

具有非线性传染率的 SIS 网络传染病模型的稳定性和分支分析^①

王振国¹, 刘桂荣²

1. 吕梁学院 数学系, 山西 吕梁 033000; 2. 山西大学 数学科学学院, 太原 030006

摘要: 研究了一类具有非线性传染率的 SIS 网络传染病模型的动力学行为, 给出传播阈值 $\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1) \rangle}$.

结果表明, 当 $\beta_0 < \lambda_c$ 时, 无病平衡点 $E_0 = 0$ 局部稳定; 当 $\beta_0 > \lambda_c$ 时, 无病平衡点 $E_0 = 0$ 不稳定; 进一步分析, 当 $\beta_0 = \lambda_c$ 时, 系统在 $E_0 = 0$ 处出现 Transcritical 分支.

关键词: SIS 传染病模型; 无标度网络; 稳定性; Transcritical 分支

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2017)03-0083-07

用数学建模的方法来研究传染病传播的动力学行为已经有很长时间了. 早些时候, 人们主要研究均匀网络上的疾病的传播. 通过假设每个个体相互接触的机率是相等的, 每次接触并被传染的概率为 λ , 找到疾病传播的阈值 λ_c , 当 $\lambda < \lambda_c$ 时, 疾病传播不会发生; 当 $\lambda > \lambda_c$ 时, 疾病就会爆发并持续存在^[1-2]. 而现实中, 上述假设显然是不合理的, 因为群体中的每个个体之间不可能都会有相互接触的机会. 如果把每个个体看成网络中的节点, 个体之间的接触看成是网络中的边, 那么, 疾病在群体中的传播就可以看成是一个异质网络上的疾病传播^[3-5].

只考虑网络节点的两种状态: 易感者和染病者, 并且两者可以相互转化. 令 S_k, I_k 分别表示度为 k 的易感者和染病者节点的数量, N_k 表示度为 k 的节点总数, 即 $N_k = S_k + I_k$. 假设网络中每个节点的度最大不超过 C , 记 N 为网络中所有节点总数且保持不变, 则 $N = N_1 + N_2 + \dots + N_C$. 令 $\rho_k = \frac{I_k}{N_k}$ 表示度为 k 的染病者的相对密度, $1 - \rho_k$ 表示度为 k 的易感者的相对密度, 得如下 SIS 传染病模型^[4, 5]:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\rho_k + \lambda k(1 - \rho_k)\Theta \quad (1)$$

其中: λ 表示易感者每次接触染病者被传染的概率, $\Theta = \langle k \rangle^{-1} \sum_{m=1}^C mp(m)\rho_m$ 表示网络中任一条边连接染病者的概率, $p(m) = \frac{N_m}{N}$ 表示网络中节点的度分度, $\langle k \rangle = \sum_{m=1}^C mp(m)$ 表示网络的平均度.

考虑模型(1)的疾病传播, 它除了和网络本身的结构有关, 还依赖于病毒的传染力, 所以在建模中能真实地反映出传染病模型中的传染力是一个关键的问题. 对传染力刻画主要考虑两个因素对它的影响, 一个是当疾病流行时, 染病者的邻居中至少存在一个染病者种子, 若染病者节点的度为 k , 则可以自由连接的边只剩 $k-1$ 条, 那么, 任一条边与该染病者节点相连的概率为 $(k-1)p(k)$ ^[6-7]. 另一个是考虑网络的每一条

① 收稿日期: 2015-08-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(11471197); 吕梁学院科学研究项目(ZRXN201402).

作者简介: 王振国(1980-), 男, 山西应县人, 讲师, 主要从事生物动力系统研究.

边实际的有效接触 $\varphi(k)$. 在无标度网络中, 有少部分节点的度很大, 网络中称这样的节点为 hub. 假设每一个节点潜在的传染力就等于该节点的度^[8-9], 显然, Hub 节点比其他节点在疾病传播过程中起到了更大的作用, 当 hub 节点变成染病者时, 疾病就会快速在网络中传播. 但对有些情况这种假设是不适用的, 例如性病的传播, 染病者即使有很多的朋友, 但平常生活的接触不会被传染^[10], 在这种情况下, 我们考虑网络的实际有效接触 $\varphi(k)$ 更接近现实. 事实上, May R M 和 Lloyd A L 在 2001 年研究无标度网络上的 SIR 传染病模型时, 得出即使是对无限的人口数量, 疾病流行也只是在局部有限的人群中存在的^[11]. 最近几年, 部分作者考虑了几类实际的有效接触 $\varphi(k)$, 例如: 在文献[12]中取 $\varphi(k) = 1$ 和 $\varphi(k) = \frac{1}{k}$ 两种形式; 文献

[13] 取 $\varphi(k) = \begin{cases} 1, & 1 < k < k_0, \\ \frac{k_0}{k}, & k \geq k_0. \end{cases}$ 并研究了它对传播阈值 λ_c 的影响.

本文假设所构建的网络是一个度不相关的无标度网络, 网络中所有节点总数 N 保持不变. 在模型(1)的基础上, 考虑影响传染力的两个主要因素, 建立如下具有非线性传染率 $\beta = \beta_0 + \beta_1 \rho$ ^[14] 的 SIS 网络传染病模型:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\rho_k + (\beta_0 + \beta_1 \rho)k(1 - \rho_k)\Theta \quad (2)$$

这里假设恢复率 δ 等于 1,

$$\rho = \sum_{m=1}^C p(m)\rho_m \quad (3)$$

表示染病者的全局密度.

令

$$\Theta = \langle k \rangle^{-1} \sum_{m=1}^C (m-1)p(m)\varphi(m)\rho_m \quad (4)$$

其中: $\varphi(m)$ 表示每一条边实际的有效接触; $m-1$ 表示染病者周围一定存在一个染病者种子; $p(m)$, $\langle k \rangle$ 的定义同模型(1). 由模型(2)的生物意义可知 ρ_k 满足 $0 \leq \rho_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, C$.

令

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_k, \dots, \rho_C) \in \Omega = \prod_{i=1}^C [0, 1]$$

下面证明 Ω 是模型(2)的正向不变区域.

定理 1 模型(2)存在正向不变区域 Ω .

证 若能证明在 $\partial\Omega$ 上任取一点 $\boldsymbol{\rho}$ (满足模型(2)) 的向量场方向是指向 Ω 内部的^[15], 即可证明 Ω 是模型(2)正向不变区域. 对于某些 $i \in (1, 2, \dots, C)$, 定义 Ω 的边界:

$$\partial\Omega_1 = \{\boldsymbol{\rho} \in \Omega \mid \rho_i = 0\}$$

$$\partial\Omega_2 = \{\boldsymbol{\rho} \in \Omega \mid \rho_i = 1\}$$

令

$$\zeta_{1k} = (0, \dots, \underset{k}{-1}, \dots, 0), \zeta_{2k} = (0, \dots, \underset{k}{1}, \dots, 0) \text{ 为 } \Omega \text{ 外法向量}$$

计算下面内积

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \Big|_{\rho_k=0} \cdot \zeta_{1k} \right) = -(\beta_0 + \beta_1 \sum_{m \neq k} p(m)\rho_m)k \langle k \rangle^{-1} \sum_{m \neq k} (m-1)\varphi(m)p(m)\rho_m \leq 0 \quad (5)$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \Big|_{\rho_k=1} \cdot \zeta_{2k} \right) = -1 < 0 \quad (6)$$

从(5), (6)式可得:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \Big|_{\rho_i=1} \cdot \zeta_{ik} \right) \leq 0, i = 1, 2, \boldsymbol{\rho} \in \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \quad (7)$$

从而, 模型(2)任一初值在 $\partial\Omega$ 上的解都会进入到 Ω 中.

1 模型(2) 的无病平衡点 $E_0 = 0$ 局部稳定性

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_k, \dots, \rho_C)^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\beta_0}{\langle k \rangle} \varphi(2) p(2) & \frac{\beta_0}{\langle k \rangle} 2\varphi(3) p(3) & \dots & \frac{\beta_0}{\langle k \rangle} (C-1) \varphi(C) p(C) \\ 0 & -1 + \frac{2\beta_0}{\langle k \rangle} \varphi(2) p(2) & \frac{2\beta_0}{\langle k \rangle} 2\varphi(3) p(3) & \dots & \frac{2\beta_0}{\langle k \rangle} (C-1) \varphi(C) p(C) \\ 0 & \frac{3\beta_0}{\langle k \rangle} \varphi(2) p(2) & -1 + \frac{3\beta_0}{\langle k \rangle} 2\varphi(3) p(3) & \dots & \frac{3\beta_0}{\langle k \rangle} (C-1) \varphi(C) p(C) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{C\beta_0}{\langle k \rangle} \varphi(2) p(2) & \frac{C\beta_0}{\langle k \rangle} 2\varphi(3) p(3) & \dots & -1 + \frac{C\beta_0}{\langle k \rangle} (C-1) \varphi(C) p(C) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\rho}) = (N_1(\boldsymbol{\rho}), \dots, N_k(\boldsymbol{\rho}), \dots, N_C(\boldsymbol{\rho}))^T$$

其中 $N_k(\boldsymbol{\rho}) = k\beta_1\rho^\Theta - k\beta_0\rho_k\Theta - k\beta_1\rho\varphi_k\Theta$, 则模型(2) 可写成:

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\rho}) \quad (9)$$

定理 2 当 $\beta_0 < \lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}$ 时, 模型(2) 的无病平衡点 $E_0 = 0$ 局部稳定; 当 $\beta_0 > \lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}$ 时, 模型(2) 的无病平衡点 $E_0 = 0$ 不稳定.

证 定义疾病的传播阈值 $\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}$.

令

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{E}$$

\mathbf{E} 为一单位矩阵.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_0}{\langle k \rangle} \varphi(2) p(2) & \frac{\beta_0}{\langle k \rangle} 2\varphi(3) p(3) & \dots & \frac{\beta_0}{\langle k \rangle} (C-1) \varphi(C) p(C) \\ 0 & \frac{2\beta_0}{\langle k \rangle} \varphi(2) p(2) & \frac{2\beta_0}{\langle k \rangle} 2\varphi(3) p(3) & \dots & \frac{2\beta_0}{\langle k \rangle} (C-1) \varphi(C) p(C) \\ 0 & \frac{3\beta_0}{\langle k \rangle} \varphi(2) p(2) & \frac{3\beta_0}{\langle k \rangle} 2\varphi(3) p(3) & \dots & \frac{3\beta_0}{\langle k \rangle} (C-1) \varphi(C) p(C) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{C\beta_0}{\langle k \rangle} \varphi(2) p(2) & \frac{C\beta_0}{\langle k \rangle} 2\varphi(3) p(3) & \dots & \frac{C\beta_0}{\langle k \rangle} (C-1) \varphi(C) p(C) \end{pmatrix} \quad (10)$$

由于矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的秩等于 1, 所以矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的 C 个特征根分别为 $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \dots = \tilde{\lambda}_{C-1} = 0, \tilde{\lambda}_C = \beta_0 \frac{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k \rangle}$,

由矩阵 \mathbf{A} 的结构可知, 矩阵 \mathbf{A} 的 C 个特征根分别为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{C-1} = -1, \lambda_C = -1 + \beta_0 \frac{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k \rangle}$,

显然, 当 $\beta_0 < \lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}$ 时, \mathbf{A} 的所有特征根具有负实部, 从而模型(2) 的无病平衡点 $E_0 = 0$ 局

部稳定; 当 $\beta_0 > \lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}$ 时, 模型(2) 的无病平衡点 $E_0 = 0$ 不稳定.

取文献[13] 中的 $\varphi(k) = \begin{cases} 1 & 1 < k < k_0 \\ \frac{k_0}{k} & k \geq k_0 \end{cases}$, 考虑在度分度 $p(k) = \frac{2a^2}{k^3}, k \geq a$ 的无标度网络中对模型

(2) 的动力学性态进行数值仿真. 经计算无标度网络的平均度 $\langle k \rangle = \int_a^\infty kp(k) = 2a$, 其中 a 为网络中节点最小度. 假定网络节点总数 $N = 2\,000$, 节点的最小度是 3, 节点的最大度是 100, $k_0 = 50$, 算得平均度 $\langle k \rangle =$

6, 传播阈值 $\lambda_c = 0.1$.

图 1(a) 选取参数 $\beta_0 = 0.08 < \lambda_c = 0.1, \beta_1 = 0.08$, 给出了节点度分别为 $k = 10, k = 30, k = 80$ 时, 染病者 ρ_k 随时间 t 的变化曲线图, 该图的数值仿真表明: 当传染率 $\beta_0 = 0.08$ 小于传播阈值 $\lambda_c = 0.1$ 时, 染病者 ρ_k 随时间 t 逐渐趋向于无病平衡点 $E_0 = 0$, 疾病消失.

图 1(b) 选取参数 $\beta_0 = 0.2 > \lambda_c = 0.1, \beta_1 = 0.08$, 同样给出了节点度分别为 $k = 10, k = 30, k = 80$ 时, 染病者 ρ_k 随时间 t 的变化曲线图, 该图的数值仿真表明: 当传染率 $\beta_0 = 0.2$ 大于传播阈值 $\lambda_c = 0.1$ 时, 染病者 ρ_k 远离无病平衡点 $E_0 = 0$, 疾病会爆发.

注: 当 $\varphi(k) = 1$ 时, $\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1) \rangle} \ll 1$, 疾病的传播阈值 λ_c 非常小, 在这种情况下, 任一疾病都可以在网络中传播.

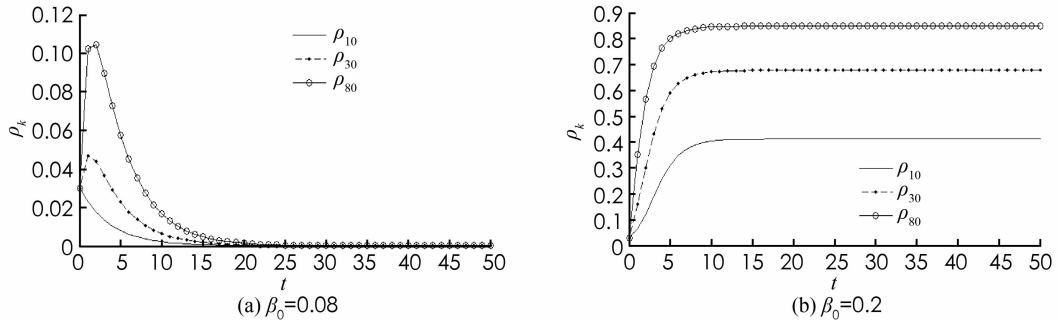


图 1 染病者随时间变化曲线图

当 $\varphi(k) = \frac{1}{k}$ 时, $\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k-1 \rangle} \approx 1$, 这种情况更加符合现实, 任一疾病要想在网络中传播, 除非它有极高的传染率.

定理 2 表明当 β_0 在 λ_c 的左右变化时无病平衡点 $E_0 = 0$ 的稳定性发生了改变. 下面用文献[16]的方法分析当 $\beta_0 = \lambda_c$ 时, 在无病平衡点 $E_0 = 0$ 处出现分支的情况.

2 模型(2)的 Transcritical 分支

考虑方程^[17]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = By + G(x, y) \end{cases} \quad (11)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, A$ 和 B 分别是 $n \times n, m \times m$ 阶常数矩阵且 A 的所有特征值均具有零实部, B 的所有特征值均具有负实部, F 和 G 分别是 \mathbb{R}^{n+m} 到 \mathbb{R}^n 和 \mathbb{R}^m 的映射, 满足

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= 0, \dot{F}(0, 0) = 0 \\ G(0, 0) &= 0, \dot{G}(0, 0) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

定义^[17] 设集合 $M = \{(x, h(x)) \mid h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ 是系统(11)的不变流形, 且满足 $h(0) = 0, \dot{h}(0) = 0$, 则称 M 是系统(11)的中心流形.

引理 1^[17] 设 A 的所有特征值均具有零实部, B 的所有特征值均具有负实部, $F(x, y)$ 和 $G(x, y)$ 是二阶连续的可微函数且满足(12)式, 则(11)式有一个局部 C^2 类中心流形 $y = h(x) (\|x\| < \delta)$.

引理 2^[17] 设 $y = h(x)$ 是满足引理 1 的中心流形, 代入(11)式得

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x, h(x)) \quad (13)$$

系统(11)零解的稳定性由(13)式零解的稳定性所决定.

引理 3^[18] 考虑如下系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \quad (14)$$

如果满足:

- 1) $f(0, 0) = 0$;
- 2) $f'_x(0, 0) = f'_{\mu}(0, 0) = 0$;
- 3) $f''_{x\mu}(0, 0) \neq 0, f''_{xx}(0, 0) \neq 0$;

则在 $(0, 0)$ 处发生跨临界分岔, 称为 Transcritical 分支.

当 $\beta_0 = \lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}$ 时, 模型(2) 在无病平衡点 $E_0 = 0$ 的雅可比矩阵 \mathbf{A} 的 C 个特征根分别

为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{C-1} = -1, \lambda_C = 0$, 无病平衡点 $E_0 = 0$ 是非双曲的. 矩阵 \mathbf{A} 的 C 个特征根对应的特征

向量分别为: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0, \dots, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1, -\frac{\varphi(2)P(2)}{2\varphi(3)P(3)}, 0, \dots, 0)^T, \mathbf{e}_3 = (0, 1, 0, -\frac{\varphi(2)P(2)}{3\varphi(4)P(4)}, \dots, 0)^T, \dots, \mathbf{e}_{C-1} = (0, 1, 0, \dots, -\frac{\varphi(2)P(2)}{(C-1)\varphi(C)P(C)})^T, \mathbf{e}_C = (1, 2, 3, \dots, C)^T$, 设 \mathbf{T}

是特征向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_C$ 构成的一个 $C \times C$ 矩阵

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{\varphi(2)P(2)}{2\varphi(3)P(3)} & 0 & \dots & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{\varphi(2)P(2)}{3\varphi(4)P(4)} & \dots & 0 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\varphi(2)P(2)}{(C-1)\varphi(C)P(C)} & C \end{pmatrix} \quad (15)$$

使得

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

利用变换

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_C \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_C \end{pmatrix} \quad (16)$$

推出

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \vdots \\ \rho_C \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_C \\ u_2 + u_3 + \dots + u_{C-1} + 2u_C \\ -\frac{\varphi(2)P(2)}{2\varphi(3)P(3)}u_2 + 3u_C \\ -\frac{\varphi(2)P(2)}{3\varphi(4)P(4)}u_3 + 4u_C \\ \vdots \\ -\frac{\varphi(2)P(2)}{(C-1)\varphi(C)P(C)}u_{C-1} + Cu_C \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{C-1} \\ u_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 - \frac{\langle k \rangle \Theta}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle} \\ -\frac{2\varphi(3)p(3)}{\varphi(2)p(2)}\rho_3 + \frac{3 \cdot 2\varphi(3)p(3)}{\varphi(2)p(2)} \cdot \frac{\langle k \rangle \Theta}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle} \\ -\frac{3\varphi(4)p(4)}{\varphi(2)p(2)}\rho_4 + \frac{4 \cdot 3\varphi(4)p(4)}{\varphi(2)p(2)} \cdot \frac{\langle k \rangle \Theta}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle} \\ \vdots \\ -\frac{(C-1)\varphi(C)p(C)}{\varphi(2)p(2)}\rho_C + \frac{C(C-1)\varphi(C)p(C)}{\varphi(2)p(2)} \cdot \frac{\langle k \rangle \Theta}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle} \\ \frac{\langle k \rangle \Theta}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle} \end{pmatrix} \quad (18)$$

令 $w = \beta_0 - \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}$, 将模型(2)换成关于 u_1, u_2, \dots, u_C, w 的封闭模型:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -u_1 - u_1 u_C + \left(1 + \frac{\langle k^2(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}\right) u_C^2 + \frac{2\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k \rangle} w u_C + O(|u_1, u_2, \dots, u_C, w|^3) \\ \frac{du_2}{dt} = -u_2 - 3u_2 u_C + \frac{3 \cdot 2\varphi(3)p(3)}{\varphi(2)p(2)} \left(3 - \frac{\langle k^2(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}\right) u_C^2 + O(|u_1, u_2, \dots, u_C, w|^3) \\ \dots \\ \frac{du_{C-1}}{dt} = -u_{C-1} - C u_{C-1} u_C + \frac{C(C-1)\varphi(C)p(C)}{\varphi(2)p(2)} \left(C - \frac{\langle k^2(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}\right) u_C^2 + O(|u_1, u_2, \dots, u_C, w|^3) \\ \frac{du_C}{dt} = -\frac{\langle k^2(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle} u_C^2 + \frac{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k \rangle} w u_C + O(|u_1, u_2, \dots, u_C, w|^3) \\ \frac{dw}{dt} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

这里的 $O(|u_1, u_2, \dots, u_C, w|^3)$ 表示含有公因式 u_C 且次数大于等于 3 的项, 模型(19)显然满足引理 1, 可知在原点 $\mathbf{0}$ 的某个领域, 存在一个中心流形 $(u_1, u_2, \dots, u_{C-1})^T = \mathbf{h}(u_C, w) = (h_1(u_C, w), h_2(u_C, w), \dots, h_{C-1}(u_C, w))^T$, 满足 $\mathbf{h}(0, 0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}'_{u_C}(0, 0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}'_w(0, 0) = \mathbf{0}$, 将 $h_i(u_C, w)$ 在 $\mathbf{0}$ 处展开得:

$$h_i(u_C, w) = a_i u_C^2 + b_i u_C w + c_i w^2 + \dots \quad (20)$$

应用引理 2, 将(20)式代入(19)式第 C 个式子中得

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{\langle k^2(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle} u_C^2 + \frac{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k \rangle} w u_C + O(|u_C, w|^3) = f(u_C, w) \quad (21)$$

满足 $f(0, 0) = 0, f'_{u_C}(0, 0) = f'_w(0, 0) = 0, f''_{u_C w}(0, 0) = \frac{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k \rangle} = \frac{1}{\beta_0} \neq 0, f''_{u_C u_C}(0, 0) = -\frac{2\langle k^2(k-1)\varphi(k) \rangle}{\langle k(k-1)\varphi(k) \rangle} \neq 0$, 由引理 3 可知 $(u_C, w) = (0, 0)$ 是(21)式的 Transcritical 分支点, 对应模型(2)中无病平衡点 $E_0 = \mathbf{0}$ 是 Transcritical 分支点.

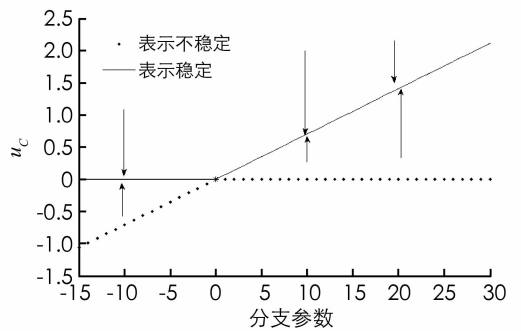


图 2 分支图

例 当取 $\varphi(k) = \frac{1}{k}, \langle k \rangle = 6$ 时, (21)式变成 $\frac{du_C}{dt} =$

$-11.8u_C^2 + 0.83wu_C + O(|u_C, w|^3) = f(u_C, w)$, 它在 $(0, 0)$ 的分支图见图 2.

参考文献:

[1] 马知恩, 王稳地, 周义仓, 等. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
 [2] 付恩骏, 王稳地, 姜翠翠. 具有非线性发生率的两株 SIS 传染病模型受季节性因素影响的稳定性分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(5): 52-60.

- [3] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of Scaling in Random Networks [J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509–512.
- [4] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic Spreading in Scale-Free Networks [J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(14): 3200–3203.
- [5] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic Dynamics and Endemic States in Complex Network [J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2001, 63(6): 138–158.
- [6] WANG Jia-zeng. Epidemic Spreading on Uncorrelated Heterogeneous Networks with Non-uniform Transmission [J]. *Physica A*, 2007, 382(2): 715–721.
- [7] BARTHELEMY M, BARRAT A, PASTOR-SATORRAS R, et al. Dynamical Patterns of Epidemic Outbreaks in Complex Heterogeneous Networks [J]. *J Theor Biol*, 2005, 235(2): 275–288.
- [8] NEWMAN M E J. The Structure and Function of Complex Networks [J]. *SIAM Rev*, 2003, 45(2): 167–256.
- [9] SMALL M, TSE C K. Clustering Model for Transmission of the SARS Virus: Application to Epidemic Control and Risk Assessment [J]. *Physica A*, 2005, 351(2): 499–511.
- [10] LILJEROS F, EDLING C R, AMARAL L A, et al. The Web of Human Sexual Contacts [J]. *Nature*, 2001, 411(6840): 907–908.
- [11] MAY R M, LLOYD A L. Infection Dynamics on Scale-free Networks [J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2002, 64(6): 116–126.
- [12] OLINKY R, STONE L. Unexpected Epidemic Thresholds in Heterogeneous Networks: The Role of Disease Transmission [J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2004, 70(1): 193–204.
- [13] JOO J, LEBOWITZ J L. Behavior of Susceptible? Infected? Susceptible Epidemics on Heterogeneous Networks with Saturation [J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2004, 69(1): 66–105.
- [14] PICCARDI C, CASAGRANDE R. Inefficient Epidemic Spreading in Scale-Free Networks [J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2008, 77(2): 255–282.
- [15] YORKE J A. Invariance for Ordinary Differential Equations [J]. *Theor Comput Syst*, 1967, 1(4): 353–372.
- [16] 杨名远, 刘茂省. 复杂网络中流行病模型的全局渐近稳定性及其分支 [J]. *复旦大学学报(自然科学版)*, 2011, 50(1): 1–9.
- [17] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [18] GLENDINNING P. Stability Instability and Chaos: an Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

Analysis of Bifurcation and Stability of an SIS Epidemic Model with Nonlinear Transmission Rate in Scale-free Networks

WANG Zhen-guo¹, LIU Gui-rong²

1. Department of Mathematics, Luliang University, Luliang Shanxi 033000, China;

2. School of Mathematical Sciences, Shanxi University, taiyuan 030006, China

Abstract: An SIS epidemic model has been investigated with nonlinear transmission rate in scale-free networks. The epidemic threshold $\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1) \varphi(k) \rangle}$ has been found. The results show that If $\beta_0 < \lambda_c$, then the disease free equilibrium $E_0 = 0$ is the locally stable; If $\beta_0 < \lambda_c$, then the disease free equilibrium $E_0 = 0$ is unstable; Lastly, when $\beta_0 < \lambda_c$, we study the system's Transcritical bifurcation exists at the disease free equilibrium $E_0 = 0$.

Key words: SIS epidemic model; scale-free networks; stability; Transcritical bifurcation