

# 基于等效变换对多边内星形电阻网络的研究<sup>①</sup>

刘 松 山

河南艺术职业学院 教务处, 郑州 451464

**摘要:** 应用星形电路与多角形电路的等效互换以及构建等效条件法, 对 4 边内星形电阻网络进行了等效分析, 把它等效为目前最简单的四端网络. 还分析了把 5 边内星形电阻网络等效为四端网络的情况. 对这 2 个四端网络的 4 个端钮之间的等效电阻进行了计算. 并用 Multisim 中的万用表对所计算电路的等效电阻以及与原电路对应的电阻进行了仿真测量, 结论是理论计算与测量的结果相同. 这项研究的目的是, 用星形电路与多角形电路等效互换, 结合构建等效条件法, 扩展 Y- $\Delta$ 变换的应用, 为解决与星形电路、多角形电路相关电路的等效变换问题提供可参考的实用分析方法. 此方法适用于对无源多端网络的等效变换.

**关 键 词:** 等效变换; Y- $\Delta$ 变换; 扩展应用; 星形电路; 多角形电路

**中图分类号:** O441.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-5471(2017)03-0056-05

自从 1847 年基尔霍夫的划时代电路理论论文“关于研究电路线性分布所得到的方程的解”<sup>[1]</sup>发表以来, 人们就开始应用 KCL 和 LVL 解决电阻网络模型相关的许多抽象和复杂的科学问题<sup>[2]</sup>, 对电路等效的研究在实际应用中有着重要意义<sup>[3]</sup>. 图 1(a)电路在文献[3-5]中称作  $n$  边形电阻网络, 根据该电路外边是多边形、内部是星形电路的特征, 本文称这类电路为多边内星形电阻网络比较贴切. 当该电路外边各电阻相等, 内部星形电路各电阻相等时, 可用虚拟电流法求出各端钮之间的等效电阻. 当外边各电阻不相等或内部星形电路各电阻不相等时, 虚拟电流法已不适用. 对这样的电路若既需要计算 1~4 端钮之间的各等效电阻, 还要把它等效为更简单的四端网络, 等效变换法最适合. 而目前把图 1(a)电路只能等效为图 1(c)电路<sup>[6]</sup>. 为了获得更简单的四端网络, 本文应用星形电路与多角形电路等效互换<sup>[7]</sup>, 并结合构建等效条件法, 能够把图 1(a)网络等效为目前最简单的四端网络, 如图 1(f)所示. 根据拓扑等效概念, 扩展应用上述分析法, 分析了把 5 边内星形电阻网络等效为四端网络的情况. 对这 2 个四端网络 1~4 端钮之间的等效电阻进行了计算, 并用 Multisim 中的万用表对所计算电路的等效电阻以及与原电路对应的电阻进行了仿真测量, 其理论计算与测量的结果相同. 本研究应用星形电路与多角形电路等效互换, 并结合构建等效条件法, 扩展 Y- $\Delta$ 变换<sup>[8]</sup>的应用, 解决含有一般星形电路或多角形电路的等效变换问题. 此方法适用于对无源多端网络的等效变换. 本文以 4 和 5 边内星形电阻网络为研究对象.

## 1 基本分析方法

把星形电路等效多角形电路的公式  $G_{jk} = G_j G_k / (G_1 + G_2 + \dots + G_n)$  中的电导表示成电阻形式为

$$R_{jk} = R_j R_k \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \quad (1)$$

式中:  $j = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $k = j+1, j+2, \dots, n$ . 多角形电路等效星形电路的公式<sup>[7]</sup>为

① 收稿日期: 2015-09-08

基金项目: 河南省自然科学基金研究项目(152300410213).

作者简介: 刘松山(1958-), 男, 河南郑州人, 副教授, 学士, 主要从事电路理论教学与应用研究.

$$G_i = \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^n G_{ih} + \frac{G_{if}G_{ig}}{G_{fg}} \quad (2)$$

式中： $i \neq f, i \neq g, f \neq g, i, f, g \in \{1, 2, \dots, n\}$ . 由于  $\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^n G_{ih}$  是接于多角形电路  $i$  端钮的自电导，当  $i$  取某个值时，它是唯一值，而  $G_{if}G_{ig}/G_{fg}$  中的各电导会随  $f, g$  的取值不同可能有不同的值，而在式(2)中只用其中一个，这样式(2)得出的  $G_i$  有可能不是唯一值的现象. 因此，需要为式(2)建立的等效条件是： $G_{if}G_{ig}/G_{fg}$  的各项相等，其中  $i = 1, f \neq g, f, g \in \{2, 3, \dots, n\}$ . 这样就能确保多角形电路经过式(2)变换得出唯一等效的星形电路. 即使  $i$  再取(2, 3, ...,  $n$ ) 中的某个数，可以证明  $G_{if}G_{ig}/G_{fg}$  的各项也相等.

在  $G_{if}G_{ig}/G_{fg}$  的各项中， $G_{fg}$  相对独立. 当某个多角形电路不满足式(2)的等效条件时，该电路不能等效成星形电路. 对于这类多角形电路，用分解电阻的方法<sup>[9]</sup>，把  $G_{if}G_{ig}/G_{fg}$  中某个  $G_{fg}$  分解为两个电导的并联，通过改变  $G_{if}G_{ig}/G_{fg}$  中某项  $G_{fg}$  的数值，使满足式(2)的等效条件，这类多角形电路可以等效成在星形电路的外端钮之间接有电阻的电路，此方法称作构建等效条件法<sup>[10]</sup>.  $G_{if}G_{ig}/G_{fg}$  的电阻形式为  $R_{fg}/R_{if}R_{ig}$ . 下面对图 1(a) 电路进行等效分析.

## 2 对 4 边内星形电阻网络的等效分析

对图 1(a) 的 4 边内星形电阻网络分析 1、2 端钮与 3、4 端钮之间的等效电路，计算 1~4 端钮之间的各等效电阻. 这里  $n = 4$ . 为了计算简便，设  $R_{a1} = R_{a2} = R_{a3} = 1 \Omega, R_{a4} = 0.5 \Omega, R_{a12} = R_{a13} = R_{a34} = 5 \Omega, R_{a24} = 2.5 \Omega$ .

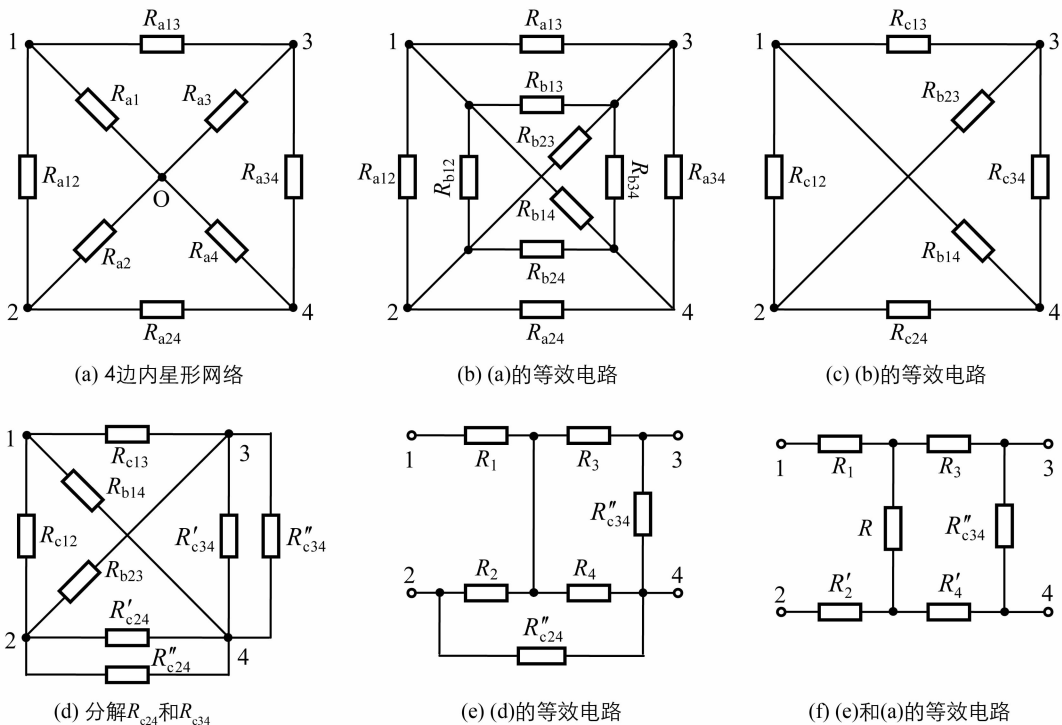


图 1 对 4 边内星形电阻网络的等效

由式(1)把图 1(a) 的内星形电路等效为多角形电路，如图 1(b) 所示，其中

$$R_{b12} = R_{a1}R_{a2} \left( \frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_{a2}} + \frac{1}{R_{a3}} + \frac{1}{R_{a4}} \right) = 5 \Omega$$

同理， $R_{b13} = R_{b23} = 5 \Omega, R_{b14} = R_{b24} = R_{b34} = 2.5 \Omega$ . 合并图 1(b) 电路中并联电阻后等效为图 1(c) 电路，其中， $R_{c24} = R_{a24}/R_{b24} = 1.25 \Omega$ ，同理， $R_{c12} = R_{c13} = 2.5 \Omega, R_{c34} = 5/3 \Omega$ . 若把图 1(c) 的多角形电路等效为星形电路，可以容易求出 1~4 端钮之间的各等效电阻，并获得更简单的等效电路. 应用式(2)的等效条件分析图 1(c) 电路，因为

$$R_{b23}/R_{c12}R_{c13} = 0.8 \text{ S}, R_{c24}/R_{c12}R_{b14} = 0.2 \text{ S}, R_{c34}/R_{c13}R_{b14} = 4/15 \text{ S}$$

各项不相等, 式(2)不满足等效条件, 因此不能用式(2)把图 1(c) 电路等效为星形电路. 在此应用构建等效条件法, 才能把图 1(c) 电路继续等效化简, 即以  $R_{b23}/R_{c12}R_{c13} = 0.8 \text{ S}$  为准, 分解电阻  $R_{c24}$  为  $R'_{c24}$  和  $R''_{c24}$  并联, 分解电阻  $R_{c34}$  为  $R'_{c34}$  与  $R''_{c34}$  并联, 如图 1(d) 所示. 用  $R'_{c24}$  代替  $R_{c24}$ , 用  $R'_{c34}$  代替  $R_{c34}$ , 让  $R'_{c24}/R_{c12}R_{b14} = R'_{c34}/R_{c13}R_{b14} = 0.8 \text{ S}$ , 解得  $R'_{c24} = 5 \Omega$ ,  $R'_{c34} = 5 \Omega$ , 以及

$$R''_{c24} = \frac{R_{c24}R'_{c24}}{R'_{c24} - R_{c24}} = \frac{5}{3} \Omega, R''_{c34} = \frac{R_{c34}R'_{c34}}{R'_{c34} - R_{c34}} = 2.5 \Omega$$

在图 1(d) 中除  $R''_{c24}$  和  $R''_{c34}$  之外的多角形电路满足式(2)的等效条件. 由式(2)把图 1(d) 中该多角形电路等效为星形电路, 并把  $R''_{c24}$  和  $R''_{c34}$  并联在对应端钮之间, 如图 1(e) 电路所示. 其中电阻由式(2)得

$$R_1 = \left[ \frac{1}{R_{c12}} + \frac{1}{R_{c13}} + \frac{1}{R_{b14}} + \frac{R_{b23}}{R_{c12}R_{c13}} \right]^{-1} = 0.5 \Omega, R_2 = \left[ \frac{1}{R_{c12}} + \frac{1}{R_{b23}} + \frac{1}{R'_{c24}} + \frac{R_{c13}}{R_{c12}R_{b23}} \right]^{-1} = 1 \Omega$$

同理,  $R_3 = R_4 = 1 \Omega$ . 把图 1(e) 电路下边的三角形电路等效为星形电路, 如图 1(f) 所示. 其中

$$R = \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4 + R''_{c24}} = \frac{3}{11} \Omega, R'_2 = \frac{R_2R''_{c24}}{R_2 + R_4 + R''_{c24}} = \frac{5}{11} \Omega, R'_4 = \frac{R_4R''_{c24}}{R_2 + R_4 + R''_{c24}} = \frac{5}{11} \Omega$$

至此, 作为四端网络的图 1(f) 电路无法再化简, 因此, 图 1(f) 电路是图 1(a) 电路目前最简单的四端等效网络. 图 1(a) 电路 1~4 端钮之间的各等效电阻可由图 1(f) 电路求得

$$R_{12} = R_1 + R'_2 + \frac{R(R_3 + R''_{c34} + R'_4)}{R + R_3 + R''_{c34} + R'_4} = \frac{825}{682} \approx 1.210 \Omega, R_{34} = \frac{R''_{c34}(R_3 + R + R'_4)}{R''_{c34} + R_3 + R + R'_4} = \frac{95}{93} \approx 1.022 \Omega$$

同理,  $R_{13} = 235/186 \approx 1.263 \Omega$ ,  $R_{14} = 205/186 \approx 1.102 \Omega$ ,  $R_{23} = 125/93 \approx 1.344 \Omega$ ,  $R_{24} = 80/93 \approx 0.860 \Omega$ . 应用 Multisim 中的万用表, 对图 1(a) 和 (f) 电路 1~4 端钮之间的各电阻分别进行仿真测量, 其值均为:  $R_{12\text{测}} = 1.21 \Omega$ ,  $R_{13\text{测}} = 1.263 \Omega$ ,  $R_{14\text{测}} = 1.102 \Omega$ ,  $R_{23\text{测}} = 1.344 \Omega$ ,  $R_{24\text{测}} = 0.86 \Omega$ ,  $R_{34\text{测}} = 1.022 \Omega$ . 在误差范围内,  $R_{12} = R_{12\text{测}}$ ,  $R_{13} = R_{13\text{测}}$ ,  $\dots$ ,  $R_{34} = R_{34\text{测}}$ , 通过比较可见, 理论计算与仿真测量的结果相同, 表明把图 1(a) 电路等效成图 1(f) 电路是正确的.

### 3 对 5 边内星形电阻网络的等效分析

5 边内星形电阻网络如图 2(a) 所示, 分析 1、2 端钮与 3、4 端钮之间的等效电路, 计算 1~4 端钮之间的各等效电阻. 为了计算简便说明方法, 设电阻  $R_0 = 2 \Omega$ ,  $R = 10 \Omega$ .

把图 2(a) 电路中的星形电路等效为多角形电路, 其中各电阻由式(1)得:  $R_{a12} = R_{a13} = R_{a14} = R_{a15} = R_{a23} = R_{a24} = R_{a25} = R_{a34} = R_{a35} = R_{a45} = 5R_0 = 10 \Omega$ , 如图 2(b) 所示, 图中未标的电阻为  $5R_0$ . 合并图 2(b) 电路中并联电阻为:  $R_{b12} = R_{b23} = R_{b34} = R_{b45} = R_{b15} = 5 \Omega$ , 图 2(b) 电路等效为图 2(c) 电路. 由于现在要分析 1、2 端钮与 3、4 端钮之间的等效电路问题, 根据拓扑等效概念, 把要消去的节点 5 移到电路的中间等效为图 2(d) 电路, 把与节点 5 相连的星形电路等效为多角形电路, 如图 2(e) 所示. 由式(1)得

$$R_{c12} = R_{a25}R_{b15} \left( \frac{1}{R_{a25}} + \frac{1}{R_{a35}} + \frac{1}{R_{b15}} + \frac{1}{R_{b45}} \right) = 30 \Omega$$

同理,  $R_{c13} = R_{c24} = R_{c34} = 30 \Omega$ ,  $R_{c14} = 15 \Omega$ ,  $R_{c23} = 60 \Omega$ . 化简并联电阻把图 2(e) 电路等效为图 2(f) 电路, 其中,  $R_{d14} = R_{a14} // R_{c14} = 6 \Omega$ , 同理,  $R_{d12} = R_{d34} = 30/7 \Omega$ ,  $R_{d13} = R_{d24} = 7.5 \Omega$ ,  $R_{d23} = 60/13 \Omega$ . 应用式(2)的等效条件分析图 2(f) 电路, 因为

$$R_{d23}/R_{d12}R_{d13} = 28/195 \text{ S}, R_{d24}/R_{d12}R_{d14} = 7/24 \text{ S}, R_{d34}/R_{d13}R_{d14} = 2/21 \text{ S}$$

各项不相等, 式(2)不满足等效条件. 若以  $R_{d23}/R_{d12}R_{d13} = 28/195 \text{ S}$  为准, 分解  $R_{d24}$  为  $R'_{d24}$  和  $R''_{d24}$  并联, 分解  $R_{d34}$  为  $R'_{d34}$  和  $R''_{d34}$  并联, 用  $R'_{d24}$  代替  $R_{d24}$ , 用  $R'_{d34}$  代替  $R_{d34}$ , 让  $R'_{d24}/R_{d12}R_{d14} = R'_{d34}/R_{d13}R_{d14} = 28/195 \text{ S}$ , 解得  $R'_{d24} = 48/13 \Omega$ ,  $R'_{d34} = 84/13 \Omega$ , 以及

$$R''_{d24} = \frac{R_{d24}R'_{d24}}{R'_{d24} - R_{d24}} = -\frac{80}{11} \Omega, R''_{d34} = \frac{R_{d34}R'_{d34}}{R'_{d34} - R_{d34}} = \frac{140}{11} \Omega$$

这里  $R''_{d24} < 0$ , 是因为在分解  $R_{d24}$  的运算中  $R_{d24} > R'_{d24}$ , 是对电阻变换造成的现象. 在图 2(g) 中除  $R''_{d24}$  和  $R''_{d34}$  之外的多角形电路满足式(2)等效条件. 把这个多角形电路等效为星形电路, 并把  $R''_{d24}$  和  $R''_{d34}$  并联

在对应端钮之间，如图 2(h) 所示。其中电阻由式(2) 得

$$R_1 = \left[ \frac{1}{R_{d12}} + \frac{1}{R_{d13}} + \frac{1}{R_{d14}} + \frac{R_{d23}}{R_{d12}R_{d13}} \right]^{-1} = \frac{65}{44} \Omega, R_2 = \left[ \frac{1}{R_{d12}} + \frac{1}{R_{d23}} + \frac{1}{R'_{d24}} + \frac{R_{d13}}{R_{d12}R_{d23}} \right]^{-1} = \frac{10}{11} \Omega$$

同理,  $R_3 = 35/22 \Omega, R_4 = 14/11 \Omega$ . 把图 2(h) 电路下边的三角形电路等效为星形电路, 其中

$$R = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R''_{d24}} = -\frac{5}{22} \Omega, R'_2 = \frac{R_2 R''_{d24}}{R_2 + R_4 + R''_{d24}} = \frac{100}{77} \Omega, R'_4 = \frac{R_4 R''_{d24}}{R_2 + R_4 + R''_{d24}} = \frac{20}{11} \Omega$$

图 2(h) 电路等效为图 2(i) 电路. 图 2(a) 电路 1~4 端钮之间的各电阻可由图 2(i) 电路求得

$$R_{12} = R_1 + R'_2 + \frac{R(R_3 + R''_{d34} + R'_4)}{R + R_3 + R''_{d34} + R'_4} = \frac{28}{11} \approx 2.545 \Omega, R_{34} = \frac{R''_{d34}(R_3 + R + R'_4)}{R''_{d34} + R_3 + R + R'_4} = \frac{28}{11} \approx 2.545 \Omega$$

同理,  $R_{13} = R_{14} = R_{24} = 32/11 \approx 2.909 \Omega, R_{23} = 28/11 \approx 2.545 \Omega$ . 应用 Multisim 中的万用表对图 2(a) 和(i) 电路 1~4 端钮之间的各电阻进行仿真测量, 其值均为:  $R_{12\text{测}} = R_{23\text{测}} = R_{34\text{测}} = 2.545 \Omega, R_{13\text{测}} = R_{14\text{测}} = R_{24\text{测}} = 2.909 \Omega$ . 在误差范围内,  $R_{12} = R_{12\text{测}}, R_{13} = R_{13\text{测}}, \dots, R_{34} = R_{34\text{测}}$ . 可见, 理论计算与仿真测量的结果相同, 表明图 2(i) 电路是图 2(a) 电路 1~4 端钮的等效电路. 从这个等效过程还可以看出, 通过等效变换可以把平面电路等效成非平面电路, 也可以把非平面电路等效成平面电路.

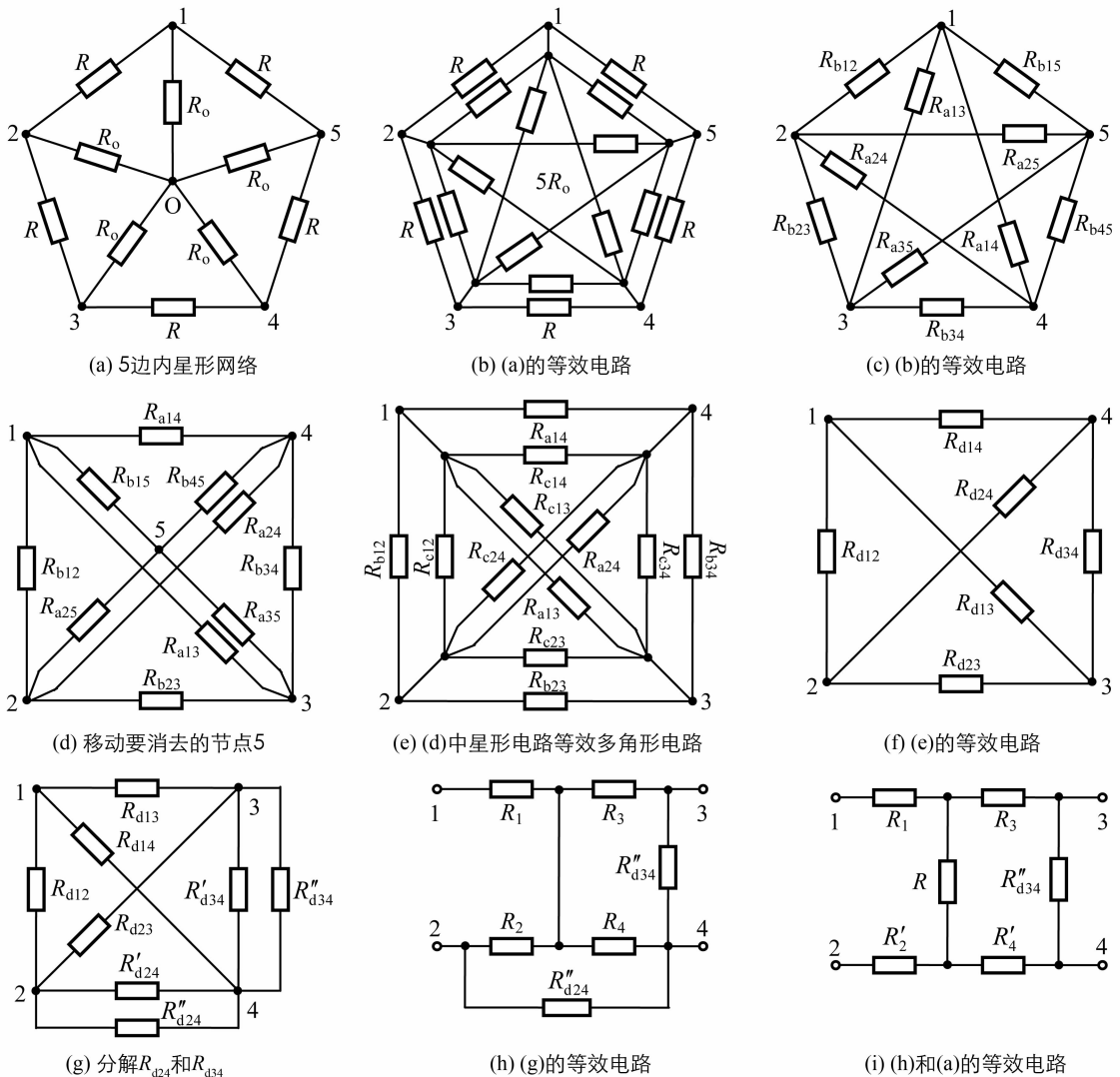


图 2 对 5 边内星形电阻网络的等效

### 4 结 论

从图 1(a) 和图 2(a) 电路的等效过程可以发现, 对  $n \geq 4$  的  $n$  边内星形电路( $n$  是有限值) 都可以把它等

效为类似于图 2(i) 的电路. 其基本方法是先把内星形电路等效成多角形电路, 而后再化简电路, 当需要把不满足式(2) 等效条件的多角形电路等效成星形电路时, 选用构建等效条件法可以解决. 以前认为, 图 1(a) 电路最终的四端等效网络是图 1(c) 电路. 本文应用星形电路与多角形电路等效互换, 并结合构建等效条件法, 可以把图 1(a) 电路进一步等效成图 1(f) 电路, 它比图 1(c) 电路更简单. 应用星形电路与多角形电路等效互换方法和构建等效条件方法, 能解决含一般星形电路或多角形电路的等效变换问题, 其实质扩展了 Y- $\Delta$  变换的应用. 此方法适用于对无源多端网络的等效变换.

### 参考文献:

- [1] 基尔霍夫. 基尔霍夫定律 [M]. 宗孔德, 译. 北京: 人民教育出版社, 1981.
- [2] 谭志中, 陈翠萍.  $8 \times n$  阶矩形网络的等效电阻和电容及 2 个猜想 [J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 2013, 37(6): 579-586.
- [3] 谭志中, 陆建隆. 多边形电阻网络等效电阻的统一建构 [J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 2011, 35(2): 140-144.
- [4] 谭志中. 加强型多边形电阻或电容网络的等效值研究 [J]. 大学物理, 2011, 30(12): 29-32, 37.
- [5] 谭志中.  $2 \times n$  阶蛛网模型的等效电阻公式及 2 个猜想 [J]. 大学物理, 2013, 32(4): 16-21, 27.
- [6] R. E. 斯科特. 线性电路 [M]. 郑翔, 董达生, 沈鹤庭, 等译. 北京: 高等教育出版社, 1965.
- [7] 刘松山. 对星形-多角形电路等效变换的研究 [J]. 大学物理, 2014, 33(11): 15-19.
- [8] 邱关源. 电路 [M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [9] 刘松山. 基于对称性研究  $2 \times n$  阶梯形电阻网络等效电阻 [J]. 大学物理, 2015, 34(1): 26-29.
- [10] 王燕青, 周中成. 循序渐进谈条件数学期望 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2014, 39(4): 230-232.

## On Polygonal Internal Star Resistance Network Based on Equivalent Conversion

LIU Song-shan

*Dean's Office, Henan Arts Vocational College, Zhengzhou 451464, China*

**Abstract:** Using the equivalent conversion from star circuit to polygon circuit and equivalent condition constructing method, the quadrangle internal star resistance network has equivalently been analyzed. The quadrangle internal star resistance network is regarded equivalently as a currently simplest four-terminal network. The case that the pentagonal internal star resistance network is equivalently converted to four-terminal network has been discussed. The equivalent resistances at 4 terminals for the pentagonal internal resistance network and four-terminal network have been calculated. The Multisim has been used to carry out a stimulatory measure for the calculated equivalent resistances and for the original circuit. The result shows that the theoretical calculation and the measurement are consistent. The purpose of this research is to expand the application of Y- $\Delta$  conversion by equivalent conversion from star circuit to polygonal circuit and by equivalent condition constructing method, and to apply a practical and effective method for solving the equivalent conversion in star circuit and polygonal circuit. Such a method can also be used in the equivalent conversion for passive multi-terminal networks.

**Key words:** equivalent conversion; Y- $\Delta$  conversion; application expansion; star circuit; polygon circuit