取值全为1或者全为 -1. 不妨设为1，则 $h(x)$ 在 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个点处取值为1，而 $1 \leqslant \deg h(x) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$，从而 $h(x)=1$，矛盾.

第2种情形全为 -1. 类似第1种情形.

因此，$f(x)$ 在有理数上不可约. 证毕.

命题3 设整系数多项式 ax^2+bx+1 在有理数域上不可约，并且设 $\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个不同的整数，$n \geqslant 7$，则多项式 $f(x)=a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1$ 在有理数域上不可约. 实际上，次数 n 的下界还可缩小为5.

证 我们只需证明最后一句. 假设 $n \geqslant 5$. 由定义可知 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=1$. 如果 $f(x)$ 在有理数域上可约，则存在次数大于0的整系数多项式 $p(x)$，$q(x)$ 使得 $f(x)=p(x)q(x)$. 即 $p(a_i)q(a_i)=1$，$1 \leqslant i \leqslant n$. 所以 $p(a_i)=q(a_i)=1$ 或者 -1，$1 \leqslant i \leqslant n$.

同理由引理3可知 $p(x)$，$q(x)$ 在这些整数处的取值全为1或者全为 -1. 下面分2种情形进行讨论.

第1种情形：$p(a_i)=q(a_i)=1$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则 $(x-a_1)\cdots(x-a_n) \mid (p(x)-1)$，$(x-a_1)\cdots(x-a_n) \mid (q(x)-1)$. 而 $\deg p(x)+\deg q(x)=2n$，且 $\deg p(x) \geqslant 1$，$\deg q(x) \geqslant 1$ 所以存在整数 c，d 使得 $p(x)=c(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1=c\varphi(x)+1$，$q(x)=d(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1=d\varphi(x)+1$. 从而 $ax^2+bx+1=(cx+1)(dx+1)$，与题设矛盾.

第2种情形：$p(a_i)=q(a_i)=-1$，$1 \leqslant i \leqslant n$. 类似于第1种情况.

因此，$f(x)=a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1$ 在有理数域上不可约. 证毕.

为了证明下面的命题，我们首先引入2个引理.

引理4 设整系数多项式 $f(x)$ 是偶函数，则对任意的 $k \in Z$，$f(\sqrt{-1}k)$ 不可能等于 $\pm\sqrt{-1}$.

证 因为 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)=d_{2m}x^{2m}+d_{2m-2}x^{2m-2}+\cdots+d_2x^2+d_0$，其中 $d_{2i} \in Z$，$0 \leqslant i \leqslant m$. 所以 $f(\sqrt{-1}k)=d_{2m}(\sqrt{-1}k)^{2m}+d_{2m-2}(\sqrt{-1}k)^{2m-2}+\cdots+d_2(\sqrt{-1}k)^2+d_0$ 也是整数. $f(\sqrt{-1}k)$ 不可能等于 $\pm\sqrt{-1}$. 证毕.

引理5 若 $f(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k^2)+1$，则 $f(x)$ 有 n 个不同负实根.

证 为方便起见，记 $a_k=k^2$，则 $f(x)=(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)+1$，易知对任意的 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，$a_j-a_i > 2$. 得

$$f(-a_2+1)=(a_1-a_2+1)(a_3-a_2+1)\cdots(a_n-a_2+1)<0 \tag{7}$$

$f(-a_2)=f(-a_1)=1>0$. 显然 $f(x)$ 是连续函数，所以 $f(x)$ 在每个区间 $(-a_2, -a_2+1)$ 与 $(-a_2+1, -a_1)$ 中至少存在一个零点，即 $f(x)$ 在 $(-a_2, -a_1)$ 中至少存在2个零点.

下面分2种情形进行讨论.

第1种情形：n 为偶数. 注意到

$$\begin{cases} f(-a_{2k}+1)=(a_1-a_{2k}+1)\cdots(a_{2k-1}-a_{2k}+1)\cdots(a_n-a_{2k}+1)+1<0 \\ f(-a_{2k})=f(-a_{2k-1})=1>0 \end{cases} \tag{8}$$

在区间$(-a_{2k},-a_{2k}+1)$与$(-a_{2k}+1,-a_{2k-1})$中各至少存在 1 个零点，即 $f(x)$ 在$(-a_{2k},-a_{2k-1})$中至少存在 2 个零点. 因此 $f(x)$ 有 n 个不同实根.

第 2 种情形：n 为奇数，类似于第 1 种情形同理可证.

因此，$f(x)$ 有 n 个不同负实根. 证毕.

命题 4　设 $f(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}(x^2+k^2)+1$，则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

证　假设 $f(x)$ 在有理数域上可约，则存在整系数多项式 $u(x)$，$v(x)$，使得 $f(x)=u(x)v(x)$，$0<\deg u(x)<2n$. 由题设可知 $f(\sqrt{-1}k)=u(\sqrt{-1}k)v(\sqrt{-1}k)=1$，从而

$$(u(\sqrt{-1}k),v(\sqrt{-1}k))\in\{(-1,-1),(1,1),(a+b\sqrt{-1},c-d\sqrt{-1})\} \tag{9}$$

其中 $a,b,c,d\in Z$，且 $ac-bd=1$，$ad+bc=1$. 又 $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=1$，所以 $a^2+b^2=c^2+d^2=1$，从而

$$\begin{cases} ac-bd=1 \\ ad+bc=1 \\ a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \end{cases} \tag{10}$$

由此可知 $a=c=0$，$bd=-1$ 或者 $ac=\pm1$，$b=d=0$，即 $u(\sqrt{-1}k)\in\{-1,1,-\sqrt{-1},\sqrt{-1}\}$. 由引理 5 可知多项式$\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k^2)+1$ 的根都是负实根，那么 $f(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}(x^2+k^2)+1$ 的根都是纯虚数，并成对出现，不妨设为 $\xi_1,\cdots,\xi_n,\overline{\xi_1},\cdots,\overline{\xi_n}$，此时有 $u(\xi_i)v(\xi_i)=0$，$u(\overline{\xi_i})v(\overline{\xi_i})=0$，$1\leqslant i\leqslant n$. 因 $0<\deg u(x)<2n$，不妨设 $u(x)=(x-\xi_1)(x-\overline{\xi_1})\cdots(x-\xi_t)(x-\overline{\xi_t})$，显然 $u(x)$ 是偶函数，由引理 4 可知 $u(\sqrt{-1}k)$ 只能为 ±1. 由定义可知 $u(\sqrt{-1}x)$ 为整系数多项式.

当 $n\geqslant3$ 时，$u(\sqrt{-1}x)$ 在 6 个以上的整数点处取 ±1，由引理 3 可知 $u(\sqrt{-1}x)$ 在这些点处取值全为 1 或者 -1，即 $u(\sqrt{-1}k)=1$，$1\leqslant k\leqslant 2n$ 或者 $u(\sqrt{-1}k)=-1$，$1\leqslant k\leqslant 2n$. 而这与 $\deg u(x)<2n$ 矛盾. 所以 $n\geqslant3$ 时，$f(x)$ 在有理数域上不可约.

当 $n=1$ 时，显然成立. 当 $n=2$ 时，$f(x)=(x^2+1)(x^2+4)+1=x^4+5x^2+5$，由艾森斯坦判别法可知 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

因此，$f(x)$ 在有理数域上不可约. 证毕.

本文结论为有理数域上多项式的不可约性判定提供了一个有效的办法，成为艾森斯坦判别法的补充. 从这些结论可以看出，有理数域多项式的不可约性依赖于它们取值为正负一的点构成集合的性质，总结出了一些特殊多项式在有理数域上不可约性的判别法，并由此对这些特殊多项式的不可约性进行了证明.

参考文献：

[1]　李炯生，查建国. 线性代数 [M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，1989.

[2]　彭国华，李德琅. 线性代数(英文版) [M]. 北京：高等教育出版社，2006.

[3]　邱维声. 高等代数(下册) [M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2003.

[4]　邱维声. 高等代数(下册)——大学高等代数课程创新教材 [M]. 北京：清华大学出版社，2010.

[5]　谢邦杰. 线性代数 [M]. 北京：人民教育出版社，1978.

[6] 许甫华，张贤科．高等代数解题方法［M］．北京：清华大学出版社，2001．

[7] 许以超．线性代数与矩阵论［M］．2版．北京：高等教育出版社，2008．

[8] 张禾瑞，郝鈵新．高等代数［M］．北京：高等教育出版社，1984．

[9] 冯爱芳，刘祖华．关于多项式的根的几个应用［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(2)：164－168．

[10] 罗永超，畅　敏，张　洪．关于整系数多项式的不可约性与有理根存在性的新判别法［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(4)：1－4．

[11] 张文华，姜小龙．3次或4次不可约多项式的分裂域和根式塔［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2011，36(10)：88－91．

On Applications of ±1 to Irreducible Property of Polynomials

ZHANG　Ping

Department of Humanities and Arts, Nanchong Professional Technic College, Nanchong Sichuan 637131, China

Abstract: First, we prove that, for an integral polynomial, the value is the same for these points if it gets value ±1 at more than five integral points. With the applications, we have prove that, for an integral polynomial with degree $n(n \geqslant 8)$, it is irreducible in the field of rational numbers if it gets value ±1 at more than $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ integral points.

Key words: integral polynomial; the field of rational numbers; even function

责任编辑　夏　娟