第 42 卷 第 6 期　西南师范大学学报（自然科学版）　2017 年 6 月
Vol. 42 No. 6　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Jun. 2017

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2017.06.001

Dashnic-Zusmanovich 矩阵的逆矩阵无穷范数上界的估计[①]

李艳艳

文山学院 数学学院，云南 文山 663000

摘要： 研究 Dashnic-Zusmanovich 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵无穷范数和最小奇异值的估计问题．利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的定义和不等式的放缩技巧，给出只涉及矩阵元素的估计式．对于该问题的研究填补了关于 Dashnic-Zusmanovich 矩阵研究在这方面的空白．数值算例说明了所给估计式的可行性和优越性．

关 键 词： 奇异值；无穷范数；对角占优；H-矩阵；Dashnic-Zusmanovich 矩阵

中图分类号： O151.21　**文献标志码：** A　**文章编号：** 1000-5471(2017)06-0001-04

令 $M_n(\mathbb{C})$ 表示全体阶数是 n 的复矩阵的集合，$N=\{1,2,\cdots,n\}$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$，

$$R_i(\boldsymbol{A})=\sum_{k\in N,\ k\neq i}|a_{ik}|$$

$$C_i(\boldsymbol{A})=\sum_{k\in N,\ k\neq i}|a_{ki}|$$

在数值分析中，经常用到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵的无穷范数 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$、最小奇异值 $\sigma_n(\boldsymbol{A})$、条件数 $K(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$．$\sigma_n(\boldsymbol{A})$ 与 $K(\boldsymbol{A})$ 又都与 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 密切相关，所以 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的估计是近几年矩阵理论研究的热点问题之一，尤其是 H-矩阵的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的界，如严格对角占优矩阵、严格 α-对角占优矩阵、严格 α_1-对角占优矩阵、严格 α_2-对角占优矩阵、Nekrasov 矩阵等的逆矩阵的无穷范数的界的估计，已得到了许多学者的研究[1-5]．本文研究 H-矩阵的另一子类 Dashnic-Zusmanovich 矩阵的逆矩阵的无穷范数以及奇异值的界的估计问题，该研究填补了 Dashnic-Zusmanovich 矩阵研究在这方面的空白．

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$，若 $|a_{ii}|>R_i(\boldsymbol{A})$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵(SDD)．

对于严格对角占优矩阵的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 和 $\sigma_n(\boldsymbol{A})$ 的估计，文献[6]有如下经典结果：

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\max_i\frac{1}{|a_{ii}|-R_i(\boldsymbol{A})}\tag{1}$$

$$\sigma_n(\boldsymbol{A})\geqslant\sqrt{\min_i(|a_{ii}|-R_i(\boldsymbol{A}))\min_j(|a_{jj}|-R_j(\boldsymbol{A}))}\tag{2}$$

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$|a_{ii}|>\frac{1}{2}R_i(H(\boldsymbol{A}))\qquad i\in N$$

---

① 收稿日期：2016-09-14
基金项目：国家自然科学基金项目(11261049)；云南省科技厅应用基础研究项目(2013FD052)；文山学院科学研究项目(16WSY11)．
作者简介：李艳艳(1982-)，女，甘肃庆阳人，讲师，主要从事矩阵理论及其应用的研究．

时，其中 $H(\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，文献[7-8]给出了最小奇异值 $\sigma_n(\boldsymbol{A})$ 的新界：

$$\sigma_n(\boldsymbol{A}) \geqslant \min_i \left\{ |a_{ii}| - \frac{1}{2}(R_i(\boldsymbol{A})+C_i(\boldsymbol{A})) \right\} \tag{3}$$

$$\sigma_n(\boldsymbol{A}) \geqslant \min_i \frac{1}{2}\left(\sqrt{4|a_{ii}|^2+[R_i(\boldsymbol{A})-C_i(\boldsymbol{A})]^2}-[R_i(\boldsymbol{A})+C_i(\boldsymbol{A})]\right) \tag{4}$$

$$\sigma_n(\boldsymbol{A}) \geqslant \min_{i,j,\,i\neq j} \frac{1}{2}\left[\operatorname{Re} a_{ii}+\operatorname{Re} a_{jj}-\sqrt{(\operatorname{Re} a_{ii}-\operatorname{Re} a_{jj})^2+R_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)R_j(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)}\right] \tag{5}$$

定义 1[9] 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$，若 $\boldsymbol{A}$ 的比较矩阵 $\langle\boldsymbol{A}\rangle=(\tilde{a}_{ij})$ 是 M-矩阵，

$$\tilde{a}_{ij}=\begin{cases} |a_{ii}| & i=j \\ -|a_{ij}| & i\neq j \end{cases}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 H-矩阵.

定义 2[9] 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$，若存在 $i\in N$，使得

$$|a_{ii}|(|a_{jj}|-R_j(\boldsymbol{A})+|a_{ji}|)>R_i(\boldsymbol{A})|a_{ji}| \qquad i,j\in N,\ j\neq i$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 Dashnic-Zusmanovich 矩阵.

引理 1[10] 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 H-矩阵，当且仅当存在非奇异对角矩阵 $\boldsymbol{W}$，使得 $\boldsymbol{AW}$ 是 SDD 矩阵.

引理 2[9] 若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ 是 Dashnic-Zusmanovich 矩阵，则它是非奇异 H-矩阵.

引理 3[10] 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ 是 Dashnic-Zusmanovich 矩阵的充要条件是，存在对角矩阵 $\boldsymbol{W}\in F$，使得 $\boldsymbol{AW}$ 是 SDD 矩阵，其中

$$F=\{\boldsymbol{W}=\operatorname{diag}(w_1,w_2,\cdots,w_n):w_i=r>0,\ i\in N,\ w_j=1,\ j\neq i\}$$

引理 4[11] 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 H-矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|\leqslant\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}$，其中 $|\boldsymbol{A}|=(|a_{ij}|)$，$\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{B}$ 指的是 $a_{ij}\leqslant b_{ij}$，$i,j\in N$.

为了后面研究 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 和 $\sigma_n(\boldsymbol{A})$ 的需要，给出下面的符号：

$$\alpha_1(\boldsymbol{A})=\max_{j\in N,\ j\neq i}\frac{|a_{ji}|+|a_{ii}|}{(|a_{jj}|-R_j(\boldsymbol{A})+|a_{ji}|)|a_{ii}|-|a_{ji}|R_i(\boldsymbol{A})}$$

$$\alpha_2(\boldsymbol{A})=\max_{j\in N,\ j\neq i}\frac{|a_{jj}|-R_j(\boldsymbol{A})+|a_{ji}|+R_i(\boldsymbol{A})}{(|a_{jj}|-R_j(\boldsymbol{A})+|a_{ji}|)|a_{ii}|-|a_{ji}|R_i(\boldsymbol{A})}$$

$$\alpha(\boldsymbol{A})=\max\{\alpha_1(\boldsymbol{A}),\alpha_2(\boldsymbol{A})\}$$

定理 1 若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ 是 Dashnic-Zusmanovich 矩阵，则

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\alpha(\boldsymbol{A})$$

证 由引理 2 知 $\boldsymbol{A}$ 是 H-矩阵，再由引理 4 知 $|\boldsymbol{A}^{-1}|\leqslant\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}$，则

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\|\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}\|_\infty \qquad \langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}\geqslant 0$$

令

$$x_j=\sum_{h=1}^n(\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1})_{jh}=\sum_{h=1}^n|(\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1})_{jh}| \qquad j\in N,\ \boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

则

$$\langle\boldsymbol{A}\rangle\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

定义 $x_{j_0}=\max\limits_{j\in N,\ j\neq i}x_j$，由 $\langle\boldsymbol{A}\rangle\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}$，有：

$$|a_{ii}|x_i-\sum_{k\in N,\ i\neq j_0}|a_{ik}|x_k-|a_{ij_0}|x_{j_0}=1 \tag{6}$$

$$|a_{j_0j_0}|x_{j_0}-\sum_{k\in N,\ j_0\neq i}|a_{j_0k}|x_k-|a_{j_0i}|x_i=1 \tag{7}$$

由(6),(7)式和 Dashnic-Zusmanovich 矩阵的定义知：

$$|a_{ii}|x_i \leqslant 1 + R_i(\mathbf{A})x_{j_0}$$

$$(|a_{j_0j_0}| - R_{j_0}(\mathbf{A}) + |a_{j_0i}|)x_{j_0} \leqslant |a_{j_0i}|x_i + 1$$

那么：

$$x_i \leqslant \frac{1 + R_i(\mathbf{A})x_{j_0}}{|a_{ii}|}$$

$$x_{j_0} \leqslant \frac{1 + |a_{j_0i}|x_i}{|a_{j_0j_0}| - R_{j_0}(A) + |a_{j_0i}|}$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = \max\{\alpha_1(\mathbf{A}), \alpha_2(\mathbf{A})\}$$

若 $x_i > x_{j_0}$，则

$$\|\langle\mathbf{A}\rangle^{-1}\|_\infty = x_i \leqslant \frac{|a_{j_0j_0}| - R_{j_0}(\mathbf{A}) + |a_{j_0i}| + R_i(\mathbf{A})}{(|a_{j_0j_0}| - R_{j0}(\mathbf{A}) + |a_{j_0i}|)|a_{ii}| - R_i(\mathbf{A})|a_{j_0i}|} \leqslant$$

$$\max_{j\in N,\, j\neq i} \frac{|a_{jj}| - R_j(\mathbf{A}) + |a_{ji}| + R_i(\mathbf{A})}{(|a_{jj}| - R_j(\mathbf{A}) + |a_{ji}|)|a_{ii}| - |a_{ji}|R_i(\mathbf{A})} = \alpha_2(\mathbf{A})$$

若 $x_i \leqslant x_{j_0}$，则

$$\|\langle A\rangle^{-1}\|_\infty = x_{j_0} \leqslant \max_{j\in N,\, j\neq i} \frac{|a_{j_0i}| + |a_{ii}|}{(|a_{j_0j_0}| - R_{j_0}(\mathbf{A}) + |a_{j_0i}|)|a_{ii}| - |a_{j_0i}|R_i(\mathbf{A})} \leqslant$$

$$\max_{j\in N,\, j\neq i} \frac{|a_{ji}| + |a_{ii}|}{(|a_{jj}| - R_j(\mathbf{A}) + |a_{ji}|)|a_{ii}| - |a_{ji}|R_i(\mathbf{A})} = \alpha_1(\mathbf{A})$$

所以

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \leqslant \|\langle\mathbf{A}^{-1}\rangle\|_\infty \leqslant \alpha(\mathbf{A})$$

推论 1　若矩阵 $\mathbf{A}$ 是 Dashnic-Zusmanovich 矩阵，则 $\|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \leqslant \alpha(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.

定理 2　若矩阵 $\mathbf{A}$ 是 Dashnic-Zusmanovich 矩阵，则 $\sigma_n(\mathbf{A}) \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{\alpha(\mathbf{A})\alpha(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})}}$.

例 1　令

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

不难验证 $\mathbf{A}$ 是 Dashnic-Zusmanovich 矩阵，应用定理 1、推论 1、定理 2，分别得：

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \leqslant 28 \qquad \|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \leqslant 11.5 \qquad \sigma_n(\mathbf{A}) \geqslant 0.056$$

由于 $\mathbf{A}$ 不是严格对角占优矩阵，所以(1),(2) 式失效，由(3),(4),(5) 式得：

$$\sigma_n(\mathbf{A}) \geqslant -0.05 \qquad \sigma_n(\mathbf{A}) \geqslant -0.049 \qquad \sigma_n(\mathbf{A}) \geqslant 0.008\,6$$

从以上比较发现，本文给出的估计式优于已有文献给出的结果.

参考文献：

[1]　李艳艳，蒋建新，李耀堂. 严格对角占优 M-矩阵 $\mathbf{A}$ 的 $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$ 上界估计式的改进[J]. 云南大学学报(自然科学版)，2015，37(1)：5－8.

[2]　杨占山. 严格 α-对角占优 M-矩阵逆的无穷范数的上界估计 [D]. 兰州：兰州大学，2011.

[3]　赵建兴，桑彩丽. 严格 α_2-对角占优 M-矩阵 $\mathbf{A}$ 的 $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界序列 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(2)：1－6.

[4]　KOLOTILINA L Y. Nekrasov Matrices in the Infinity Norm [J]. Journal of Mathematical Sciences，2014，199(4)：431－437.

[5]　赵建兴，桑彩丽. 严格 α_1-对角占优 M-矩阵 $\mathbf{A}$ 的 $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$ 的估计 [J]. 扬州大学学报(自然科学版)，2016，19(1)：1－8.

[6] VARAH J M. A Lower Bound for the Smallest Singular Value of a Matrix [J]. Linear Algebra Appl, 1975, 11(1): 3-5.
[7] JOHNSON C R. A Gersgorin-Type Lower Bound for the Smallest Singular Value [J]. Linear Algebra Appl, 1989, 112(1): 1-7.
[8] JOHN C R, SZULC T. Further Lower Bounds for the Smallest Singular Value [J]. Linear Algebra Appl, 1998, 272(1): 169-179.
[9] CVETKOVIC L, NEDOVIC M. Special H-Matrics and Their Schur and Diagonal-Schur Complements [J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 208(1): 225-230.
[10] BERMAN A, PLEMMONS R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences [M]. SIAM: Classics Appl Math, 1994.
[11] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in Matrix Analysis [M]. Cambridge: Cambridge university Press, 1991.

On Estimation of Upper Bound Infinity Norm of Inverse Matrix for Dashnic-Zusmanovich Matrix

LI Yan-yan

School of Mathematics, Wenshan University, Wenshan Yunnan 663000, China

Abstract: The infinity norm of inverse of Dashnic-Zusmanovich matrix $\boldsymbol{A}$ and the smallest singular value of $\boldsymbol{A}$ and contraction technique of inequality have been studied, given the estimation formula of only involving elements of matrix. For the study of this problem aims to filling the gaps in the research on the Dashnic-Zusmanovich matrix in this area. Numerical example shows that the method in this paper is feasible and superiority.

Key words: singular value; infinity norm; diagonal dominance; H-matrix; Dashnic-Zusmanov matrix

责任编辑　廖　坤