DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.04.024

向量组线性相关性的教学设计①

江　蓉，　王守中

广东石油化工学院 理学院 广东 茂名 525000

摘要：线性代数在理论和现实生活中有着非常广泛的应用．该课程的教学内容多，向量组的线性相关性是线性代数最重要的内容之一，它不但是一个教学重点，而且是一个教学难点，它与线性方程组密切相关．从宏观与微观两个方面探讨了向量组线性相关性的教学设计．

关　键　词：线性代数；线性方程组；向量组；线性相关性；教学设计

中图分类号：G642.41；O153　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000-5471(2017)04-0146-05

线性代数在工程技术、经济学等领域的应用非常广泛，故成为我国高等学校大多数非数学专业学生的公共基础课．该课程的概念多、定理多、理论性强且内容抽象，对学生来说学习的难度较大．正因为此课程具有高度的抽象性，它极大地训练了学生的抽象思维和逻辑推理能力，培养了学生的数学素养．该课程中线性方程组和向量组的线性相关性密不可分，而线性方程组是线性代数的教学主线，贯穿于该课程的始终，因此做好向量组线性相关性的教学工作十分必要．本文从宏观和微观两方面探讨向量组线性相关性的教学设计．

1　树立大局观，围绕教学主线合理安排教学内容的次序及其侧重点

我国高校中，使用最广的线性代数教材是同济大学编写的《线性代数》[1]．其教学内容出现的先后次序是：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等行变换及方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换．纵观各章的内容，线性方程组贯穿全部章节．在第一章，由方程组的解法引入行列式，此章的最后，介绍如何利用克拉默法则求解线性方程组，在介绍该法则时，既要讲解其优点，也应指明它的重大缺陷：计算量大、只适用于方程个数等于未知数个数且系数行列式不为零的线性方程组，同时引导学生思考：若以上两个前提条件被破坏，如何求解线性方程组?这为线性方程组的后续教学预留了进一步探讨的问题．讲解第二章时，重点介绍矩阵的乘法，因为它为线性方程组提供了一种简洁的表示方法：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，再借助分块矩阵的语言，给出线性方程组的几种等价的表示方式：

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} a_{11}\boldsymbol{x}_1+a_{12}\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{b}_1 \\ a_{21}\boldsymbol{x}_1+a_{22}\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{x}_1+a_{m2}\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{b}_m \end{cases} \tag{1}$$

(ii) 记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)^{\mathrm{T}}$，则方程组(1)记作 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$；

(iii) 记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，则线性方程组(1)可用增广矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 或 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$ 表示；

(iv) 若把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行分成 m 块，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可记作 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_i\,(i=1,2,\cdots,m)$；

(v) 若把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分成 n 块，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可记作 $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$.

---

①　收稿日期：2016-05-29
作者简介：江　蓉(1970-)，女，广东茂名人，副教授，主要从事图论及教学法的研究．

而线性方程组的表示法(v)又为线性组合与线性表示、向量组的线性相关性的教学打下基础，在教学过程中要引导学生予以足够的重视．第三章介绍矩阵的初等变换、矩阵的秩与线性方程组的解和矩阵方程等重点内容，其核心为线性方程组的求解，采用的方法是极其重要的矩阵的初等变换．判断线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解，若有解，其解的个数等问题的核心是矩阵的秩，这部分内容的相关结论为研究向量组的线性相关性奠定了重要基础．因为矩阵的秩与向量组的秩密切相关，而齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解的情况决定了向量组的线性相关性，矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 是否有解决定了两个向量组之间的线性关系，故第三章的教学必然成为线性代数教学过程中浓墨重彩的一个环节．第四章重点探讨了向量组的线性组合与线性表示、向量组的线性相关性，其实质就是探究线性方程组的解．在探究向量组的线性相关性的基础上，又从向量组的角度重新刻画了线性方程组的解，并给出其通解的结构．向量组的线性相关性与线性方程组这两个重要的知识模块相互交织，无法割裂开来，因而在相关知识点的教学过程中，要树立大局观，整体布局，为相关知识的教学预留继续深入探讨的话题．第五章相似矩阵及二次型、第六章线性空间与线性变换都要利用线性方程组解决问题．故线性方程组的相关内容是线性代数的教学主线，贯穿了所有的章节[2]，矩阵的初等变换法就成为了解决相关问题的重要载体．向量组线性相关性的教学就是上述内容的集中体现．要做好向量组线性相关性的教学工作，必须从全局考虑教学内容的衔接．

2　做好重要概念的教学设计，加强重要概念的教学

学好向量组的线性相关性的基础是正确理解其定义，因此教师在介绍相关内容时必须做好重要的基本概念的教学设计工作．

定义 1[1]　若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)所组成的集合叫作向量组．

介绍向量组的定义时，需向学生重点介绍矩阵与向量组的对应关系，其实质就是矩阵按行(列)分块的问题．向量组的线性相关性问题探究的基石是：有限个同维数的列(行)向量构成的向量组与矩阵间的一一对应．在此基础上，再次介绍线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的重要表示方式：

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$$

从而揭示出线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解与向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示的实质相同这一重要事实，并为向量组线性相关性的教学留下继续探究的线索．

定义 2[1]　给定向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$，如果存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}\tag{2}$$

则称向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是线性相关的，否则称它线性无关．

事实上，向量组线性相关意味着齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，故(2)式有无穷多种表现形式．线性无关意味着齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而(2)式的表现形式唯一．

定义 3[1]　给定向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，如果存在一组常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得

$$\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m\tag{3}$$

则称向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示．

显然，向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的实质是线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}$ 有解．向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的实质是线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}$ 无解．故问题的实质转化为线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}$ 是否有解的问题．特别地，当向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，问题又转化为了向量组线性相关性的判别问题．因此在教学中必须深入阐述二者间的内在联系，为向量组线性相关性的教学铺设好坚实的基础．

定义 4[1]　给定向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 及 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$，若 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 中的每个向量都能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示，则称 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示．若能相互表示，则称这两个向量组等价．

向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示，意味着矩阵方程 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$ 有解．它建立了两个向量组的线性表示与矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 间的联系，并将向量组的关系问题转化为矩阵方程解的问题．显然，定义 1－4 浑然一体(定义 3 是定义 4 的特殊情形)，它们对于向量组线性相关性的教学来说极其重要，故在教学中必须讲解清楚这些概念间的联系．

3　善于转化，化难为易

向量组线性相关性的内容，涉及到的重要知识点很多，这对学生分析问题和解决问题的综合能力提出了较高的要求，因而学生学习起来相当的困难，这就要求教师在教学时帮助学生理清解决问题的主线，找出简洁有效的解决方案，激发并保持学生的学习热情．事实上，齐次线性方程组解的判别法对于研究向量组的线性相关性有非常大的帮助，例如：

命题 1[3]：对于 n 维向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$，记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m)$，则下列命题等价：

(i) 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关(或线性无关)；

(ii) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解(或只有零解)；

(iii) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<m$(或 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m$)．

命题1的重要意义在于将向量组的线性相关性的判别转化为判别向量组构成的矩阵的秩与向量组中向量的个数的关系，从而使得向量组线性相关性的判别这个让学生感到困难的问题简单化，同时，它也为在判断向量组的线性相关性时利用齐次线性方程组解的相关理论搭建了一个平台．矩阵的秩、向量组的线性相关性、齐次线性方程组的解等内容是一个有机整体，无法割裂开来单独研究．常用的向量组线性相关(或无关)的判别定理如下：

定理 1[1]　向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关的充要条件是它所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m)$ 的秩小于向量个数 m；向量组线性无关的充分必要条件是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m$．

定理 2[1]　(i) 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关，则向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}$ 也线性相关．反之，若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 也线性无关；

(ii) m 个 n 维向量组成的向量组，当维数 n 小于向量个数 m 时一定线性相关；

(iii) 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{b}$ 必能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示，且表示式是唯一的．

定理 3[1]　向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m)$ 的秩等于矩阵 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m,\ \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_l)$ 的秩．向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 等价的充分必要条件是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$．

在教学过程中应该向学生指明，利用定义证明向量组的线性相关性也是一种常用且很重要的方法，不能仅仅依赖于相关的定理，因为定义就是一种证明方法．

4　理清关系，实施分类教学

由于向量组线性相关性的内容的题目类型比较多，学生面对大量的习题很难快速地找到合适的解决方案，因此，教师可以将典型的题型进行分类，帮助学生更好地掌握相关的知识点．为此可将向量组线性相关性的问题划分为如下3类[4]：

第一类问题　判别向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 内部向量之间的关系．

这类问题主要包括判断此向量组的线性相关性问题、该向量组的最大无关组的寻找以及该向量组中不在最大无关组中的向量被最大无关组线性表示的问题．此类问题刻画的是向量组内部向量间的线性关系，与其它向量组无关．向量组的线性相关性问题其实质是齐次线性方程组 $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$ 是否有非零解的问题，从而把向量组的线性相关性问题转化为齐次线性方程组的解的问题．解决第一类问题的常用方法是借助矩阵的秩或齐次线性方程组的解的情况加以判别．可细分如下：

若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是具体的，可以利用定理1与定理2加以判别；

若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是抽象的，在讨论其线性相关性时，既可以利用矩阵的秩来判别，也可利用向量组的线性相关性的定义来判别．

由于这部分内容知识点众多，学生难以掌握，故在教学过程中需要加强例题教学，尽量介绍多种解决问题的方案，帮助学生开阔视野，更好地掌握相关的内容[5]．

例 1　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，

试证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

证　方法 1　利用定义证明.

设存在常数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$

故

$$(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+2k_2+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关可知：

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1+k_2+2k_3=0\\k_1+2k_2+3k_3=0\end{cases}$$

由于此齐次线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

由克拉默法则，此方程组只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

方法 2　利用矩阵的秩的性质.

由已知条件有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$$

由于

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

故矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ 可逆. 由矩阵的秩的性质可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 又因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$. 故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

例 1 中的第一种方法直接利用向量组线性无关的定义来证明，证明过程中用到了齐次线性方程组只有零解这个结论. 第二种方法利用矩阵的秩的性质及利用秩来判别向量组线性无关的判别定理证明问题. 这两种方法将向量组线性无关的判定、齐次线性方程组的解的判别、利用秩来判别向量组线性无关这三者的关系进行了充分的展示.

第二类问题　判别向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 之间的关系，亦即向量 $\boldsymbol{b}$ 能否被向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示，若能表示，其表示式是否唯一的问题.

这类问题的实质是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}$ 是否有解，若有解，其解是否唯一以及具体表示式的问题，从而将向量与向量组间的关系问题转化为非齐次线性方程组解的问题，利用非齐次线性方程组解的判别法来处理. 这是一种非常重要的转化方法，它建立起了两个重要知识点 —— 线性表示与非齐次线性方程组的解间的联系.

第三类问题　判别两个向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 之间的关系，亦即判别一个向量组能否被另一个向量组线性表示以及两个向量组是否等价的问题.

研究两个向量组间的关系，远比研究一个向量组内部的关系复杂. 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$，则这类问题的实质是判断矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 是否有解的问题. 从而将判别两个向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 之间的关系问题转化为矩阵方程的解的问题. 借助矩阵的秩，可使这个问题的难度降低，再利用定理 3 解决.

矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性是线性代数中最重要也是最难的内容. 通过上述讨论可知，

为了做好向量组的线性相关性这个教学重点和教学难点的工作，将向量组的线性相关性的典型问题划分为3类进行探究，既可以帮助学生从浩瀚的题海中解脱出来，又能够使之正确认识问题的实质——3类问题实质全都是线性方程组的求解问题，这对于做好向量组线性相关性的教学工作具有重要意义．关于线性方程组的求解，最基本又最重要的方法是利用矩阵的初等行变换求解．因此，学生在学习向量组的线性相关性的内容时，可以更加深入地体会到矩阵的初等行变换在线性代数中的重要作用，这也是学习向量组线性相关性的一个重要方法．

参考文献：

[1] 同济大学数学系．工程数学线性代数 [M]．6版．北京：高等教育出版社，2014：1－109．

[2] 李小平．关于《线性代数》教学改革的一些思考 [J]．大学数学，2011，27(3)：22－25．

[3] 吴天毅．线性代数教学内容改革的研究与实践[J]．天津轻工业学院学报，2003，18：93－95．

[4] 罗秀芹，董福安，郑铁军．关于向量组的线性相关性的学习探讨 [J]．高等数学研究，2005，8(5)：18－20．

[5] 江　蓉，王守中．矩阵的秩在线性代数中的应用及其教学方法的探讨[J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(8)：175－180．

[6] 江　蓉，周　敏．素质教育背景下提高大学数学课堂教学质量的若干方法[J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(4)：176－180．

[7] 江世明，李敬文，江红豆．图的点可区别边染色猜想的算法[J]．西南大学学报(自然科学版)，2016，38(10)：47－54．

On Teaching Design of Linear Dependence of Vector Group

JIANG　Rong，　WANG Shou-zhong

School of Sciences，Guangdong Institute of Petrochemical Technology，Maoming Guangdong 525000，China

Abstract：Linear algebra has very wide applications in theory and practice. There are many teaching contents in this course. The linear dependence of vector group is one of the most important contents in linear algebra. It is not only the teaching key point，but also the teaching difficult point in the course. For it is closely related to system of linear equations，so it associates with many knowledge points that are relative to system of linear equations also. The teaching design of linear dependence of vector group has been discussed from macroscopic and microscopic aspects.

Key words：linear algebra；system of linear equations；vector group；linear dependence vectors；teaching design

责任编辑　廖　坤