

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.03.007

# 半定规划松弛求解新方法及 在通信问题中的应用<sup>①</sup>

马纪英<sup>1</sup>, 陈文燕<sup>2</sup>, 贾慧羨<sup>1</sup>

1. 石家庄邮电职业技术学院 基础课教学部, 石家庄 050021; 2. 河北大地建设科技有限公司, 石家庄 050021

**摘要:** 半定规划因其约束条件的合理性, 比线性规划具有更强的实用性, 也是诸多领域中广泛采用的优化算法. 该文在传统半定规划数学模型的基础上, 提出了一种新的松弛求解方法. 并且为了解决多址通信干扰问题, 该文构建了一种基于松弛求解的半定规划模型. 实验结果证实提出的半定松弛模型降低了通信过程的误码率, 可以有效地解决多址通信干扰问题.

**关键词:** 线性规划; 松弛模型; 多址通信

**中图分类号:** O29

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-5471(2017)03-0039-04

在线性规划研究领域, 半定规划是非常典型的一种<sup>[1]</sup>. 半定规划的约束条件是对阵矩阵的仿射组合是半正定的; 半定规划的执行目标是使得所研究问题对应的线性函数极小化<sup>[2]</sup>. 从性质上看, 半定规划的约束条件反应出一系列的性质, 包括非线性属性、非光滑属性、凸属性, 这些性质也决定了半定规划属于凸优化一类的问题<sup>[3]</sup>.

实际上, 半定规划的产生源自于生产领域的实际需求<sup>[4]</sup>. 运筹学出现以后, 很多生产领域的实际问题可以运用数学规划来解决. 但是, 随着问题复杂性的增加, 线性规划显得力不从心, 这就推动了半定规划的出现和发展, 半定规划逐渐在解的存在性问题、优化问题、灵敏分析问题中成为主要工具<sup>[5-7]</sup>. 半定规划的最大意义有 2 点: ①很多实际问题都可以用半定规划模型来描述, 并且半定规划已经建立起了标准的解决问题框架; ②半定优化对于复杂问题中的多约束条件、多优化目标更加适用, 也即更适合组合优化一类的问题.

近年来, 半定规划的实用价值进一步扩大, 已经在控制领域、系统科学领域、组合优化领域、滤波技术领域、移动通信领域中获得了广泛应用<sup>[8-10]</sup>. 本文将进一步研究半定规划理论, 并探索其在检测领域中的应用.

## 1 半定规划的基本模型

半定规划是多约束条件下的线性函数极小化问题, 一个典型的半定规划数学模型如公式(1)所示.

$$\begin{cases} \min & D \cdot Y \\ \text{s. t.} & B_i \cdot Y = c_i \\ & Y \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

在这个半定规划模型中,  $c_i$  代表的是一个实数,  $i$  的取值为从 1 到  $m$  的整数;  $Y \geq 0$  代表的是一个半正定空间;  $D$  代表的是  $n$  阶次的实数矩阵;  $B_i$  代表的也是  $n$  阶次的实数矩阵;  $\cdot$  表示内积计算符号, 这里采取的是弗洛本尼斯内积的计算方法, 如公式(2)所示.

① 收稿日期: 2016-07-07

作者简介: 马纪英(1981-), 男, 河北南宫人, 硕士, 讲师, 主要从事计算数学和数学教育研究.

$$D \cdot Y = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n D_{ij} Y_{ij} = \text{tr}(D^T Y) \quad (2)$$

这里,参与内积计算的矩阵都是实数的对称矩阵.引入一个线性计算子, $B: T^n \rightarrow R^m$ ,可以使得下面的计算成立.

$$BY = \begin{bmatrix} B_1 \cdot Y \\ B_2 \cdot Y \\ \dots \\ B_n \cdot Y \end{bmatrix} \quad (3)$$

再假设一个向量  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^t$ ,则公式(1)所示的半定规划模型可以描述为

$$\begin{cases} \min D \cdot Y \\ \text{s. t. } B \cdot Y = c \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

## 2 半定规划的松弛算法

下面,给出半定规划问题的一种松弛求解算法.给定一个这样的矩阵表达  $R = \begin{bmatrix} -H & By \\ (By)' & 0 \end{bmatrix}$ ,再给定一个  $y = \begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix}$ ,那么可以得到一个和二次规划问题等价的数学模型,如公式(5)所示.

$$\begin{cases} l = \max y^t R y \\ \text{s. t. } y \in \{-1, 1\}^{k+1} \end{cases} \quad (5)$$

再假设一个  $Y = yy^t$ ,那么公式(5)所示的半定规划模型又可以等价于

$$\begin{cases} \max Y \cdot R \\ \text{s. t. } Y = yy^t \quad y \in R^{k+1} \\ Y_{ii} = I \quad i = 1, \dots, k+1 \end{cases} \quad (6)$$

公式(6)所示的模型中, $Y = yy^t$ 表示的是约束条件, $Y$ 表示的是一个对称的半正定约束矩阵,并且这个矩阵是非凸属性的,它的秩为1.如果省去这个约束的限制,那么公式(6)所述的模型可以变化为半定规划问题的松弛模型,如公式(7)所示.

$$\begin{cases} l^* = \max Y \cdot R \\ \text{s. t. } Y \geq 0 \\ Y_{ii} = I \quad i = 1, \dots, k+1 \end{cases} \quad (7)$$

公式(6)所示的半定规划松弛模型的对偶模型,可以描述为

$$\begin{cases} \min f^t v \\ \text{s. t. } -R + \text{diag}(v) \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

这里, $f$ 代表一个列向量,并且向量中所有的元素都是1;公式(7)所示的半定规划松弛模型和公式(8)所示的对偶模型不存在对偶间隙.

## 3 通信领域中的多址检测问题半定规划求解

CDMA是通信领域的典型技术,即码分多址技术.码分多址的扩频码集并不满足严格正交,有时会因为参数之间的相关性产生多址干扰.多址检测符合极大似然估计,这就为半定规划的松弛算法求解提供了可能.

如果有 $L$ 个用户分享通信信道,并且不同用户之间的相邻周期间隔为 $T$ ,可以将通信信号的数学模型描述为

$$q_k(t) = \sum_{n=0}^N b_k(n) q(t - nT_c) \quad (9)$$

公式中, $b_k(n)$ 表示了 $(-1, 1)$ 区间上的编码序列集合, $T_c$ 表示的是一个时间间隔脉冲, $T_c$ 和 $T$ 之间的关系满足 $T = nT_c$ .

如果第  $k$  个用户相关的数据序列可以标记为  $\{e_k(m)\}$ , 对于长度为  $L$  的通信信号, 其信号波形可以描述为

$$s_k(t) = d_k \sum_{i=1}^L e_k(i) q_k(t - iT - \epsilon_k) \quad (10)$$

这里,  $d_k$  表示的是码分多址的复信道参数. 这样, 所有用户总体的通信信号, 可以根据如下的公式描述为

$$s(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t - \epsilon_k) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^L e_k(i) q_k(t - iT - \epsilon_k) \quad (11)$$

这里,  $\epsilon_k$  表示通信传输过程中的延迟量.

在通信过程中, 通信信号常常受到高斯类型的噪声干扰, 这样接收到的通信信号可以描述为  $a(t) = s(t) + n(t)$ . 这里的  $n(t)$  表示高斯类型的噪声.

第  $k$  个用户在第  $i$  个时间间隔的输出波形, 可以用公式(12)描述.

$$y_k(i) = \int_{T+\epsilon_k}^{(i+1)T+\epsilon_k} a(t) s_k(t - iT - \epsilon_k) dt \quad (12)$$

至此, 一个通信通道上的多地址检测问题可以描述为

$$y = SDe + \sigma \quad (13)$$

这里,  $S$  表示  $KL \times KL$  维度的关联矩阵,  $D$  表示多地址编码的参数矩阵.

将一个通信通道上的多地址检测问题, 扩充到多个通信通道上, 可以得出如下模型.

$$\bar{e} = \arg_e \max q(y | e) \quad (14)$$

再考虑高斯噪声等约束条件, 多地址检测问题可以用如下的半定规划模型描述.

$$\bar{e} = \arg_e \min_e' D' SDe - 2y'De \quad (15)$$

下面, 给出一组利用半定规划松弛算法解算的多地址检测实验结果. 根据半定规划松弛算法解算出的结果, 用于多用户地址分配, 误码率结果如图1所示.

从图1的结果中可以看出, 随着信噪比的提升, 3组数量用户的地址分配误码率都呈现出逐步下降的趋势. 从这3条曲线的对比结果可以明显发现, 单一用户因为不存在多地址分配干扰问题, 因此误码率最低; 25个用户、35个用户的多地址分配误码率虽然比单一用户地址分配误码率有所增加, 但增加的幅度并不明显, 这也充分说明了本文构建的半定规划松弛算法, 获得了CDMA通信过程多地址分配的优化解, 有效地避免了多用户可能出现的地址干扰问题.

进一步来观察利用半定规划松弛算法求解CDMA多地址分配的时间, 如图2所示.

从图2中的结果可以看出, 随着用户数量的增加(从5个用户逐步增加到40个用户), 半定规划松弛算法的多地址分配解算时间也逐步增加, 但增加的幅度并不明显, 并且增加的趋势在逐步放缓.

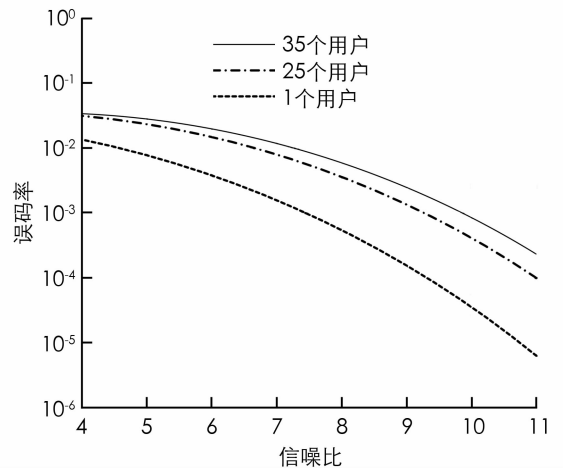


图1 半定规划解算的多地址分配后的误码率结果

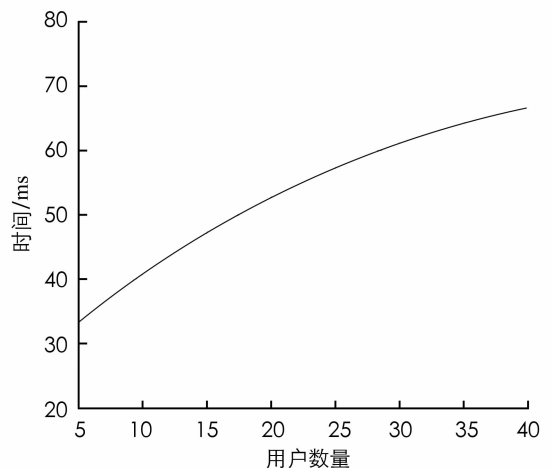


图2 半定规划松弛算法的解算时间

## 参考文献:

- [1] TRAN T, PHUNG D, VENKATESH S. Tree-based Iterated Local Search for Markov Random Fields with Applications in Image Analysis [J]. *Journal of Heuristics*, 2015, 21(1): 25–45.
- [2] 焦合华. 一类极大极小分式规划的最优性和对偶 [J]. *西南大学学报(自然科学版)*, 2014, 36(9): 75–80.
- [3] SZELISKI R, ZABIH R, SCHARSTEIN D, et al. A Comparative Study of Energy Minimization Methods for Markov Random Fields with Smoothness-Based Priors [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machin*, 2007, 30(6): 1068–1080.
- [4] GUILLEMAUT J Y, HILTON A. Joint Multi-Layer Segmentation and Reconstruction for Free-Viewpoint Video Applications [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2011, 93(1): 73–100.
- [5] 姚元金. 一类非凸非光滑多目标分布式规划问题的对偶 [J]. *西南大学学报(自然科学版)*, 2010, 32(3): 10–14.
- [6] KWON R H, LI J Y. A Stochastic Semidefinite Programming Approach for Bounds on Option Pricing Under Regime Switching [J]. *Annals of Operations Research*, 2016, 237(1/2): 1–35.
- [7] 杨 宏. 一致  $K\text{-}(F_b, p)$ -凸多目标分式半无限规划的最优性充分条件 [J]. *西南师范大学学报(自然科学版)*, 2015, 40(9): 5–10.
- [8] WITTEK P. Ncpol2sdpa-Sparse Semidefinite Programming Relaxations for Polynomial Optimization Problems of Non-commuting Variables [J]. *Acm Transactions on Mathematical Software*, 2016, 41(3): 1–12.
- [9] 周婉娜, 霍永亮, 胡之英. 二层随机规划逼近解上半收敛性的一个充分条件 [J]. *西南师范大学学报(自然科学版)*, 2015, 40(9): 17–22.
- [10] SCHEPKER H, DOCLO S. A Semidefinite Programming Approach to Min-max Estimation of the Common Part of Acoustic Feedback Paths in Hearing Aids [J]. *IEEE Transactions on Audio Speech & Language*, 2016, 24(2): 366–377.

## On Multiple Access Interference Detection Technology Based on Semi Definite Relaxation Model

MA Ji-ying<sup>1</sup>, CHEN Wen-yan<sup>2</sup>, JIA Hui-xian<sup>1</sup>

1. Basic Teaching Section, Shijiazhuang Posts and Telecommunications Technical College, Shijiazhuang, Hebei 050021, China;

2. Hebei Dadi Construction Technology CO. Ltd., Shijiazhuang, Hebei 050021, China

**Abstract:** Because of the rationality of constraint conditions, the semi definite programming is more practical than the linear programming, and it is also widely used in many fields. On the basis of traditional mathematical model of the semi definite programming, a new relaxation method has been proposed. In order to solve the problem of multiple access interference, a semi definite programming model based on relaxation has been constructed. The experimental results show that the proposed semi definite relaxation model can reduce the bit error rate of the communication process, and can effectively solve the problem of multiple access interference.

**Key words:** linear programming; relaxation model; multiple access communication

责任编辑 夏 娟