

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.04.003

根图的稳定性及其优化^①

王冰杰¹, 唐晓清²

1. 白城师范学院 数学与统计学院, 吉林 白城 137000; 2. 上海立信会计金融学院 统计与数学学院, 上海 201620

摘要: 设灾难发生时, 根图 G 的边以概率 p 独立幸存, 则含根连通子图的顶点数的期望值 $EV(G; p)$ 是根图的可靠性的合适指标. 定义了子图的顶点数的平方期望值 $E2(G; p)$ 后, 则方差 $D(G; p) = E2(G; p) - [EV(G; p)]^2$ 是根图稳定性的合适指标. 推导得到了 $E2(G; p)$ 的减-缩边公式, 从而得到方差的一个递归计算方法. 进而研究了一些特殊图的方差的计算公式. 最后, 结合期望和方差, 讨论了根图的优化问题.

关键词: 根图; 可靠性; 稳定性; 减-缩边公式; 期望-方差优化

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2017)04-0014-06

生活中, 根图(网络)可以说是无处不在, 比如因特网、有线电视网、供水网、供电网、电脑局域网等等. 这些网络有一个共同的特点, 就是网络中有一个功能中心(根), 其它的用户(顶点)通过连线(边)与功能中心连接. 而且, 只有当这些顶点与根连通时候, 才能正常工作, 这样的图称之为根图(含根网络).

有人最初提出根图的可靠性概念, 就是设每个顶点总是不失效, 而每条边在灾难发生时, 独立以概率 p 幸存, 则灾后与根正常连通的边数的概率, 这是一个 p 的多项式. 此后, 关于可靠性问题的相关研究有很多, 比如最佳二阶可靠性^[1]、双概率可靠性^[2]、成对连接可靠性^[3]、持续力^[4]、可到达性^[5]、根树的边数期望值^[6]、连通子图的边数期望值^[7]、顶点数期望值问题^[8]等. 文献[9]研究了顶点以概率 p 幸存时的边数期望值问题.

众所周知, 方差表示随机变量的波动性大小, 反映根图的稳定性. 现在以方差作为根图的稳定性指标, 进行研究.

1 平方期望与减-缩边公式

1.1 期望值

设根图 $G = (V, E)$, 其中 E 是边集, V 是顶点集, $*$ 表示根顶点. 子集 $S \subseteq E$, $r(S)$ 表示包含根的子图中顶点的数目. 设根图的每一条边在灾后的幸存概率是 p , 并且任何两条边是否幸存是独立的. 设在一个连接根的通路中, 如果前面的边失效, 则后面的边将不再考虑计数, 即认为不再连通了. 则此顶点数是一个随机变量, 在概率环境中, 研究和根连通的顶点的方差.

定义 1^[7] 设 G 是一个简单连通根图(即: 没有环和重边), 那么它的顶点数期望值是

$$EV(G; p) = \sum_{S \subseteq E} r(S) p^{|S|} (1-p)^{|E-S|} \quad (1)$$

其中 $|S|$ 表示集合 S 的阶.

① 收稿日期: 2016-04-15

基金项目: 吉林省自然科学基金项目(20101564); 吉林省教育科学“十二五”规划重点自助课题(ZC12069).

作者简介: 王冰杰(1967-), 女, 吉林白城人, 教授, 主要从事微分方程和随机图的研究.

通信作者: 唐晓清(1972-), 男, 湖南邵阳人, 博士, 讲师, 主要从事图论和经济模型的研究.

1.2 平方期望

定义 2 对根图 G , 平方期望值是

$$E2(G; p) = \sum_{S \subseteq E} [r(S)]^2 p^{|S|} (1-p)^{|E-S|} \quad (2)$$

定理 1 设 G 是一个简单连通根图, 边 e (非环) 邻接于根 $*$, 另一端顶点是 v . 那么

$$E2(G; p) = (1-p) \cdot E2(G_{-e}; p) + p \cdot E2(G_{/e}; p) + 2p \cdot EV(G_{/e}; p) + p \quad (3)$$

证 使用条件概率方法, 令 Y_G 是含根连通子图的顶点数, 则

$$E(Y_G) = p \cdot (Y_G | e \rightarrow \text{幸存}) + (1-p) \cdot (Y_G | e \rightarrow \text{失效})$$

当边 e 幸存时, $Y_G = Y_{G_{/e}} + 1$; 当 e 失效时, $Y_G = Y_{G_{-e}}$. 故

$$\begin{aligned} E2(G; p) &= (1-p) \cdot \left\{ \sum_{S \subseteq E} (Y_{A_{-e}})^2 p^{|S|} (1-p)^{|E-S|} \right\} + p \cdot \left\{ \sum_{S \subseteq E} (Y_{A_{/e}} + 1)^2 p^{|S|} (1-p)^{|E-S|} \right\} = \\ &= (1-p) \cdot E2(G_{-e}; p) + p \cdot E2(G_{/e}; p) + 2p \cdot EV(G_{/e}; p) + p \end{aligned}$$

定理 2 设 G 是有 n 个顶点的根图, 则平方期望值的系数之和是 n^2 , 即

$$E2(G; p) = \sum_i a_i p^i \quad (4)$$

那么 $\sum_i a_i = n^2$.

证 令 $p = 1$, 则

$$E2(G; p) = E2(G; 1) = \sum_i a_i$$

而 $p = 1$ 意味着所有的边全幸存, 此时顶点数的平方当然为 n^2 .

性质 1^[9] (i) 设根图 G 有 n 个顶点, 则 $E2(G; p)$ 能在 $o(n)$ 时间内计算;

(ii) 对根图 G , 计算 $E2(G; p)$ 是 $\#P$ -完全的.

性质 2 设 G 是有 n 个顶点的简单根图, 且根顶点的度数是 m , 那么:

(i) $E2(G; p) = mp + p^2 g(p)$, $g(p)$ 是整系数 p 的多项式;

(ii) $E2(G; 0) = 0$.

证 (i) 当使用(3)式分解根图 G 成更小根图时, 每次用掉根顶点的一条边, 产生一个项 p , 而其余部分是比 p 高阶的多项式, 故而得到以上结果.

(ii) 当 $p = 0$ 时, 意味着所有的边失效, 故而正常运行的顶点数为 0.

正如色多项式问题, 减-缩边公式在递归迭代计算中有着很大的作用^[10-14]. 下面, 将看见它在递归迭代计算方面的应用.

例 1 计算三角形根图 (图 1) 的平方期望值.

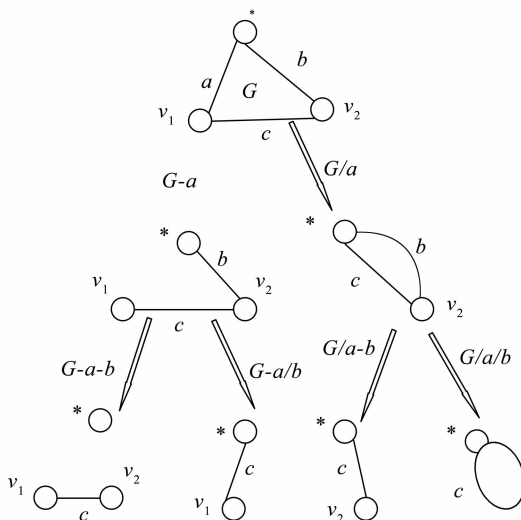


图 1 三角形根图

$$\begin{aligned}
E2(G; p) &= p + p \cdot E2(G_{/a}; p) + 2p \cdot EV(G_{/a}; p) + (1-p) \cdot E2(G_{-a}; p) = \\
& p + p \cdot [p + p \cdot E2(G_{/a/b}; p) + 2p \cdot EV(G_{/a/b}; p) + (1-p) \cdot E2(G_{/a-b}; p)] + \\
& 2p \cdot [p + p \cdot EV(G_{/a/b}; p) + (1-p) \cdot EV(G_{/a-b}; p)] + \\
& (1-p) \cdot [p + p \cdot E2(G_{-a/b}; p) + 2p \cdot EV(G_{-a/b}; p) + (1-p) \cdot E2(G_{-a-b}; p)] = \\
& p + p \cdot [p + p \cdot 0 + 2p \cdot 0 + (1-p) \cdot p] + 2p \cdot [p + p \cdot 0 + (1-p) \cdot p] + \\
& (1-p) \cdot [p + p \cdot 0 + (1-p) \cdot p] = \\
& 2p + 8p^2 - 6p^3
\end{aligned}$$

下面应用减-缩边公式推导一些特殊图的平方期望计算公式.

推论 1 设 P_n 是有 n 个顶点的路根图, 则它的平方期望是

$$E2(P_n; p) = (1-p) \cdot 0 + p \cdot E2(P_{n-1}; p) + 2p \cdot EV(P_{n-1}; p) + p = \sum_{i=1}^n (2i-1)p^i$$

推论 2 设 C_n 是有 n 个顶点的圈根图, 则它的平方期望是

$$E2(C_n; p) = (1-p) \cdot E2(P_n; p) + p \cdot E2(C_{n-1}; p) + 2p \cdot EV(C_{n-1}; p) + p$$

推论 3 设 S_n 是有 n 个顶点的星根图, 则它的平方期望是

$$\begin{aligned}
E2(S_n; p) &= (1-p) \cdot E2(S_{n-1}; p) + p \cdot E2(S_{n-1}; p) + 2p \cdot EV(S_{n-1}; p) + p = \\
& E2(S_{n-1}; p) + 2p \cdot EV(S_{n-1}; p) + p = \\
& np + (n^2 - n)p^2
\end{aligned}$$

2 根图的方差

定义 3 设 G 是根图, 则方差是

$$D(G; p) = E2(G; p) - [EV(G; p)]^2 \quad (5)$$

有了定义 3, 就可以算出任意根图的方差了.

例 2 三角形根图(图 1) 的方差为

$$\begin{aligned}
D(G; p) &= E2(G; p) - [EV(G; p)]^2 = \\
& (2p + 8p^2 - 6p^3) - (2p + 2p^2 - 2p^3)^2 = \\
& 2p + 4p^2 - 14p^3 + 4p^4 + 8p^5 - 4p^6
\end{aligned}$$

同样易知方差是 p 的多项式, 按定义计算也是非常麻烦的. 所以, 减-缩边公式就很重要了. 利用(3)式可以顺利推导出一些特殊根图的方差计算公式.

2.1 一些特殊根图的方差

设 P_n 是有 n 个顶点的路根图, 则它的方差是

$$\begin{aligned}
D(P_n; p) &= E2(P_n; p) - [EV(P_n; p)]^2 = \\
& \sum_{i=1}^n (2i-1)p^i - \left[\sum_{i=1}^n p^i \right]^2 = \\
& \sum_{i=1}^n [ip^i - (n+1-i)p^{n+i}]
\end{aligned}$$

设 S_n 是有 n 个顶点的星根图, 则它的方差是

$$\begin{aligned}
D(S_n; p) &= E2(S_n; p) - [EV(S_n; p)]^2 = \\
& np - np^2
\end{aligned}$$

2.2 根图的根顶点的优化

容易知道, 根图的方差不但与幸存概率 p 有关, 而且与根顶点在根图中的位置有关.

例 3 设根顶点在顶点 v , 此时根图记为 G_v . 如下图 2 所示, 则容易算得当根顶点在顶点 1 位置时它的期望平方值和期望值, 进而算得其方差:

$$\begin{aligned}
E2(G_1; p) &= p + 9p^2 + 16p^3 + 24p^4 - 6p^5 - 8p^6 \\
EV(G_1; p) &= p + 3p^2 + 2p^3 + 2p^4 - 2p^5
\end{aligned}$$

$$D(G_1; p) = p + 8p^2 + 10p^3 + 11p^4 - 22p^5 - 20p^6 + 4p^7 + 4p^8 + 8p^9 - 4p^{10}$$

再由对称性可知, 当根顶点在顶点 2 和 3 时, 其方差与根顶点在顶点 1 时是相同的, 即

$$D(G_1; p) = D(G_2; p) = D(G_3; p)$$

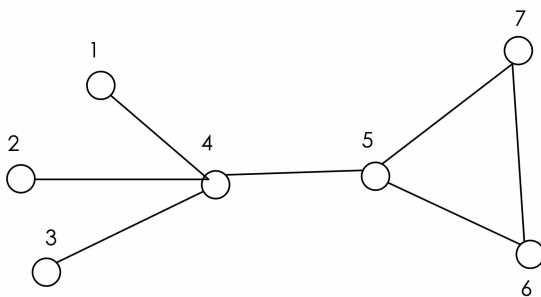


图 2 根不同位置的图

同理, 可以算得当根顶点在顶点 4, 5 和 6 时的期望值和方差值:

$$E2(G_4; p) = 4p + 18p^2 + 24p^3 + 2p^4 - 12p^5$$

$$EV(G_4; p) = 4p + 2p^2 + 2p^3 - 2p^4$$

$$\text{有 } D(G_4; p) = 4p + 2p^2 + 8p^3 - 18p^4 - 4p^5 + 4p^6 + 8p^7 - 4p^8.$$

$$E2(G_5; p) = 3p + 21p^2 + 16p^3 + 8p^4 - 12p^5$$

$$EV(G_5; p) = 3p + 5p^2 - 2p^3$$

$$\text{有 } D(G_5; p) = 3p + 12p^2 - 14p^3 - 5p^4 + 8p^5 - 4p^6.$$

$$E2(G_6; p) = 2p + 11p^2 + 18p^3 + 32p^4 - 21p^5 - 6p^6$$

$$EV(G_6; p) = 2p + 3p^2 + 2p^3 + 2p^4 - 3p^5$$

$$\text{有 } D(G_6; p) = 2p + 7p^2 + 6p^3 + 15p^4 - 41p^5 - 10p^6 + 10p^7 + 8p^8 + 12p^9 - 9p^{10}.$$

同样, 由对称性, 当根顶点在 6 和 7 时, 其方差也一样, 为 $D(G_7; p) = D(G_6; p)$.

当概率 p 取 $(0, 1)$ 之间不同数值时, 容易知道, 随着 p 取值从 0 到 1 的增大, 这些根图的方差值先增加, 到达最大值后, 快速地下降. 在不同的时期, 方差值最小的根图不一样.

当概率 $p \in (0, 0.3353)$ 时, 根顶点位于顶点 1 (或者 2, 3) 的根图的方差是所有根图中方差最小的; 当概率 $p \in (0.3353, 1)$ 时, 根顶点位于顶点 4 的根图的方差是所有根图中方差最小的, 也就是稳定性最好的根图.

2.3 概率 p 有先验分布时的优化

当幸存概率 p 有先验分布时, 可以利用 Bayesian 方法求得其更准确的后验分布^[15-18]. 如果对其先验分布没有信息, 设其先验服从 $(0, 1)$ 的均匀分布就是合理的. 下面讨论一些特殊根图在 p 服从 $(0, 1)$ 的均匀分布先验时的方差.

定义 4 设 G 是一个简单连通含根网络, 概率 p 先验服从 $(0, 1)$ 的均匀分布, 则其均匀方差矩为

$$\text{Vur}(G) = \int_0^1 D(G; p) dp \quad (6)$$

性质 3 设 P_n 是有 n 个顶点的路根图, 则它的均匀方差矩是

$$\text{Vur}(P_n) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n ip^i - \sum_{i=1}^n (n-i+1)p^{i+n} \right) dp = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{i+1} - \frac{n+1-i}{n+1+i} \right)$$

性质 4 设 S_n 是有 n 个顶点的星根图, 则它的均匀方差矩是

$$\text{Vur}(S_n) = \int_0^1 np(1-p) dp = \frac{n}{6}$$

同样, 还可以对图 2 所示的根图, 求得其根顶点在不同位置时的均匀方差矩.

例 4 $\text{Vur}(G_1) = \text{Vur}(G_2) = \text{Vur}(G_3) \approx 2.7237$, $\text{Vur}(G_4) \approx 1.5270$, $\text{Vur}(G_5) \approx 1.7620$, $\text{Vur}(G_6) = \text{Vur}(G_7) \approx 2.0921$.

从以上均匀方差矩计算结果来看,当根顶点位于顶点 4 的时候,其均匀方差矩最小,即这时稳定性最好;而当根顶点位于顶点 1(或者 2,3)的时候,其均匀方差矩最大,即这时稳定性最差.

定义 5 设 G 是一个简单连通根图,概率 p 先验服从 $(0, 1)$ 的 Beta 分布,则其 Beta 方差矩为

$$\text{Vbr}(G) = \int_0^1 D(G; p) f(p; a, b) dp \quad (7)$$

其中,概率 p 的先验概率分布密度函数(a, b 是参数)为

$$f(p; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1}$$

性质 5 设 P_n 是有 n 个顶点的路根图,则它的 Beta 方差矩是

$$\begin{aligned} \text{Vbr}(P_n) = & \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n i p^i - \sum_{i=1}^n (n-i+1) p^{i+n} \right) \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp = \\ & \sum_{i=1}^n \left[\frac{i(a+i)}{a+b+i} \prod_{j=1}^i \left(\frac{a+i-j}{a+b+i-j} \right) - \frac{(n+1-i)(a+n+i)}{a+b+n+i} \prod_{j=1}^{n+i} \left(\frac{a+n+i-j}{a+b+n+i-j} \right) \right] \end{aligned}$$

性质 6 设 S_n 是有 n 个顶点的星根图,则它的 Beta 方差矩是

$$\text{Vbr}(S_n) = \int_0^1 n p (1-p) \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp = \frac{nab(a+1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}$$

同样的,还可以对图 2 所示的根图求得其根顶点在不同位置时的 Beta 方差矩.

例 5 在参数 $a = 2, b = 3$ 时,其根顶点在不同位置时的 Beta 方差矩为:

$$\text{Vbr}(G_1) = \text{Vbr}(G_2) = \text{Vbr}(G_3) \approx 2.4519$$

$$\text{Vbr}(G_4) \approx 1.6926$$

$$\text{Vbr}(G_5) \approx 1.8905$$

$$\text{Vbr}(G_6) = \text{Vbr}(G_7) \approx 2.1282$$

从以上 Beta 方差矩计算结果来看,在参数 $a = 2, b = 3$ 时,当根顶点位于顶点 4 的时候,其 Beta 方差矩最小,即这时稳定性最好;而当根顶点位于顶点 1(或者 2,3)的时候,其 Beta 方差矩最大,即这时稳定性最差.这个结果与均匀分布时候的结果是一致的.

3 根图的期望-方差优化

对于根图,一般是要求可靠性越大越好,即要求期望值要大.同时,又希望其稳定性要好,即要求方差要小.一般很难同时达到这两个要求.这时的解决办法,就是给期望和方差以合理的权.

定义 6 设 G 是一个简单根图,权 $\gamma \in (0, 1)$,则优化函数

$$u(G) = \max_{\gamma, p} \left[\gamma \cdot EV(G; p) + (1-\gamma) \cdot \frac{1}{D(G; p)} \right] \quad (8)$$

容易知道,函数是 p, γ 的函数.

4 结论

本文讨论了根图的边在独立幸存概率下的可靠性和稳定性,得到了方差计算的减-缩边公式,给简化计算带来很大的方便.讨论了两种先验概率下的稳定性优化,最后讨论了综合考虑期望与方差下的优化函数.

参考文献:

- [1] HANSEN P. Best Second Order Bounds for Two-Terminal Network Reliability with Dependent Edge Failures [J]. Discrete Appl Math, 1999, 96/97(1): 375-393.
- [2] 刘念祖,唐晓清,王汉兴. 正则 q -树根图的双概率可靠性研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(12): 24-27.
- [3] SIEGRIST K, AMIN A, SLATER P. The Optimal Unicycle Graphs for Pair-Connected Reliability [J]. Discrete Appl Math, 1993, 41(3): 235-243.

- [4] BOESCH F T, HARARY F, KABELL J A. Graphs as Models of Communication Network Vulnerability: Connectivity and Persistence [J]. *Networks*, 1981, 11(1): 57—63.
- [5] BALL M O, PROVAN J S. Calculating Bounds on Reachability and Connectedness in Stochastic Networks [J]. *Networks*, 1983, 13(2): 253—278.
- [6] AIVALIOTIS M, GORDON G, GRAVEMAN W. When Bad Things Happen to Good Trees [J]. *Graph Theory*, 2001, 37(2): 79—99.
- [7] BAILEY A, GORDON G, PATTON M, et al. Expected Value Expansions in Rooted Graphs [J]. *Discrete Appl Math*, 2003, 128(2—3): 555—571.
- [8] EISENSTAT D, FEDER J, FRANCOS G, et al. Expected Rank and Randomness in Rooted Graphs [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2008, 156(5): 746—756.
- [9] TANG X Q. New Expected Value Expansions of Rooted Graphs [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica(English Series)*, 2015, 31(1): 81—88.
- [10] 唐晓清, 刘念祖, 王汉兴, 等. 图的一类新双变量色多项式 [J]. *兰州大学学报(自然科学版)*, 2012, 48(2): 106—112.
- [11] 唐晓清, 刘念祖, 王汉兴, 等. 正则树的双变量色多项式研究 [J]. *应用数学学报*, 2013, 36(4): 761—768.
- [12] 刘莹, 唐晓清. 图的双变量色多项式比较研究 [J]. *湖南师范大学自然科学学报*, 2014, 37(6): 67—72.
- [13] 刘莹, 唐晓清. 正则 q -树根图的可靠性研究 [J]. *东北师大学报(自然科学版)*, 2015, 47(1): 17—21.
- [14] 江世明, 李敬文, 江红豆. 图的点可区别边染色猜想的算法 [J]. *西南大学学报(自然科学版)*, 2016, 38(10): 47—54.
- [15] 唐晓清, 秦勇飞, 陆勇斌. 基于动态贝叶斯网络的高速公路交通事件算法 [J]. *邵阳学院学报(自然科学版)*, 2009, 6(2): 8—10.
- [16] 唐晓清, 白延琴, 刘念祖, 等. 基于随机矩阵理论的 Markowitz 组合投资模型 [J]. *上海大学学报(自然科学版)*, 2013, 19(3): 293—297.
- [17] 唐晓清, 陈继业, 谭明纯. 简单序约束条件下参烽估计的 EM 方法 [J]. *湖南工程学院学报*, 2010, 20(1): 61—64.
- [18] 王汉兴, 刘念祖, 唐晓清, 等. 基于数学模型的混凝土土泵车液压系统的 Simulink 动态仿真 [J]. *重庆理工大学学报(自然科学版)*, 2012, 26(9): 1—7.

On Stability of Rooted Graph and Its Optimality

WANG Bing-jie¹, TANG Xiao-qing²

1. School of Mathematics and Statistics, Baicheng Normal University, Baicheng Jilin 137000, China;

2. School of Statistics & Mathematics, Shanghai Lixin University of Accounting and Finance, Shanghai 201620, China

Abstract: When G is a rooted graph where each edge may independently succeed with probability p when catastrophic thing happens, we consider the expected number of vertices in the operational component of G containing the root. Then the expected value of edges number $EV(G; p)$ is a proper index of reliability to rooted graph. Later, we give the definition $E2(G; p)$, which is the expect of vertices number square, then variance $D(G; p) = E2(G; p) - [EV(G; p)]^2$. Especially, we get the deletion-contraction edge formula of $E2(G; p)$. So we obtain a recursive computing variance method. And $D(G; p)$ is a proper stability index to the rooted graph. With this formula, we get some variance computational formulas of specific rooted graphs. Finally, we propose expect-variance optimality of rooted graph.

Key words: rooted graph; reliability; stability; deletion-contraction edge formula; expect-variance optimality