DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.04.002

平面图的单射染色①

朱海洋[1]，　王淑玲[2]，　刘　嫚[2]，　吕新忠[3]

1. 空军勤务学院 飞行保障指挥系，江苏 徐州 221000；2. 空军勤务学院 基础部，江苏 徐州 221000；
3. 浙江师范大学 数理与信息工程学院，浙江 金华 321004

摘要： 利用欧拉公式和权转移规则，证明了：若 G 为最大度 $\Delta(G)\leqslant 6$ 且不含 4,5,6,7 -圈的平面图，则图 G 的单射色数的上界为 $\Delta(G)+5$.

关 键 词： 平面图；单射染色；单射色数；圈

中图分类号：O157.5　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2017)04-0007-07

用 $V(G)$,$E(G)$,$F(G)$,$\Delta(G)$,$\delta(G)$,$g(G)$,$d_G(u, v)$,G^2 和 $\chi(G)$ 分别表示平图 G 的点集合、边集合、面集合、最大度、最小度、围长、点 u,v 之间的距离、平方图和点色数. 度数为 k 或至少为 k 的点(面)，称为 k -点(面)或 k^+ -点(面). 平面图的 3 -面也称为三角形. 其它术语见文献[1]. 文献[2]介绍了单射染色，并且研究了几类特殊图(完全图、路、圈、星)的单射色数.

定义 1　图 G 的单射 k -染色是一个映射 $f: V(G)\longrightarrow\{1, \cdots, k\}$，其中 f 满足：对任意的不同顶点 u，$v\in V(G)$，若 u 和 v 具有共同的邻点，则 $f(u)\neq f(v)$. 图 G 的单射色数是使得 G 存在单射 k -染色的最小的整数 k，记为 $\chi_i(G)$.

图的单射染色是图的点染色的推广. 文献[3]证明了：如果 G 为 $\Delta(G)=3$ 的平面图，那么 $\chi(G^2)\leqslant 8$，同时给出以下猜想：

猜想 1[3]　令 G 为平面图，如果 $\Delta(G)=3$，那么 $\chi(G^2)\leqslant 7$；如果 $4\leqslant\Delta(G)\leqslant 7$，那么 $\chi(G^2)\leqslant\Delta(G)+5$；否则 $\chi(G^2)\leqslant\left\lfloor\dfrac{3\Delta(G)}{2}\right\rfloor+1$.

文献[4]证明了：$\chi(G^2)\leqslant 2\Delta(G)+25$. 文献[5]证明了：$\chi(G^2)\leqslant\left\lceil\dfrac{5\Delta(G)}{3}\right\rceil+78$. 文献[6]证明了：若 G 是没有 4 -圈的平面图，则 $\chi(G^2)\leqslant\Delta(G)+12$. 文献[7-8]得到了：若 G 是围长 $g(G)\geqslant 5$ 的平面图，则 $\chi(G^2)\leqslant\Delta(G)+9$；若 G 是围长 $g(G)\geqslant 6$ 的平面图，则 $\chi(G^2)\leqslant\Delta(G)+5$. 文献[9]给出了以下猜想，若猜想成立，上界是可达的：

猜想 2[9]　令 G 为平面图，如果 $\Delta(G)=3$，那么 $\chi_i(G)\leqslant 5$；如果 $4\leqslant\Delta(G)\leqslant 7$，那么 $\chi_i(G)\leqslant\Delta(G)+5$；否则 $\chi_i(G)\leqslant\left\lfloor\dfrac{3\Delta(G)}{2}\right\rfloor+1$.

文献[10]得到了：如果 $\mathrm{Mad}(G)<\dfrac{14}{5}$，那么 $\chi_i(G)\leqslant\Delta(G)+3$；如果 $\mathrm{Mad}(G)<3$，那么 $\chi_i(G)\leqslant\Delta(G)+4$；如果 $\mathrm{Mad}(G)<\dfrac{10}{3}$，那么 $\chi_i(G)\leqslant\Delta(G)+8$.

---

① 收稿日期：2016-06-01
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61170302).
作者简介：朱海洋(1979-)，男，吉林白城人，讲师，主要从事图论与军事运筹学的研究.

本文研究了 $\Delta(G) \leqslant 6$ 且不含 4,5,6,7 -圈的平面图 G 的单射染色问题，得到了以下结论：若 G 是 $\Delta(G) \leqslant 6$ 且不含 4,5,6,7 -圈的平面图，猜想 1 和猜想 2 成立.

1 预备知识

令 G 为平面图，由 Euler 公式可得

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 4) = -8$$

若不然，设 G 为一个反例，对于任意的 $x \in V(G) \cup F(G)$，定义权函数 $w(x) = d(x) - 4$. 然后定义适当权分配规则，重新分配点和面的权，使得任意 $x \in V(G) \cup F(G)$，得到一个权 $w'(x) \geqslant 0$，得到

$$0 \leqslant \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w'(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = -8 < 0$$

矛盾. 用 $w(x \to y)$ 表示从一个元素 x 分配给另一个元素 y 的权.

引理 1 如果 G 是 $\Delta(G) \leqslant 5$ 并且不含 4,5,6,7 -圈的平面图，那么 G 存在 k -点 u 满足以下构型之一：

(Q1) $k = 1$；

(Q2) $k = 2$，$d(u_1) = 2$；

(Q3) $k = 2$，u 关联一个三角形 $[uu_1u_2]$，$d(u_1) \leqslant 5$；

(Q4) $k = 3$，u 不关联任何三角形，$d(u_1) = 2$，$d(u_2) \leqslant 4$；

(Q5) $k = 3$，$d(u_1) = 2$，u 关联一个三角形 $[uu_2u_3]$，$d(u_2) \leqslant 5$；

(Q6) $3 \leqslant k \leqslant 4$，$u$ 关联一个三角形 $[uxy]$，$d(x) = d(y) = 3$.

其中 $u_1, \cdots, u_k$ 为 u 的相邻顶点，并且 $d(u_1) \leqslant d(u_2) \leqslant \cdots \leqslant d(u_k)$.

证 反证法. 假设 G 为 $\Delta(G) \leqslant 5$ 且不包含 4,5,6,7 -圈的平面图，但 G 不包含(Q1)-(Q6) 的任何构型. 因为 G 没有 4 -圈，所以 G 不存在两个相邻三角形. 因为 G 没有构型(Q1) 和(Q2)，所以 $\delta(G) \geqslant 2$，G 中没有两个相邻的 2 -点. 以下给出重新分配点和面的权分配规则：

(W1) 任意 8^+ -面 f 分配权 $\frac{1}{2}$ 给每个相关联的顶点；

(W2) 任意 3^+ -点 u 分配权 $\frac{1}{2}$ 给每个相邻的 2 -点；

(W3) 任意 5 -点 u 分配权 1 给每个相关联的三角形；

(W4) 任意 4 -点 u 分配权 $\frac{1}{2}$ 给每个相关联的三角形.

用 w' 记最终权函数，根据权分配规则知，显然任意的 $x \in F(G)$，均有 $w'(x) \geqslant 0$. 令 $u \in V(G)$，分 4 种情形讨论：

情况 1 $d(u) = 2$. 设 x, y 为 u 的邻点，f_1, f_2 为 u 的关联面. 因为 G 没有构型(Q2)，所以 x, y 均为 3^+ -点. 因为 G 没有其邻点满足构型(Q3) 的 2 -点，所以 u 不关联任何三角形. 这样 $d(f_1) \geqslant 8$，$d(f_2) \geqslant 8$. 因此由规则(W1) 和(W2) 知

$$w'(u) = 2 - 4 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$$

情况 2 $d(u) = 3$. 设 f_1, f_2 和 f_3 为 u 的关联面.

若 u 不关联任何三角形，因为 G 没有其邻点满足构型(Q4) 的 3 -点，所以 u 至多相邻一个 2 -点. 由规则(W1) 和(W2)，u 从 f_1, f_2 和 f_3 各获得的权为 $\frac{1}{2}$，u 分配给相邻 2 -点的权为 $\frac{1}{2}$，从而

$$w'(u) \geqslant 3 - 4 + \frac{1}{2} \times 3 - \frac{1}{2} = 0$$

如果 u 关联某个三角形，因为 G 没有 4 -圈，所以 u 只关联一个三角形. 不妨设 $f_1 = [uxy]$ 为三角形. 因为 G 没有构型(Q3)，所以 f_1 不关联任何 2 -点. 又因为 G 没有其邻点满足构型(Q5) 的 3 -点，所以 u 不

相邻任何 2 -点．由规则（W1）知，u 从 f_2 和 f_3 各获得权$\frac{1}{2}$，从而

$$w'(u)=3-4+\frac{1}{2}\times 2=0$$

情况 3　$d(u)=4$．设 u 关联 t 个三角形，则 u 关联 $4-t$ 个 8^+ -面．因为 G 没有构型（Q3），所以 u 至多相邻 $4-2t$ 个 2 -点．由规则（W1），（W2）和（W4）可得

$$w'(u)\geqslant 4-4+\frac{1}{2}\times(4-t)-\frac{t}{2}-\frac{4-2t}{2}=$$

$$4-4+\frac{1}{2}\times 4-\frac{t}{2}-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\times 4+t=0$$

情况 4　$d(u)=5$．设 u 关联 t 个三角形，则 u 关联 $5-t$ 个 8^+ -面．因为 G 没有其邻点满足构型（Q3）的 2 -点，因此 u 至多相邻 $5-2t$ 个 2 -点．由规则（W1），（W2）和（W3）可得

$$w'(u)\geqslant 5-4+\frac{5-t}{2}-t-\frac{5-2t}{2}=5-4-\frac{t}{2}$$

由 $d(u)=5$，则 $t\leqslant 2$，因此

$$w'(u)\geqslant 5-4-\frac{1}{2}\times 2=0$$

若 G 没有（Q1）－（Q6）的任何构形，则 $\sum_{x\in V(G)\cup F(G)} w'(x)\geqslant 0$，矛盾．

引理 2　如果 G 为 $\Delta(G)=6$ 且没有 4，5，6，7 -圈的平面图，那么 G 存在 k -点 u 满足以下构型之一：

（Q1）$k=1$；

（Q2）$k=2$，$d(u_1)=2$；

（Q3）$k=2$，u 关联一个三角形$[uu_1u_2]$，$d(u_1)\leqslant 6$；

（Q4）$k=3$，$d(u_1)=2$，$d(u_2)\leqslant 3$；

（Q5）$k=3$，$d(u_1)=2$，u 关联一个三角形$[uu_2u_3]$，$d(u_2)\leqslant 5$；

（Q6）$k=3$，u 关联一个三角形$[uxy]$，$d(x)=d(y)=3$；

（Q7）$k=4$，$d(u_1)=d(u_2)=d(u_3)=2$；

（Q8）$k=4$，$d(u_1)=d(u_2)=2$，u 关联一个三角形$[uu_3u_4]$，$d(u_3)\leqslant 4$；

（Q9）$k=4$，u 关联 2 个三角形$[uxy]$ 和$[uwv]$ 满足 $d(x)=d(y)=3$，$3\leqslant d(w)\leqslant 4$，$3\leqslant d(v)\leqslant 4$．

其中 $u_1,\cdots,u_k$ 为 u 的相邻顶点，满足 $d(u_1)\leqslant d(u_2)\leqslant\cdots\leqslant d(u_k)$．

证　反证法．设 G 为 $\Delta(G)=6$ 和没有 4，5，6，7 -圈的平面图，但 G 不包含任何构型（Q1）－（Q9）．显然 $\delta(G)\geqslant 2$，G 中无两个相邻 2 -点，且没有两个相邻三角形．下面给出权分配规则：

（W1）任意 8^+ -面 f 分配权$\frac{1}{2}$ 给每个相关联的顶点；

（W2）任意 3^+ -点 u 分配权$\frac{1}{2}$ 给每个相邻的 2 -点；

（W3）任意 5^+ -点 u 分配权 1 给每个相关联的三角形；

（W4）设 u 是一个 4 -点，$f=[uxy]$ 为关联 u 的三角形，如果 $d(x)=d(y)=3$，那么 u 分配权 1 给 f，否则 u 分配权$\frac{1}{2}$ 给 f．

设 w' 表示最终权函数．根据权分配规则，显然任意的 $x\in F(G)$，均有 $w'(x)\geqslant 0$．令 $u\in V(G)$，分 4 种情形：

情况 1　$d(u)=2$．设 x,y 为 u 的邻点，f_1,f_2 为 u 的关联面，那么 x,y 均为 3^+ -点．因为 G 没有构型（Q3），所以 u 不关联任何三角形，即 $d(f_1)\geqslant 8$ 和 $d(f_2)\geqslant 8$．由规则（W1）和（W2）知：

$$W(f_1\rightarrow u)=W(f_2\rightarrow u)=\frac{1}{2}$$

$$W(x \rightarrow u) = W(y \rightarrow u) = \frac{1}{2}$$

从而

$$w'(u) = 2 - 4 + \frac{1}{2} \times 4 = 0$$

情况2 $d(u) = 3$. 设 f_1, f_2 和 f_3 为 u 的关联面，分2种情形：

情况2.1 若 u 不关联任何三角形，因为 G 没有邻点满足构型(Q4)的3-点，所以 u 至多相邻一个2-点. 由规则(W1)和(W2)知，u 可从 f_1, f_2, f_3 各获得的权为$\frac{1}{2}$，u 分配给相邻2-点的权为$\frac{1}{2}$，从而

$$w'(u) = 3 - 4 + \frac{1}{2} \times 3 - \frac{1}{2} = 0$$

情况2.2 若 u 关联某个三角形，因为 G 没有4-圈，所以 u 仅仅关联一个三角形. 不妨设 $f_1 = [uxy]$ 为该三角形. 因为 G 没有构型(Q3)，所以 f_1 不关联任何2-点.

(a) 若 u 不相邻任何2-点，由规则(W1)，u 可从 f_2, f_3 各获得权$\frac{1}{2}$，从而

$$w'(u) = 3 - 4 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$$

(b) 若 u 相邻2-点，因为 G 没有其邻点满足构型(Q5)的3-点，则 $d(x) = 6$ 和 $d(y) = 6$. 由规则(W1)和(W2)知，u 可从 f_2 和 f_3 各获得权$\frac{1}{2}$，u 分配给相邻2-点的权为$\frac{1}{2}$. 另外由规则(W3)知

$$W(x \rightarrow f_1) = W(y \rightarrow f_1) = 1$$

因此

$$w'(f_1) = 3 - 4 + 1 \times 2 = 1$$

现重新分配 f_1 的权$\frac{1}{2}$给 u，从而 u 的新权

$$w'(u) = 3 - 4 + \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

注意此时 f_1 重新得到的权不小于0.

情况3 $d(u) = 4$. 分3种子情形：

情况3.1 u 不关联任何三角形. 因为 G 没有其邻点满足构型(Q7)的4-点，所以 u 至多相邻2个2-点. 由规则(W1)和(W2)知，u 可从每个相关联的面获得权$\frac{1}{2}$，u 分配给每个相邻2-点的权为$\frac{1}{2}$，所以

$$w'(u) \geqslant 4 - 4 + \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

情况3.2 u 只关联一个三角形. 那么 u 关联的其它面均为 8^+-面. 因为 G 没有构型(Q3)，所以 u 的关联三角形不关联任何2-点. 那么 u 至多相邻2个2-点.

(a) 若 u 至多相邻1个2-点，由规则(W1)和(W2)知，u 可从每个 8^+-面获得权$\frac{1}{2}$，u 分配给相邻2-点的权为$\frac{1}{2}$. 由规则(W4)知，u 分配给关联三角形的权至多为1，所以

$$w'(u) \geqslant 4 - 4 + \frac{1}{2} \times 3 - \frac{1}{2} - 1 = 0$$

(b) 若 u 相邻2个2-点，设 u_1, u_2, u_3 和 u_4 是 u 的4个邻点，且

$$d(u_1) \leqslant d(u_2) \leqslant d(u_3) \leqslant d(u_4)$$

那么 u_1 和 u_2 为2-点. 因为 G 没有构型(Q8)，则 $d(u_4) \geqslant d(u_3) \geqslant 5$. 由规则(W4)知，$u$ 分配给三角形 $[uu_3u_4]$ 的权为$\frac{1}{2}$. 所以由规则(W1)，(W2)和(W4)知

$$w'(u) \geqslant 4-4+\frac{1}{2}\times 3-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}=0$$

情况 3.3　若 u 关联 2 个三角形．设 $f_1=[uzz']$ 和 $f_2=[utt']$ 为 u 的关联三角形，且：

$$d(z')\geqslant d(z) \qquad d(t')\geqslant d(t)$$

因为 G 没有构型(Q3)，所以 f_1 和 f_2 都不关联任何 2-点．

(a) f_1 和 f_2 都至少关联 2 个 4^+-点．由规则(W4)知

$$W(u\rightarrow f_1)=W(u\rightarrow f_2)=\frac{1}{2}$$

所以由规则(W1)和(W4)知

$$w'(u)=4-4+\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}\times 2=0$$

(b) f_1 或者 f_2 关联 2 个 3-点．因为 G 没有构型(Q9)，所以 u 只关联一个三角形，该三角形关联 2 个 3-点．不妨设 $f_1=[uzz']$ 为三角形，其中 $d(z)=d(z')=3$．那么 $d(t)\geqslant 3$，$d(t')\geqslant 5$．由规则(W4)知

$$W(u\rightarrow f_1)=1 \qquad W(u\rightarrow f_2)=\frac{1}{2}$$

另外由规则(W3)知，$W(t'\rightarrow f_2)=1$．因此，若 $d(t)=3$，则

$$w'(f_2)=3-4+1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

若 $d(t)=4$，则

$$W(t\rightarrow f_2)=\frac{1}{2}$$

所以

$$w'(f_2)=3-4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

若 $d(t)\geqslant 5$，则 $W(t\rightarrow f_2)=1$，所以

$$w'(f_2)=3-4+1+\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

现重新分配 f_2 的权$\frac{1}{2}$给 u，从而 u 的新权

$$w'(u)=4-4+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}=0$$

注意，此时 f_2 重新得到的权不小于 0．

情况 4　$d(u)=5,6$．设 u 关联 t 个三角形，则 u 关联 $d(u)-t$ 个 8^+-面．因为 G 没有构型(Q3)，因此 u 至多相邻 $d(u)-2t$ 个 2-点．由规则(W1)，(W2)和(W3)，可得

$$w'(u)\geqslant d(u)-4+\frac{d(u)-t}{2}-t-\frac{d(u)-2t}{2}=$$

$$d(u)-4-\frac{t}{2}$$

若 $d(u)=5$，则 $t\leqslant 2$，因此

$$w'(u)\geqslant 5-4-\frac{1}{2}\times 2=0$$

若 $d(u)=6$，则 $t\leqslant 3$，因此

$$w'(u)\geqslant 6-4-\frac{1}{2}\times 3=\frac{1}{2}>0$$

若 G 没有(Q1)－(Q9)的任何构形，则 $\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)} w'(x)\geqslant 0$，矛盾．

2 主要结论

令 $L=\{1,\cdots,n\}$ 为颜色集合，$n=\Delta(G)+5$. 假设 $V'\subseteq V(G)$ 进行了部分单射染色，映射为 φ. 设 $u\in V(G)\backslash V'$，令 $F(u)$ 为 u 的禁用颜色的集合，如果 $|F(u)|<n$，令 $\varphi(u)\in L\backslash F(u)$.

定理 1 若 G 是 $\Delta(G)\leqslant 6$ 且不含 4,5,6,7 -圈的平面图，则 $\chi_i(G)\leqslant\Delta(G)+5$.

证 反证法. 分两种情形 $\Delta(G)\leqslant 5$ 和 $\Delta(G)=6$：

情形 1 $\Delta(G)\leqslant 5$. 由引理 1，G 包含满足构型(Q1)-(Q6)之一的顶点 u. 若 G 包含构型(Q1)或(Q3)，令 $H=G-u$；若 G 包含构型(Q2)，(Q4)或(Q5)，令 $H=G-u_1$；若 G 包含构型(Q6)，令 $H=G-xy$. 显然，H 是没有 4,5,6,7 -圈的平面图，且：

$$\Delta(H)\leqslant\Delta(G)\qquad |E(H)|<|E(G)|$$

由 G 的边数的极小性，H 存在一个 n -单射染色，设 φ 是 H 的一个 n -单射染色.

若 G 包含构型(Q1)，因为 $|F(u)|\leqslant\Delta(G)-1<n$，则令 $\varphi(u)\in L\backslash F(u)$.

若 G 包含构型(Q2)，现在去掉 u 的原有颜色，对于任意的 $x\in\{u,u_1\}$，都有 $|F(x)|\leqslant 2+(\Delta(G)-1+1)<n$，令 $\varphi(x)\in L\backslash F(x)$.

若 G 包含构型(Q3)，因为 $|F(u)|\leqslant 2+(\Delta(G)-2+3)<n$，令 $\varphi(u)\in L\backslash F(u)$. 于是 φ 可以扩展为 G 的一个 n -单射染色.

若 G 包含构型(Q4)，首先去掉 u 的原有颜色，因为 u 不关联三角形，则 $|F(u)|\leqslant\sum_{i=1}^{3}d(u_i)-1\leqslant\Delta(G)-1+3+1<n$，令 $\varphi(u)\in L\backslash F(u)$. 其次给 u_1 进行染色，因为 $F(u_1)\leqslant 2+(\Delta(G)-1+2)<n$，令 $\varphi(u_1)\in L\backslash F(u_1)$. 于是 φ 可以扩展为 G 的一个 n -单射染色.

若 G 包含构型(Q5)，首先去掉 u 的颜色，因为 $|F(u)|\leqslant 2+\Delta(G)-2+3+1<n$，令 $\varphi(u)\in L\backslash F(u)$. 其次给 u_1 进行染色，因为 $F(u_1)\leqslant 2+(\Delta(G)-1+2)<n$，令 $\varphi(u_1)\in L\backslash F(u_1)$. 于是 φ 可以扩展为 G 的一个 n -单射染色.

若 G 包含构型(Q6)，首先去掉 x 和 y 的颜色，因为 $|F(x)|\leqslant 5+\Delta(G)-1<n$，令 $\varphi(x)\in L\backslash F(x)$. 其次给 y 进行染色，因为 $F(y)\leqslant 5+\Delta(G)-1<n$，令 $\varphi(y)\in L\backslash F(y)$. 于是 φ 是 G 的一个 n -单射染色.

情况 2 $\Delta(G)=6$. 由引理 2，G 包含满足构型(Q1)-(Q9)之一的顶点 u. 若 G 包含构型(Q1)或(Q3)，令 $H=G-u$；若 G 包含构型(Q2)，(Q4)，(Q5)，(Q7)，(Q8)之一，令 $H=G-u_1$；若 G 包含构型(Q6)，令 $H=G-xy$；若 G 包含构型(Q9)，令 $H=G-u_1u_2$. 显然，H 是没有 4,5,6,7 -圈的平面图，且：

$$\Delta(H)\leqslant\Delta(G)\qquad |E(H)|<|E(G)|$$

若 $\Delta(H)\leqslant 5$，由情况 1 知

$$\chi_i(H)\leqslant\Delta(H)+5<\Delta(G)+5$$

若 $\Delta(H)=\Delta(G)$，由 G 的边数的极小性，设 φ 是 H 的一个 n -单射染色. 若 G 包含构型(Q1)，(Q2)或(Q3). 类似于情况 1 中的讨论知，φ 可以扩展为 G 的 n -单射染色.

若 G 包含构型(Q4)，首先去掉 u 的原有颜色，因为 $|F(u)|\leqslant\Delta(G)+3+1<n$，令 $\varphi(u)\in L\backslash F(u)$. 其次给 u_1 进行染色，因为 $|F(u_1)|\leqslant\Delta(G)+3<n$，令 $\varphi(u_1)\in L\backslash F(u_1)$.

若 G 包含构型(Q5)，首先去掉 u 的原有颜色，因为 $|F(u)|\leqslant 2+(\Delta(G)-2+3+1)<n$，令 $\varphi(u)\in L\backslash F(u)$. 其次给 u_1 进行染色，因为 $|F(u_1)|\leqslant\Delta(G)+3<n$，令 $\varphi(u_1)\in L\backslash F(u_1)$.

若 G 包含构型(Q6)，首先去掉 x 和 y 的原有颜色，因为任意的 $t\in\{x,y\}$，都有 $|F(t)|\leqslant\Delta(G)+4<n$，令 $\varphi(t)\in L\backslash F(t)$. 于是 φ 可以扩展为 G 的 n -单射染色.

若 G 包含构型(Q7)，去掉 u 和 u_2 的原有颜色，因为 $|F(u)|\leqslant\Delta(G)+2+1+1<n$，令 $\varphi(u)\in L\backslash F(u)$. 其次给 u_1,u_2 进行染色，因为 $|F(u_i)|\leqslant\Delta(G)+4<n$，令 $\varphi(u_i)\in L\backslash F(u_i)$，其中 $i=1,2$.

若 G 包含构型(Q8)，去掉 u 和 u_2 的原有颜色，因为 $|F(u)|\leqslant 2+\Delta(G)-2+2+1+1<n$，令 $\varphi(u)\in L\backslash F(u)$，其次给 u_1,u_2 进行染色，因为 $|F(u_i)|\leqslant\Delta(G)+4<n$，令 $\varphi(u_i)\in L\backslash F(u_i)$，其中 $i=$

1,2. 于是 φ 是 G^2 的一个 n-单射染色.

若 G 包含构型(Q9)，首先去掉 u,x,y 的原有颜色，因为任意 $t\in\{x, y\}$，都有 $|F(t)|\leqslant\Delta(G)+4<n$，令 $\varphi(t)\in L\backslash F(t)$. 其次给 u 进行染色，因为 $|F(u)|\leqslant 4+\sum_{w\in N(u)}(d(w)-2)\leqslant 4+6\leqslant 4+\Delta(G)<n$，令 $\varphi(u)\in L\backslash F(u)$. 每一种情况下 φ 都可以扩展到 G 的 n-单射染色，这与假设相矛盾. 证毕.

参考文献：

[1] WEST D B. Introduction to Graph Theory [M]. 2th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2006: 2－30.

[2] HAHN G, KRATOCHV J, JOZEF N, et al. On the Injective Chromatic Number of Graphs [J]. Discrete Mathematics, 2002, 256(1－2): 179－192.

[3] WEGNER G. Graphs With Given Diameter and Coloring Problem [R]. Technical Report, University of Dortmund, Dortmund, Germany, 1977.

[4] JAN V D H, McGUINESS S. Coloring of the Square of a Planar Graph [J]. J Graph Theory, 2003, 42(2): 110－124.

[5] MOLLY M, SAL AVATIPOUR M R. A Bound on the Chromatic Number of the Square of a Planar Graph [J]. J Combinatorial Theory, 2005, 94(2): 189－213.

[6] ZHU H Y, HOU L F, CHEN W, et al. The $L(p, q)$-Labelling of Planar Graphs without 4-Cycles [J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 162(1): 355－363.

[7] 朱海洋，侯立峰，陈　伟，等. 围长至少为 5 的平面图的 $L(p, q)$-标号[J]. 山东大学学报(理学版)，2011，46(8)：95－103.

[8] 朱海洋，吕新忠，盛景军，等. 围长至少为 6 的平面图的 $L(p, q)$-标号[J]. 山东大学学报(理学版)，2011，46(4)：9－16.

[9] LUŽAR B. Planar Graphs with Largest Injective Chromatic Numbers [J]. IMFM Preprint Series, 2010, 48: 1110－1115.

[10] DOYON A, HAHN G, RASPAUD A. Some Bounds on the Injective Chromatic Number of Graphs [J]. Discrete Mathematics, 2010, 310: 585－590.

Injective Coloring of Planar Graphs

ZHU Hai-yang[1], WANG Shu-ling[2], LIU Man[2], LV Xin-zhong[3]

1. *Department of Flight Support Command, Air Force Logistics College, Xuzhou Jiangsu 221000, China;*
2. *Department of Basic Courses, Air Force Logistics College, Xuzhou Jiangsu 221000, China;*
3. *College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang 321004, China*

Abstract: With Euler's formula and Discharging Rules, it has been proved that if G be a planar graph with maximum degree $\Delta(G)\leqslant 6$ and without 4,5,6,7-cycles, then the upper bound of injective chromatic number of G is $\Delta(G)+5$.

Key words: planar graph; injective coloring; injective chromatic number; cycles

责任编辑　廖　坤