第 42 卷 第 4 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2017 年 4 月
Vol. 42 No. 4　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Apr. 2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.04.005

混合相交体对偶均质积分的逆向 Minkowski 不等式①

鞠　芳，　王星星

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： Lutwak 引进了混合相交体的概念并给出了混合相交体的 Minkowski 不等式. 本文给出了混合相交体对偶均质积分的逆向 Minkowski 不等式.

关　键　词： 混合相交体；Pólya-Szegö 不等式；Minkowski 不等式；逆向 Minkowski 不等式

中图分类号： O186.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2017)04-0027-04

设 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 为 n 维欧氏空间，B_n 和 $\mathbb{S}^{n-1}$ 分别为 $\mathbb{R}^n$ 中的中心在原点的单位球和单位球面. $u\in\mathbb{S}^{n-1}$ 为单位向量，$E_u^{\perp}$ 为经过原点且垂直于单位向量 u 的超平面. 设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集，它满足经过点 $z\in S$ 的任意直线与 S 相交都是一直线段，则称 S 为关于点 z 的星集. 特别地，当 z 为原点 o 时，S 是关于原点的星集，其径向函数 $\rho(S,u)$：$\mathbb{S}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为[1]

$$\rho(S,u)=\max\{\lambda\geqslant 0:\lambda u\in S\}\qquad u\in\mathbb{S}^{n-1}$$

若 $\rho(S,u)$ 是正的连续的，则称 S 为关于原点的星体. 记 $\mathscr{S}_o^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有关于原点的星体的集合. 设 $S,L\in\mathscr{S}_o^n$，$\lambda\in\mathbb{R}$ 满足对任意的 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$ 都有

$$\rho(S,u)=\lambda\rho(L,u)$$

成立，则称 S 与 L 是互为膨胀的.

文献[2]定义了星体的对偶混合体积，并得到对偶均质积分的 Minkowski 不等式. 文献[3]定义了一种特殊的星体并命名为相交体，进而提出了混合相交体的概念，给出了混合相交体的体积公式和几何性质. 文献[4-5]在文献[3]的基础上得到了混合相交体对偶均质积分的 Minkowski 不等式. 文献[6]给出了星体的 Minkowski 型的逆向不等式.

定义 1　设 $S_1,\cdots,S_{n-1}\in\mathscr{S}_o^n$，则存在唯一的星体 $I(S_1,\cdots,S_{n-1})$，其径向函数满足

$$\rho(I(S_1,\cdots,S_{n-1}),u)=\tilde{v}(S_1\cap E_u^{\perp},\cdots,S_{n-1}\cap E_u^{\perp})$$

称 $I(S_1,\cdots,S_{n-1})$ 为 $S_1,\cdots,S_{n-1}$ 的混合相交体. 其中 $\tilde{v}$ 表示 $n-1$ 维对偶混合体积.

定义 2　设 $S\in\mathscr{S}_o^n$，若 r_S,R_S 满足：

$$r_S=\max\{r\geqslant 0:rB_n\subseteq S\}$$
$$R_S=\min\{r\geqslant 0:rB_n\supseteq S\}$$

① 收稿日期：2016-10-25
作者简介：鞠　芳(1992-)，女，重庆垫江人，硕士研究生，主要从事积分几何的研究.
通信作者：王星星，博士.

则称 r_S, R_S 为星体 S 的相对内半径和相对外半径[6]. 用 $r_{S_u^\perp}$, $R_{S_u^\perp}$ 表示星体 $S \cap E_u^\perp$ 的相对内半径和相对外半径.

若 $p, q \in \mathbb{R}$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则令

$$C_{p,q}(\xi,\ \eta) = \frac{\frac{\xi}{p} + \frac{\eta}{q}}{\xi^{\frac{1}{p}} \eta^{\frac{1}{q}}}$$

本文主要探讨了混合相交体对偶均质积分的逆向 Minkowski 不等式. 同时, 本文将逆向 Minkowski 不等式中的 i, j 从 $0 \leqslant i < n$, $0 < j < n-1$ 推广到 $i \geqslant 0$, $j > 0$ 更一般的情形.

利用 Pólya-Szegö 不等式, 本文得到了混合相交体对偶均质积分的逆向 Minkowski 不等式.

定理 1 若 $S, L \in \mathscr{S}_o^n$, $0 \leqslant i < n$, $0 < j < n-1$, 则

$$\widetilde{W}_i(I_j(S,\ L))^{n-1} \geqslant \frac{1}{C_1 C_2} \widetilde{W}_i(IS)^{n-j-1} \widetilde{W}_i(IL)^j \tag{1}$$

等号成立当且仅当 S, L 为中心在原点的球. 其中:

$$C_1 = \max\left\{ C_{\frac{n-1}{n-j-1}, \frac{n-1}{j}}\left(\frac{R_{S_u^\perp}^{n-1}}{r_{S_u^\perp}^{n-1}},\ \frac{r_{L_u^\perp}^{n-1}}{R_{L_u^\perp}^{n-1}} \right),\ C_{\frac{n-1}{n-j-1}, \frac{n-1}{j}}\left(\frac{r_{S_u^\perp}^{n-1}}{R_{S_u^\perp}^{n-1}},\ \frac{R_{L_u^\perp}^{n-1}}{r_{L_u^\perp}^{n-1}} \right) \right\}$$

$$C_2 = \max\left\{ C_{\frac{n-1}{n-j-1}, \frac{n-1}{j}}\left(\frac{R_{IS}^{n-i}}{r_{IS}^{n-i}},\ \frac{r_{IL}^{n-i}}{R_{IL}^{n-i}} \right),\ C_{\frac{n-1}{n-j-1}, \frac{n-1}{j}}\left(\frac{r_{IS}^{n-i}}{R_{IS}^{n-i}},\ \frac{R_{IL}^{n-i}}{r_{IL}^{n-i}} \right) \right\}$$

证

$$\begin{aligned} \rho(I_j(S,\ L),\ u) &= \frac{1}{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-2}} \rho(S \cap E_u^\perp,\ v)^{n-j-1} \rho(L \cap E_u^\perp,\ v)^j \mathrm{d}v \geqslant \\ & \frac{1}{C_1} \rho(IS,\ u)^{\frac{n-j-1}{n-1}} \rho(IL,\ u)^{\frac{j}{n-1}} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_i(I_j(S,\ L)) &= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho(I_j(S,\ L),\ u)^{n-i} \mathrm{d}u \geqslant \\ & \frac{1}{C_1}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho(IS,\ u)^{n-i\frac{n-j-1}{n-1}} \rho(IL,\ u)^{n-i\frac{j}{n-1}} \mathrm{d}u \geqslant \\ & \frac{1}{C_1 C_2} \widetilde{W}_i(IS)^{\frac{n-j-1}{n-1}} \widetilde{W}_i(IL)^{\frac{j}{n-1}} \end{aligned} \tag{3}$$

(2),(3) 式等号成立当且仅当 S, L 为中心在原点的球, 证毕.

特别地, 取 $L = B_n$ 时, 我们有:

推论 1 若 $S \in \mathscr{S}_o^n$, $0 \leqslant i < n$, $0 < j < n-1$, 则

$$\widetilde{W}_i(I_j(S))^{n-1} \geqslant \frac{1}{N_1 N_2} \widetilde{W}_i(IS)^{n-j-1}$$

等号成立当且仅当 S 是中心在原点的球. 其中:

$$N_1 = \max\left\{ C_{\frac{n-1}{n-j-1}, \frac{n-1}{j}}\left(\frac{R_{S_u^\perp}^{n-1}}{r_{S_u^\perp}^{n-1}},\ 1 \right),\ C_{\frac{n-1}{n-j-1}, \frac{n-1}{j}}\left(\frac{r_{S_u^\perp}^{n-1}}{R_{S_u^\perp}^{n-1}},\ 1 \right) \right\}$$

$$N_2 = \max\left\{ C_{\frac{n-1}{n-j-1}, \frac{n-1}{j}}\left(\frac{R_{IS}^{n-i}}{r_{IS}^{n-i}},\ 1 \right),\ C_{\frac{n-1}{n-j-1}, \frac{n-1}{j}}\left(\frac{r_{IS}^{n-i}}{R_{IS}^{n-i}},\ 1 \right) \right\}$$

利用 Hölder 不等式, 本文把(1) 式中的 i, j 从 $0 \leqslant i < n$, $0 < j < n-1$ 扩充到 $i > 0$, $j > 0$ 上.

定理 2 若 $S, L \in \mathscr{S}_o^n$, $i > n$, $0 < j < n-1$, 则

$$\widetilde{W}_i(I_j(S,\ L))^{n-1} \geqslant \frac{1}{C_2} \widetilde{W}_i(IS)^{n-j-1} \widetilde{W}_i(IL)^j$$

等号成立当且仅当 S,L 为中心在原点的球.

证

$$\rho(I_j(S,L),u)=\frac{1}{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-2}}\rho(S\cap E_u^{\perp},v)^{n-j-1}\rho(L\cap E_u^{\perp},v)^j\,\mathrm{d}v\leqslant$$

$$\rho(IS,u)^{\frac{n-j-1}{n-1}}\rho(IL,u)^{\frac{j}{n-1}}\tag{4}$$

$$\widetilde{W}_i(I_j(S,L))=\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\rho(I_j(S,L),u)^{n-i}\mathrm{d}u\geqslant$$

$$\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\rho(IS,u)^{n-i\frac{n-j-1}{n-1}}\rho(IL,u)^{n-i\frac{j}{n-1}}\mathrm{d}u\geqslant$$

$$\frac{1}{C_2}\widetilde{W}_i(IS)^{\frac{n-j-1}{n-1}}\widetilde{W}_i(IL)^{\frac{j}{n-1}}\tag{5}$$

不等式(4),(5) 等号成立当且仅当 S,L 为中心在原点的球，证毕.

特别地，取 $L=B_n$ 时，有：

推论 2　若 $S\in\mathscr{S}_o^n$，$i>n$，$0<j<n-1$，则

$$\widetilde{W}_i(I_j(S))^{n-1}\geqslant\frac{1}{N_2}\widetilde{W}_i(IS)^{n-j-1}$$

等号成立当且仅当 S 为中心在原点的球. 其中

$$N_2=\max\left\{C_{\frac{n-1}{n-j-1},\frac{n-1}{j}}\left(\frac{R_{IS}^{n-i}}{r_{IS}^{n-i}},1\right),C_{\frac{n-1}{n-j-1},\frac{n-1}{j}}\left(\frac{r_{IS}^{n-i}}{R_{IS}^{n-i}},1\right)\right\}$$

定理 3　若 $S,L\in\mathscr{S}_o^n$，$0\leqslant i<n$，$j>n-1$，则

$$\widetilde{W}_i(I_j(S,L))^{n-1}\leqslant\frac{1}{C_3C_4}\widetilde{W}_i(IS)^{n-j-1}\widetilde{W}_i(IL)^j$$

等号成立当且仅当 S,L 为中心在原点的球. 其中：

$$C_3=\min\left\{C_{\frac{n-1}{n-j-1},\frac{n-1}{j}}\left(\frac{R_{S_u^{\perp}}^{n-1}}{r_{S_u^{\perp}}^{n-1}},\frac{r_{L_u^{\perp}}^{n-1}}{R_{L_u^{\perp}}^{n-1}}\right),C_{\frac{n-1}{n-j-1},\frac{n-1}{j}}\left(\frac{r_{S_u^{\perp}}^{n-1}}{R_{S_u^{\perp}}^{n-1}},\frac{R_{L_u^{\perp}}^{n-1}}{r_{L_u^{\perp}}^{n-1}}\right)\right\}$$

$$C_4=\min\left\{C_{\frac{n-1}{n-j-1},\frac{n-1}{j}}\left(\frac{R_{IS}^{n-i}}{r_{IS}^{n-i}},\frac{r_{IL}^{n-i}}{R_{IL}^{n-i}}\right),C_{\frac{n-1}{n-j-1},\frac{n-1}{j}}\left(\frac{r_{IS}^{n-i}}{R_{IS}^{n-i}},\frac{R_{IL}^{n-i}}{r_{IL}^{n-i}}\right)\right\}$$

证　由 Pólya-Szegö 不等式和混合相交体的定义，同理于定理 1，我们易得出定理 3 的证明.

特别地，取 $L=B_n$ 时，有：

推论 3　若 $S\in\mathscr{S}_o^n$，$0\leqslant i<n$，$j>n-1$，则

$$\widetilde{W}_i(I_j(S))^{n-1}\leqslant\frac{1}{N_3N_4}\widetilde{W}_i(IS)^{n-j-1}$$

等号成立当且仅当 S 为中心在原点的球. 其中：

$$N_3=\min\left\{C_{\frac{n-1}{n-j-1},\frac{n-1}{j}}\left(\frac{R_{S_u^{\perp}}^{n-1}}{r_{S_u^{\perp}}^{n-1}},1\right),C_{\frac{n-1}{n-j-1},\frac{n-1}{j}}\left(\frac{r_{S_u^{\perp}}^{n-1}}{R_{S_u^{\perp}}^{n-1}},1\right)\right\}$$

$$N_4=\min\left\{C_{\frac{n-1}{n-j-1},\frac{n-1}{j}}\left(\frac{R_{IS}^{n-i}}{r_{IS}^{n-i},1}\right),C_{\frac{n-1}{n-j-1},\frac{n-1}{j}}\left(\frac{r_{IS}^{n-i}}{R_{IS}^{n-i}},1\right)\right\}$$

定理 4　若 $S,L\in\mathscr{S}_o^n$，$i>n$，$j>n-1$，则

$$\widetilde{W}_i(I_j(S,L))^{n-1}\geqslant\frac{1}{C_3}\widetilde{W}_i(IS)^{n-j-1}\widetilde{W}_i(IL)^j$$

等号成立当且仅当 S,L 为中心在原点的球.

证　由 Pólya-Szegö 不等式、Hölder 不等式和混合相交体的定义，同理于定理 2，我们易得出定理 4 的证明.

特别地，取 $L = B_n$ 时，有：

推论 4 若 $S \in \mathscr{S}_o^n$，$i > n$，$j > n-1$，则

$$\widetilde{W}_i(I_j(S))^{n-1} \geqslant \frac{1}{N_3}\widetilde{W}_i(IS)^{n-j-1}$$

等号成立当且仅当 S 是中心在原点的球.

参考文献：

[1] LUTWAK E. The Brunn-Minkowski-Firey Theory. Ⅰ. Mixed Volumes and the Minkowski Problem [J]. J Differential Geom，1993，38(1)：131－150.

[2] LUTWAK E. Dual Mixed Volumes [J]. Pacific J Math，1975，58(2)：531－538.

[3] LUTWAK E. Intersection Bodies and Dual Mixed Volumes [J]. Adv Math，1988，71(2)：232－261.

[4] ZHAO C J，LENG G S. Inequalities for Dual Quermassintegrals of Mixed Intersection Bodies [J]. Proc Indian Acad Sci，2005，115(1)：79－91.

[5] ZHAO C J，LENG G S. Brunn-Minkowski Inequality for Mixed Intersection Bodies [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications，2005，301(1)：115－123.

[6] ZHAO C J，CHEUNG W S. On Reverse Minkowski-Type Inequalities [J]. Mediterranean Journal of Mathematics，2015，12(3)：1085－1094.

Reverse Minkowski Inequality for Dual Quermassintegrals of Mixed Intersection Bodies

JU Fang， WANG Xing-xing

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Lutwak introduced a new star body called mixed intersection body and proved the Minkowski inequality of the mixed intersection bodies. In this paper，we will prove the reverse Minkowski inequality for the dual quermassintegrals of mixed intersection bodies.

Key words：mixed intersection body；Pólya-Szegö inequality；Minkowski inequality；reverse Minkowski inequality

责任编辑 廖 坤