第 42 卷 第 4 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2017 年 4 月
Vol. 42 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.04.004

带乘性噪声的 Ginzburg-Landau 方程①

李 娜[1], 闻道君[2]

1. 四川城市职业学院 建筑工程学院,成都 610101;2. 重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067

摘要: 研究了带乘性噪声的 Ginzburg-Landau 方程. 首先运用 Galerkin 逼近近似将无穷维空间变换到有限维空间,然后利用一系列不等式得到有界性,最后利用 Prokhorov 定理、Skorokhod 定理以及鞅表示定理获得了系统鞅解的存在性.

关 键 词: Ginzburg-Landau 方程;乘性噪声;鞅解

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2017)04-0020-07

1950 年,金兹堡和朗道在朗道的二级变相理论的基础上,结合超导体的电动力学、量子力学和热力学性质,提出了 Ginzburg-Landau 方程. 它不仅包含广泛的物理背景和内涵,其应用也相当广泛,如在液体力学中 Ginzburg-Landau 方程用来刻画不稳定波的振幅变化,在等离子传播和超导中也出现了 Ginzburg-Landau 方程模型,更多应用见文献[1-5].

本文考虑如下随机 Ginzburg-Landau 方程:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = (ru(t) + (1+\mathrm{i}\nu)\Delta u - (1+\mathrm{i}\mu)\,|\,u\,|^{2\sigma}u\,)\mathrm{d}t + g(u)\mathrm{d}W(t) \\ u(x,\,0) = u_0 \\ u(x+2\pi e_i,\,t) = u(x,\,t) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, i 是虚数单位, $\mu,\nu,r>0$, $\sigma>0$ 为实常数, $W(t)$ 是维纳过程.

对于方程(1),不少专家学者得到了许多重要的结论和性质,如文献[6]研究了该方程的渐进行为,文献[7]研究了该方程温和解的存在性和唯一性,本文主要考虑该方程鞅解的存在性.

1 预备知识

引理 1[8] 令 $p\geqslant 2$, $\alpha<\frac{1}{2}$,对任意渐进可测过程 $f\in(\Omega\times[0,\,T];\,L_2(K,\,H))$,随机积分

$$I(f)\in L^p(\Omega;\,W^{\alpha,p}(0,\,T;\,H))$$

且存在常数 $C(p,\,\alpha)>0$,使得

$$E\,\|\,I(f)\,\|^p_{W^{\alpha,p}(0,\,T;\,H))}\leqslant C(p,\,\alpha)E\int_0^T\|\,f(t)\,\|^p_{L_2(K,\,H)}\mathrm{d}t$$

引理 2[8] 设 B_0,B,B_1 均为 Banach 空间,且 B_0 和 B_1 是自反的, $B_0\subset B\subset B_1$,同时 B_0 紧嵌入到 B,

① 收稿日期:2016-10-24
基金项目:重庆市前沿与应用基础研究项目(cstc2016jcyjA0101);重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500623).
作者简介:李 娜(1979-),女,陕西渭南人,讲师,硕士,主要从事随机偏微分方程的研究.

$\gamma \in (0,1)$，$X = L^2(0,T;B_0) \cap W^{\gamma,2}(0,T;B_1)$，则 X 紧嵌入到 $L^2(0,T;B)$.

定义 1　如果存在一个随机基$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$，一个在空间$U$上的维纳过程$W$以及一个逐渐可测过程 $u:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\longrightarrow H$，在几乎必然的意义下，函数

$$u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^1) \cap C([0,T];H^{-1})$$

且使得对任意的 $t\in[0,T]$，$\upsilon \in H^1$，有

$$(u,\upsilon)_H - \int_0^t {}_{H^{-1}}\langle ru(s),\upsilon\rangle_{H^1}\,\mathrm{d}S - \int_0^t {}_{H^{-1}}\langle (1+\mathrm{i}\nu)\Delta u,\upsilon\rangle_{H^1}\,\mathrm{d}s +$$

$$\int_0^t {}_{H^{-1}}\langle (1+\mathrm{i}\mu)\,|\,u\,|^{2\sigma}u,\upsilon\rangle_{H^1}\,\mathrm{d}s = (u_0,\upsilon)_H + {}_{H^{-1}}\langle \int_0^t g(u)\mathrm{d}W(s),\upsilon\rangle_{H^1}$$

则称方程(1)存在一个鞅解.

2　鞅解的存在性

设 $W(t)$ 是一个完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的维纳过程，且在可分的 Hilbert 空间U上取值. 算子Q是定义在U上的非负对称算子，满足 $\mathrm{Tr}\,Q<+\infty$，则在U上存在一个完备的标准正交集$\{e_i\}_{i\geqslant 1}$和非负的有界实值序列 λ_i，使得 $Qe_i=\lambda_i e_i$ 且 $\mathrm{Tr}\,Q=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i<+\infty$. 于是 $W(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\beta_i(t)e_i$，其中 $\beta_i(t)$ 是相互独立的维纳过程. 记 $L_2(U,H)$ 是由从 U 到 H 的全体有界线性算子组成的空间，则对任意的 $G\in L_2(U,H)$，有 $\|G\|^2_{L_2(U,H)}=\mathrm{Tr}(GQG^*)$.

进一步假设：

(A)：$g:H\longrightarrow L_2(U,H)$ 是连续的，且满足：

$$\|g(u)\|^2_{L_2(U,H)}\leqslant C\|u\|^2_H+\lambda \qquad \|g(u)-g(v)\|^2_{L_2(U,H)}\leqslant C\|u-v\|^2_H$$

其中 $u,v\in H$，参数 C,λ 为正实数.

定理 1　设 $\sigma\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu^2}-1}$，初值 u_0 满足 $\mathscr{F}_0$ 可测，且 $u_0\in L^2(\Omega,H)$，假设(A)成立. 则方程(1)存在一个鞅解.

证　假设$\{\eta_1,\eta_2,\cdots\}\subset H^1$ 是空间 H 中的一组标准正交基. 令 $H_n=\mathrm{span}\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$，定义线性算子 $P_n:H^{-1}\longrightarrow H_n$，满足

$$P_n y=\sum_{i=1}^{n}\langle y,\eta_i\rangle\eta_i \qquad y\in H^{-1}$$

显然 $P_n|_H$ 是 H 到 H_n 的正交投影，取 U 上的一组标准正交基$\{e_1,e_2,\cdots\}$，且

$$W^n(t)=\sum_{i=1}^{n}\langle W(t),e_i\rangle e_i=\widetilde{P_n}W(t)$$

显然$\widetilde{P_n}$ 是 U 在 $\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 上的正交投影. 因此对任意的 $n\in\mathbb{N}$，在 H_n 中考虑下面的随机方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}u_n(t)=(rP_nu_n(t)+(1+\mathrm{i}\nu)P_n\Delta u_n-(1+\mathrm{i}\mu)P_n\,|\,u_n\,|^{2\sigma}u_n)\mathrm{d}t+P_ng(u_n)\mathrm{d}W_n(t)\\ u_n(0)=P_nu_0\end{cases} \tag{2}$$

令

$$F(u_n(t))=\int|\,u_n(t)\,|^2\mathrm{d}x=\int u_n\bar{u}_n\mathrm{d}x=\|u_n(t)\|^2_H$$

则它的一阶 Fréchet 微分为

$$F_u(u_n(t))h=\frac{\mathrm{d}F(u_n(t)+\varepsilon h)}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=$$

$$\int h(\bar{u}_n + \varepsilon\bar{h}) + (u_n + \varepsilon h)\bar{h}\,\mathrm{d}x \,|_{\varepsilon=0} =$$

$$2\mathrm{Re}\int \bar{u}_n h\,\mathrm{d}x$$

二阶 Fréchet 微分为

$$F_{uu}(u_n(t))(h,\,k) = \frac{\partial^2 F(u_n + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k)}{\partial\varepsilon_1 \partial\varepsilon_2}\,|_{\varepsilon_1=0,\,\varepsilon_2=0} =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon_1 \partial\varepsilon_2}\int (u_n + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k)(\bar{u}_n + \varepsilon_1 \bar{h} + \varepsilon_2 \bar{k})\,\mathrm{d}x\,|_{\varepsilon_1=0,\,\varepsilon_2=0} =$$

$$\int (h\bar{k} + k\bar{h})\,\mathrm{d}x =$$

$$2\mathrm{Re}\int h\bar{k}\,\mathrm{d}x$$

由 Itô 公式可得

$$\| u_n(t) \|_H^2 = \| u_n(0) \|_H^2 + \int_0^t \langle F_u(u_n),\, P_n \mathrm{d}W_n(s)\rangle + 2r\int_0^t \| u_n \|_H^2 \mathrm{d}s - 2\int_0^t \| \nabla u_n \|^2 \mathrm{d}s -$$

$$2\int_0^t \| u_n \|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \mathrm{d}s + \int_0^t \| P_n g(u_n)\widetilde{P}_n \|_{L_2(U,\,H)}^2 \mathrm{d}s$$

取期望可得

$$E\| u_n(t) \|_H^2 + 2E\int_0^t \| \nabla u_n \|^2 \mathrm{d}s + 2E\int_0^t \| u_n \|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \mathrm{d}s \leqslant$$

$$E\| u_n(0) \|_H^2 + 2rE\int_0^t \| u_n \|_H^2 \mathrm{d}s + CE\int_0^t \| u_n \|_H^2 \mathrm{d}s$$

用 Gyonwall 不等式可得

$$E\| u_n(t) \|_H^2 \leqslant C \tag{3}$$

进一步可得：

$$E\int_0^t \| \nabla u_n \|^2 \mathrm{d}s \leqslant C \tag{4}$$

$$E\int_0^t \| u_n \|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \mathrm{d}s \leqslant C \tag{5}$$

再令

$$F(u_n(t)) = \int |\, u_n(t) \,|^{2\sigma+2} \mathrm{d}x = \| u_n(t) \|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$$

由 Itô 公式可得

$$\| u_n(t) \|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} - (2\sigma+2)(1+\mathrm{i}\nu)\int_0^t\int |\, u_n \,|^{2\sigma} u_n \Delta\bar{u}_n \mathrm{d}x\mathrm{d}s + (2\sigma+2)\int_0^t \| u_n \|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\| u_n(0) \|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} + (2\sigma+2)\int_0^t \mathrm{Re}\langle |\, u_n \,|^{2\sigma} u_n,\, P_n g(u_n)\mathrm{d}W_n(s)\rangle + C\int_0^t \| u_n \|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \mathrm{d}s$$

由文献[9]知，当 $\sigma \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+\nu^2}-1}$ 时，有

$$-(2\sigma+2)(1+\mathrm{i}\nu)\int_0^t\int |\, u_n \,|^{2\sigma} u_n \Delta\bar{u}_n \mathrm{d}x\mathrm{d}s \geqslant 0$$

于是有

$$E\| u_n(t) \|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} + (2\sigma+2)E\int_0^t \| u_n \|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} \mathrm{d}s \leqslant E\| u_n(0) \|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} + CE\int_0^t \| u_n \|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \mathrm{d}s$$

再由(5)式得

$$E\int_0^t \| u_n \|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} \mathrm{d}s \leqslant C \tag{6}$$

由(3)式得序列$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在空间$L^2(\Omega, L^2(0, T; H^1))$上一致有界. 下面证$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$L^2(\Omega, H^{-1})$上一致有界. 因为

$$u_n(t) = P_n u_0 + r\int_0^t P_n u_n(s)\mathrm{d}s + (1+\mathrm{i}\nu)\int_0^t P_n \Delta u_n(s)\mathrm{d}s -$$
$$(1+\mathrm{i}\mu)\int_0^t P_n |u_n|^{2\sigma} u_n \mathrm{d}s + \int_0^t P_n g(u_n)\mathrm{d}W_n(s)$$

记：

$$I_1 = P_n u_0$$
$$I_2(t) = \int_0^t P_n u_n(s)\mathrm{d}s$$
$$I_3(t) = (1+\mathrm{i}\nu)\int_0^t P_n \Delta u_n(s)\mathrm{d}s$$
$$I_4(t) = (1+\mathrm{i}\mu)\int_0^t P_n |u_n|^{2\sigma} u_n \mathrm{d}s$$
$$I_5(t) = \int_0^t P_n g(u_n)\mathrm{d}W_n(s)$$

由(3)式可得$E\| I_1 \|_H^2 \leqslant C$，再证$E\| I_2(t) \|_{W^{\gamma,2}(0,T;H^{-1})}^2 \leqslant C$，即证

$$E\left(\int_0^T \| I_2(t) \|_{H^{-1}}^2 \mathrm{d}t + \int_0^t\int_0^t \frac{\| I_2(t) - I_2(s) \|_{H^{-1}}^2}{|t-s|^{1+2\gamma}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right) \leqslant C \tag{7}$$

因为

$$E\int_0^T \| I_2(t) \|_{H^{-1}}^2 \mathrm{d}t = rE\int_0^T \left\| \int_0^t P_n u_n(s)\mathrm{d}s \right\|_{H^{-1}}^2 \mathrm{d}t \leqslant$$
$$CE\int_0^T\int_0^t \| u_n(s) \|_H^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant C$$

同理可证

$$E\int_0^T\int_0^T \frac{\| I_2(t) - I_2(t) \|_{H^{-1}}^2}{|t-s|^{1+2\gamma}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t = E\int_0^T\int_0^T \frac{\left\| \int_s^t r u_n(\tau)\mathrm{d}\tau \right\|_{H^{-1}}^2}{|t-s|^{1+2\gamma}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant$$
$$C(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\| u_n(\tau) \|^2)\int_0^T\int_0^T |t-s|^{-2\gamma}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant C$$

再证$E\| I_3(t) \|_{W^{\gamma,2}(0,T;H^{-1})}^2 \leqslant C$，即证

$$E\left(\int_0^T \| I_3(t) \|_{H^{-1}}^2 \mathrm{d}t + \int_0^T\int_0^T \frac{\| I_3(t) - I_3(s) \|_{H^{-1}}^2}{|t-s|^{1+2\gamma}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right) \leqslant C \tag{8}$$

因为

$$E\int_0^T \| I_3(t) \|_{H^{-1}}^2 \mathrm{d}t = E\int_0^T \left\| (1+\mathrm{i}\nu)\int_0^t P_n \Delta u_n(s)\mathrm{d}s \right\|_{H^{-1}}^2 \mathrm{d}t \leqslant$$
$$CE\int_0^T\int_0^T \| \Delta u_n \|_{H^{-1}}^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

取$\phi \in H^1$，于是$\phi \in C_b^1$，则

$$\| \Delta u_n \|_{H^{-1}} = \sup_{\phi\in H^1,\ \|\phi\|_{H^{-1}}\leqslant 1} |{}_{H^{-1}}\langle \Delta u_n, \phi\rangle_{H^1}| \leqslant$$
$$\| u_n \|_H \| \Delta\phi \|_H \leqslant C\| u_n \|_H$$

所以

$$E\int_0^T \| I_3(t) \|_{H^{-1}}^2 \mathrm{d}t \leqslant CE\int_0^T\int_0^T \| u_n \|_H^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant C$$

同理可证

$$E\int_0^T\int_0^T \frac{\| I_3(t) - I_3(t) \|_{H^{-1}}^2}{| t-s |^{1+2\gamma}} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant C$$

再证 $E\| I_4(t) \|_{W^{\gamma,2}(0,T;H^{-1})}^2 \leqslant C$，即证

$$E\left(\int_0^T \| I_4(t) \|_{H^{-1}}^2 \mathrm{d}t + \int_0^T\int_0^T \frac{\| I_4(t) - I_4(s) \|_{H^{-1}}^2}{| t-s |^{1+2\gamma}} \mathrm{d}s\mathrm{d}t\right) \leqslant C \tag{9}$$

因为

$$E\int_0^T \| I_4(t) \|_{H^{-1}}^2 \mathrm{d}t = E\int_0^T \left\| (1+\mathrm{i}\nu)\int_0^t | u_n |^{2\sigma} u_n \mathrm{d}s \right\|_{H^{-1}}^2 \mathrm{d}t \leqslant$$

$$CE\int_0^T\int_0^t \| u_n \|_{L^{4\sigma+2}}^{4\sigma+2} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant C$$

同理可证

$$E\int_0^T\int_0^T \frac{\| I_4(t) - I_4(s) \|_{H^{-1}}^2}{| t-s |^{1+2\gamma}} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant C$$

最后证 $E\| I_5 \|_{W^{\gamma,2}(0,T;H)}^2 \leqslant C$，即证

$$E\left(\int_0^T \| I_5(t) \|_{W^{\gamma,2}(0,T;H)}^2 \mathrm{d}t + \int_0^T\int_0^T \frac{\| I_5(t) - I_5(s) \|_H^2}{| t-s |^{1+2\gamma}} \mathrm{d}s\mathrm{d}t\right) \leqslant C \tag{10}$$

因为

$$E\int_0^T \| I_5(t) \|_{W^{\gamma,2}(0,T;H)}^2 \mathrm{d}t = E\int_0^T \left\| \int_0^t g(u_n) \mathrm{d}W_n(s) \right\|^2 \mathrm{d}t \leqslant$$

$$CE\int_0^T\int_0^t (\| u_n \|^2 + \lambda) \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant C$$

另一方面

$$E\int_0^T\int_0^T \frac{\| I_5(t) - I_5(s) \|_H^2}{| t-s |^{1+2\gamma}} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant CE\int_0^T\int_0^T \frac{\int_s^t \| g(u_n) \|_{L_2(U,H)}^2 \mathrm{d}\tau}{| t-s |^{1+2\gamma}} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant$$

$$C\int_0^T\int_0^T | t-s |^{-2\gamma} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant C$$

最后用文献[10-11]的方法证明鞅解. 由引理2得 $W^{\gamma,2}(0,T;H^1) \cap L^2(0,T;H^{-1})$ 紧嵌入到 $L^2(0,T;H)$，然后由胎紧的定义可得 $\{\mathscr{L}(u_n)\}$ 在空间 $L^2(0,T;H)$ 中是胎紧的. 由 Prokhorov 定理得，在 $L^2(0,T;H)$ 中存在一个子序列弱收敛到概率测度 μ. 再由 Skorokhod 定理，存在一个概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{P})$ 和 $\widetilde{u}$ 以及 $\{\widetilde{u}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得在概率意义下几乎处处成立 $\mathscr{L}(\widetilde{u}) = \mu$，$\mathscr{L}(\widetilde{u}_n) = \mathscr{L}(u_n)$ 和 $\widetilde{u}_n \to \widetilde{u}\ (n \to \infty)$.

$$u^n(t) = P_n u_0 + r\int_0^t P_n u_n(s) \mathrm{d}s + (1+\mathrm{i}\nu)\int_0^t P_n \Delta u_n(s) \mathrm{d}s -$$

$$(1+\mathrm{i}\mu)\int_0^t P_n | u_n |^{2\sigma} u_n \mathrm{d}s + \int_0^t P_n g(u^n) \mathrm{d}W^n(\tau)$$

记：

$$M_n(t) = P_n u_0 + r\int_0^t P_n u_n(s) \mathrm{d}s + (1+\mathrm{i}\nu)\int_0^t P_n \Delta u_n(s) \mathrm{d}s - (1+\mathrm{i}\mu)\int_0^t P_n | u_n |^{2\sigma} u_n \mathrm{d}s$$

$$\widetilde{M}_n(t) = P_n \widetilde{u}_0 + r\int_0^t P_n \widetilde{u}_n(s) \mathrm{d}s + (1+\mathrm{i}\nu)\int_0^t P_n \Delta \widetilde{u}_n(s) \mathrm{d}s - (1+\mathrm{i}\mu)\int_0^t P_n | \widetilde{u}_n |^{2\sigma} \widetilde{u}_n \mathrm{d}s$$

由于 $M_n(\cdot)$ 是一个鞅，其二阶变差为

$$《M_n(t)》 = \int_0^t (P_n g(u_n(\tau)) Q^{\frac{1}{2}})(P_n g(u_n(\tau)) Q^{\frac{1}{2}})^* \mathrm{d}\tau$$

由 $\mathscr{L}(\tilde{u}_n)=\mathscr{L}(u_n)$，故 $\mathscr{L}(\widetilde{M}_n)=\mathscr{L}(M_n)$. 又由 $E\mid M_n(t)\mid^2<\infty$，则 $\tilde{E}\mid \widetilde{M}_n(t)\mid^2<\infty$. 任给 $\varphi\in L^2(0,T;H)\cap C(0,T;H^{-1})$，则由 $E([M_n(t)-M_n(\tau)]\varphi(u_n(\cdot)))=0$，从而

$$E([\widetilde{M}_n(t)-\widetilde{M}_n(\tau)]\varphi(u_n(\cdot)))=0 \tag{11}$$

故 $\widetilde{M}_n(\cdot)$ 是空间 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},\tilde{P})$ 上的一个鞅，对应的滤子为 $\{\tilde{\mathscr{F}}_n(t)\}=\sigma\{\tilde{u}_n(\tau),\tau\leqslant t\}$，二阶变差为

$$\langle\!\langle \widetilde{M}_n(t)\rangle\!\rangle=\int_0^t(P_ng(\tilde{u}_n(\tau))Q^{\frac{1}{2}})(P_ng(\tilde{u}_n(\tau))Q^{\frac{1}{2}})^*\,\mathrm{d}\tau$$

且对 $\forall a,b\in H$，有：

$$E\Big(\Big[\langle M_n(t),a\rangle\langle M_n(t),b\rangle-\int_0^t\langle P_ng(u_n(\tau))Q^{\frac{1}{2}}a,P_ng(u_n(\tau))Q^{\frac{1}{2}}b\rangle\mathrm{d}\tau\Big]\varphi(u_n)\Big)=0$$

$$\tilde{E}\Big(\Big[\langle \widetilde{M}_n(t),a\rangle\langle \widetilde{M}_n(t),b\rangle-\int_0^t\langle P_ng(\tilde{u}_n(\tau))Q^{\frac{1}{2}}a,P_ng(\tilde{u}_n(\tau))Q^{\frac{1}{2}}b\rangle\mathrm{d}\tau\Big]\varphi(\tilde{u}_n)\Big)=0$$

当 $n\to\infty$ 时，有 $\tilde{u}_n(t)\to\tilde{u}(t)$，$t\in[0,T]$，得

$$\widetilde{M}(t)=\tilde{u}_0+r\int_0^t\tilde{u}(s)\mathrm{d}s+(1+\mathrm{i}\nu)\int_0^t\Delta\tilde{u}(s)\mathrm{d}s-(1+\mathrm{i}\mu)\int_0^t\mid\tilde{u}\mid^{2\sigma}\tilde{u}\,\mathrm{d}s$$

相应的滤子为 $\{\tilde{\mathscr{F}}(t)\}=\sigma\{\tilde{u}(\tau);\tau\leqslant t\}$，二阶变差为

$$\langle\!\langle \widetilde{M}(t)\rangle\!\rangle=\int_0^t(g(\tilde{u}(\tau))Q^{\frac{1}{2}})(g(\tilde{u}(\tau))Q^{\frac{1}{2}})^*\,\mathrm{d}\tau$$

再令 $\Delta=A$，同理可证 $A^{-1}\widetilde{M}(t)$ 是平方可积鞅，相应的滤子为 $\{\tilde{\mathscr{F}}(t)\}=\sigma\{\tilde{u}(\tau),\tau\leqslant t\}$，二阶变差为

$$\langle\!\langle A^{-1}\widetilde{M}(t)\rangle\!\rangle=\int_0^t(A^{-1}g(\tilde{u}(\tau))Q^{\frac{1}{2}})(A^{-1}g(\tilde{u}(\tau))Q^{\frac{1}{2}})^*\,\mathrm{d}\tau$$

再由鞅表示定理可得，存在一个概率空间 $(\tilde{\tilde{\Omega}},\tilde{\tilde{\mathscr{F}}},\tilde{\tilde{P}})$、滤子 $\{\tilde{\tilde{\mathscr{F}}}_t\}$、一个 Q 维纳过程 $\tilde{\tilde{W}}$、一个连续可测过程 $\tilde{\tilde{u}}$，使得

$$A^{-1}\tilde{\tilde{u}}(t)-A^{-1}u_0rA^{-1}\int_0^t\tilde{\tilde{u}}(\tau)\mathrm{d}\tau-(1+\mathrm{i}\nu)A^{-1}\int_0^t\Delta\tilde{\tilde{u}}(\tau)\mathrm{d}\tau+$$

$$(1+\mathrm{i}\mu)A^{-1}\int_0^t\mid\tilde{\tilde{u}}\mid^{2\sigma}\tilde{\tilde{u}}\,\mathrm{d}\tau=A^{-1}\int_0^t g(\tilde{\tilde{u}})\mathrm{d}\tilde{\tilde{W}}(\tau)$$

从而 $(\tilde{\tilde{\Omega}},\tilde{\tilde{\mathscr{F}}},\tilde{\tilde{P}},\{\tilde{\tilde{\mathscr{F}}}_t\},\tilde{\tilde{W}}(\cdot),\tilde{\tilde{u}}(\cdot))$ 是方程(1)的一个鞅解.

参考文献：

[1] BU C. The Ginzburg-Landau Equation with Nonzero Neumann Boundary Data [J]. Nonlinear analysis，1994，23(3)：399－404.

[2] BU C. On the Cauchy Problem for the 1＋2 Complex Ginzburg-Landau Equation [J]. Journal of Australian Mathematical Society(Series B)，1994，36(3)：313－324.

[3] DOERING C R，GIBBON J D，LEVERMORE C D. Weak and Strong Solutions of the Complex Ginzburg-Landau Equation [J]. Physica D，1994，71(3)：285－318.

[4] GINIBRE J，VELO G. The Cauchy Problem in Local Spaces for the Complex Ginzburg-Landau Equation [J]. Compactness methods，1996，95(3)：191－228.

[5] GAO H，BU C. Dirichlet Inhomogeneous Boundary Value Problem for n＋1 Complex Ginzburg-Landau Equation [J]. Journal of Differential Equations，2004，198(1)：176－195.

[6] LU H，LÜ S J，FENG Z S. Asymptotic Dynamics of 2D Fractional Complex Ginzburg-Landau Equation [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos，2013，23(12)：1－12.

[7] YANG D S，HOU Z T. Large Deviations for the Stochastic Derivative Ginzburg-Landau Equation with Multiplicative Noise [J]. Physica Section D Nonlinear Phenomena，2008，237(1)：82－91.

[8] FLANDOLI F, GATAREK D. Martingale and Stationary Solutions for Stochastic Navier-Stokes Equations [J]. Probability Theory and Related Fields, 1995, 102(3): 367-391.

[9] PU X K, GUO B L. Well-Posedness and Dynamics for the Fractional Ginzburg-Landau Equation [J]. Applicable Analysis, 2013, 92(2): 318-334.

[10] DA PRATO G, ZABCZYK J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[11] BRZEZNIAK Z, MOTYL E. Existence of a Martingale Solution of the Stochastic Navier-Stokes Equations in Unbounded 2D and 3D Domains [J]. Journal of Differential Equations, 2013, 254(4): 1627-1685.

Ginzburg-Landau Equation with Multiplicative Noise

LI Na[1], WEN Dao-jun[2]

1. School of Architectural Engineering, Urban Vocational College of Sichuan, Chengdu 610101, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

Abstract: This paper is concerned with the Ginzburg-Landau equation with multiplicative noise. To start with we transformed infinite dimensional space into finite dimensional space by Galerkin approximation, secondly we used a series of inequalities to obtain boundedness. Finally, we obtained the existence of martingale solutions by Prokhorov theorem, Skorokhod theorem and martingale representation theorem.

Key words: Ginzburg-Landau Equation; multiplicative noise; martingale solution

责任编辑 廖 坤