DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.06.004

单位圆内代数体函数的强 Borel 点①

张 进

德宏师范高等专科学校 数学系,云南 芒市 678400

摘要: 讨论了单位圆内代数体函数在某条件下的强 Borel 点存在问题,通过建立代数体函数在角域取值的密指量与其对应的型函数的关系,得到了单位圆内代数体函数在此条件下必存在强 Borel 点,且其强 Borel 点必是其 Borel 点.

关 键 词: 代数体函数;单位圆;强 Borel 点;型函数

中图分类号: O174.52 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2017)06-0019-05

关于亚纯函数及代数体函数的 Borel 方向与 Borel 点,有过许多研究[1-3],文献[4-6]进一步研究得到了:复平面上有限正级、无穷级与零级代数体函数至少存在一条强 Borel 方向,且其强 Borel 方向一定是其 Borel 方向. 本文针对单位圆内代数体函数的强 Borel 点存在性以及它与 Borel 点的关系进行了讨论.

假定 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由不可约方程

$$\psi(z,\ \omega)=A_v(z)\omega^v+A_{v-1}(z)\omega^{v-1}+\cdots+A_0(z)=0 \tag{1}$$

所确定的 v 值代数体函数. 这里 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,v)$ 都是 $|z|<1$ 内的解析函数且不在一点同时为 0. $\omega(z)$ 的单值定义域是一 Riemann 曲面 $\widetilde{R}_z$,$\widetilde{R}_z$ 是 z 平面的 v 叶覆盖,$\widetilde{R}_z$ 的点用 $\tilde{z}$ 表示,$\tilde{z}$ 在 z 平面的投影是 z,$\widetilde{R}_z$ 对应 $|z|<r$ 的部分记为 $|\tilde{z}|<r$. 记:

$$S(r,\ \omega)=\frac{1}{\pi}\iint_{|\tilde{z}|<r}\left[\frac{|\omega'(z)|}{1+|\omega^2(z)|}\right]^2\mathrm{d}\sigma$$

$$T(r,\ \omega)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{S(t,\ \omega)}{t}\mathrm{d}t$$

称 $T(r,\omega)$ 是 $\omega(z)$ 的球面特征函数,它与 Nevanlinna 特征函数仅相差一个有界量[7]. $n(r,\widetilde{R}_z)$ 表示 $\omega(z)$ 在 $|\tilde{z}|<r$ 的分支点的个数,分支点的级计算在内,$N(r,\widetilde{R}_z)$ 是其对应的密指量. 由文献[7]可知

$$N(r,\ \widetilde{R}_z)\leqslant 2(\nu-1)T(r,\ \omega)+O(1)$$

记

$$\Delta(\theta_0,\ \varepsilon)=\{z\mid |\arg z-\theta_0|<\varepsilon\}$$

$\widetilde{R}_z$ 在 $\Delta(\theta_0,\varepsilon)$ 的部分记为 $\widetilde{\Delta}(\theta_0,\varepsilon)$,定义 $n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)$ 表示 $\omega(z)$ 在 $\widetilde{\Delta}(\theta_0,\varepsilon)\cap\{|\tilde{z}|<r\}$ 的 a 值点的个数,记重数. 类似地,可定义 $n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\widetilde{R}_z)$,$N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)$ 及 $N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\widetilde{R}_z)$.

$\omega(z)$ 的级定义为 $\rho=\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{\log T(r,\ \omega)}{\log\dfrac{1}{1-r}}$. 本文将主要讨论 $\omega(z)$ 满足条件 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{T(r,\ \omega)}{\log\dfrac{1}{1-r}}=\infty$ 的情况. 显然,此条件包含了无穷级、有限正级和部分零级情况,具有较广的覆盖范围. 文献[8]得到了在此条件下亚纯函

① 收稿日期:2016-06-05
基金项目:云南省教育厅科研基金项目(2015Y581).
作者简介:张 进(1978-),男,湖北襄阳人,讲师,主要从事函数论的研究.

数的 Borel 点存在性(见文献[8]中定理 1(4)),文献[9]则将此结论推广到了代数体函数.

定义 1 设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义的 v 值代数体函数,满足 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{T(r,\omega)}{\log\dfrac{1}{1-r}}=\infty$. 若对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,对任何复数 a,有 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{N(r,\Delta(\theta,\varepsilon),\omega=a)}{U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}>0$,至多除去 $2v$ 个例外值,则称 $e^{i\theta}$ 是 $\omega(z)$ 的强 Borel 点,其中 $U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$ 是 $\omega(z)$ 的型函数(其定义见文中引理 1).

引理 1 设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义的 v 值代数体函数,满足 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{T(r,\omega)}{\log\dfrac{1}{1-r}}=\infty$,则存在连续可微函数 $\rho(x)$,$U(x)$,满足以下条件:

(a) $\rho(x)$ 单调下降趋于 0,$\rho'(x)$ 单调上升;

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}x\rho'(x)\log x\log\log x=0$;

(c) 对充分大的 x,有 $T(r,\omega)\ll U(x)=e^{\frac{1}{\rho(x)}}\log x$;

(d) $U(X)<(1+o(1))U(x)$,$X=x+x\rho^2(x)$.

其中 $x=\dfrac{1}{1-r}$,称 $U(x)$ 是 $\omega(z)$ 的型函数.

证 由文献[8]中的引理 2 可得.

引理 2 设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义的 v 值代数体函数,满足 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{T(r,\omega)}{\log\dfrac{1}{1-r}}=\infty$,$m(m\geqslant 4)$ 是正整数,令 $\theta_i=\dfrac{2\pi i}{m}$,

$$\Omega(\theta_i)=\left\{z\,\middle|\,|\arg z-\theta_i|<\frac{2\pi}{m}\right\}\qquad i=0,1,\cdots,m-1$$

则在这 m 个角域 $\{\Omega(\theta_i)\}$ 中,至少存在 1 个角域 $\Omega(\theta_i)$,使得对任意复数 a,有

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{N(r,\Omega(\theta_i),\omega=a)}{U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}>0$$

至多除去 $2v$ 个例外值.

证 假设结论不成立,则对每个 $\Omega(\theta_i)(i=0,1,\cdots,m-1)$,至少存在 $q=2\nu+1$ 个值 $\{a_i^j\}\big|_{j=1}^{q}$,满足

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{N(r,\Omega(\theta_i),\omega=a_i^j)}{U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}=0$$

则对 i,j,一致地有

$$N(r,\Omega(\theta_i),\omega=a_i^j)=o(U(x))\qquad x=\frac{1}{1-r}$$

设 $\theta_{i,k}=\dfrac{2\pi i}{m}+\dfrac{2\pi k}{\alpha m}$,$\alpha$ 是任意正整数,$0\leqslant k\leqslant\alpha-1$. 记

$$\Omega_{i,k}=\{z\mid |z|<R,\ \theta_{i,k}\leqslant\arg z<\theta_{i,k+1}\}$$

则 $\{z\mid |z|<R\}=\bigcup\limits_{k=0}^{\alpha-1}\bigcup\limits_{i=0}^{m-1}\Omega_{i,k}$,因此必存在 $k(0\leqslant k\leqslant\alpha-1)$,不妨设 $k=0$,使得

$$\sum_{i=0}^{m-1}n(\Omega_{i,0},\widetilde{R}_z)\leqslant\frac{1}{\alpha}n(R,\widetilde{R}_z)$$

记:

$$\bar{\Omega}_i = \left\{ z \left| \frac{\theta_{i,0} + \theta_{i,1}}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\theta_{i+1,0} + \theta_{i+1,1}}{2} \right. \right\}$$

$$\Omega_i^0 = \{ z \mid \theta_{i,0} < \arg z < \theta_{i+1,1} \}$$

则 $\bar{\Omega}_i \subset \Omega_i^0$. 由于 $\bigcup_{i=0}^{m-1} \Omega_i^0$ 仅在 $\bigcup_{i=0}^{m-1} \Omega_{i,0}$ 上覆盖两次，故

$$\sum_{i=0}^{m-1} N(R, \Omega_i^0, \tilde{R}_z) \leqslant \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) N(R, \tilde{R}_z) + O(1)$$

对 $\bar{\Omega}_i$,Ω_i^0 应用文献[10] 中的引理 1，可得

$$(q-2) S(r, \bar{\Omega}_i, \omega) \leqslant \sum_{j=1}^{q} n(R, \Omega_i^0, a_i^j) + n(R, \Omega_i^0, \tilde{R}_z) + O\left(\frac{1}{(1-r)\rho^2(x)}\right) \tag{2}$$

由于 $X = \dfrac{1}{1-R}$，$x = \dfrac{1}{1-r}$，$X = x + x\rho^2(x)$，则：

$$\mathrm{d}X = [1 + \rho^2(x) + 2x\rho(x)\rho'(x)]\mathrm{d}x = (1 + o(1)\rho(x))\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{X} = \frac{1}{1+\rho^2(x)}(1 + o(1)\rho(x)) \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{R} = \frac{1-R}{R} \frac{r}{1-r} \frac{1}{1+\rho^2(x)}(1+o(1)\rho(x)) \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{x-1}{x-1+x\rho^2(x)} \frac{1}{1+\rho^2(x)}(1+o(1)\rho(x)) \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \left(1 + \frac{1}{r}\rho^2(x)\right)(1+\rho^2(x)) \frac{1}{1+o(1)\rho(x)} \frac{\mathrm{d}R}{R}$$

对(2) 式两边同除以 νr，对 r 从 $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\log^{\frac{1}{2}} x}} (x > x_0)$ 到 r 积分，再对 $i = 0, 1, \cdots, m-1$ 求和，结合引理 1，可得

$$(q-2)T(r, \omega) \leqslant$$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^{\frac{1}{2}} x}}} \rho^2(\mathrm{e}^{\log^{\frac{1}{2}} x})\right) \frac{1+\rho^2(\mathrm{e}^{\log^{\frac{1}{2}} x})}{1-\rho(\mathrm{e}^{\log^{\frac{1}{2}} x})} N(R, \tilde{R}_z) + o(U(X)) + o(U(x)) \leqslant$$

$$2(\nu-1)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^{\frac{1}{2}} x}}} \rho^2(\mathrm{e}^{\log^{\frac{1}{2}} x})\right) \frac{1+\rho^2(\mathrm{e}^{\log^{\frac{1}{2}} x})}{1-\rho(\mathrm{e}^{\log^{\frac{1}{2}} x})} T(R, \omega) + o(U(x)) \tag{3}$$

(3) 式两边同除以 $U(x)$，令 $r \to 1$，取上极限，结合引理 1，可得

$$q - 2 \leqslant 2(\nu - 1)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

让 $\alpha \to \infty$，可得 $q \leqslant 2\nu$，矛盾.

定理 1　设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z| < 1$ 内由(1) 式所定义的 v 值代数体函数，满足 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}} \dfrac{T(r, \omega)}{\log \dfrac{1}{1-r}} = \infty$，则 $\omega(z)$ 必存在强 Borel 点.

证　由引理 2，对任意正整数 $m(m \geqslant 4)$，总存在一个角域，不妨记为 $\Omega(\theta_m^0)$，使得对任意复数 a(至多有 2ν 个例外值 a)，有 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}} \dfrac{N(r, \Omega(\theta_m^0), \omega = a)}{U(r)} > 0$. 由于 $\{\theta_m^0\}$ 有界，存在一收敛子列，仍记为 $\{\theta_m^0\}$，令 $\lim\limits_{m\to\infty} \theta_m^0 = \theta_0$，则 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 即为 $\omega(z)$ 的强 Borel 点.

推论 1　设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z| < 1$ 内由(1) 式所定义的 v 值代数体函数，满足 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}} \dfrac{T(r, \omega)}{\log \dfrac{1}{1-r}} = \infty$，则

$\omega(z)$ 的强 Borel 点必是其关于$\frac{1}{1-r}U\left(\frac{1}{1-r}\right)$的 Borel 点.

证 由定理 1，设 $e^{i\theta_0}$ 是 $\omega(z)$ 的强 Borel 点，则必有

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\log n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{\log\left(\frac{1}{1-r}U\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)}\geqslant 1$$

其中 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$是任意正数，$a$ 是任意复数(至多有 2ν 个例外值 a). 否则，对于某个 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，存在 $q=2\nu+1$ 个值$\{a_j\}_{j=1}^{q}$，存在 $\sigma>0$，对每个 j，一致地有

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\log n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)}{\log\left(\frac{1}{1-r}U\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)}<1-2\sigma$$

于是

$$\begin{aligned}&N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)=\\&\frac{1}{\nu}\int_{r_0}^{r}\frac{n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)}{r}\mathrm{d}r+N(r_0,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)\leqslant\\&\frac{1}{\nu}\int_{r_0}^{r}\frac{U^{1-\sigma}\left(\frac{1}{1-r}\right)\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1-\sigma}}{r}\mathrm{d}r+c\leqslant\frac{U^{1-\sigma}\left(\frac{1}{1-r}\right)}{\nu r_0\sigma}[(1-r_0)^{\sigma}-(1-r)^{\sigma}]+c\end{aligned}$$

所以

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}\leqslant\varlimsup_{r\to 1}\frac{c}{U^{\sigma}\left(\frac{1}{1-r}\right)}=0$$

这与 $e^{i\theta_0}$ 是 $\omega(z)$ 的强 Borel 点矛盾. 其中 c 是常数，在不同地方代表不同常数.

另一方面，对任意复数 a，结合引理 1，有

$$\begin{aligned}n(r,a)\log\frac{R}{r}&\leqslant\int_{r}^{R}\frac{n(t,a)}{t}\mathrm{d}t\leqslant\nu N(R,a)\leqslant\\&\nu T(R,\omega)+O(1)\leqslant\nu U(X)+O(1)=\\&\nu(1+o(1))U(x)\end{aligned}$$

此处

$$R=1-\frac{1}{X}=1-\frac{1}{x+x\rho^2(x)}=\frac{\rho^2(x)+r}{1+\rho^2(x)}\qquad x=\frac{1}{1-r}$$

则：

$$\log\frac{R}{r}=\log\left[1+\frac{\rho^2(x)(1-r)}{r(1+\rho^2(x))}\right]=\left(\frac{\rho^2(x)(1-r)}{r(1+\rho^2(x))}\right)(1-o(1))$$

$$\log n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)<\log\left(\frac{1}{1-r}U\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)+2\log\frac{1}{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)}+O(1)$$

结合引理 1，所以有

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\log n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{\log\left(\frac{1}{1-r}U\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)}\leqslant 1$$

综上所述，对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\forall a\in\overline{C}$，至多除去 2ν 个例外值，有

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\log n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{\log\left(\frac{1}{1-r}U\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)}=1$$

注 1　推论 1 证实了在条件 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{T(r, \omega)}{\log\dfrac{1}{1-r}}=\infty$ 下，$\omega(z)$ 关于 $\dfrac{1}{1-r}U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$ 的 Bore 点的存在性，即文献[9] 中的定理，且其强 Bore 点一定是其关于 $\dfrac{1}{1-r}U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$ 的 Bore 点.

参考文献：

[1] TODA N. Sur Les Directions de Julia et de Borel Des Fonctions Algebroides [J]. Nagoya Math J，1969，34：1－23.

[2] 吕以辇，顾永兴. 关于代数体函数的 Borel 方向的存在性 [J]. 科学通报，1983，28(5)：264－266.

[3] 张洪申，葛玉丽. 单位圆内无穷级亚纯函数的 Borel 点 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(10)：25－28.

[4] 陈特为. 代数体函数的强 Borel 方向 [J]. 华南师范大学学报(自然科学版)，1990(1)：32－38.

[5] 陈特为. 无穷级代数体函数的强 Borel 方向 [J]. 华南师范大学学报(自然科学版)，1994(4)：70－76.

[6] 甘会林，孙道椿. 零级代数体函数的强 Borel 方向 [J]. 数学物理学报(A 辑)，2005，25(5)：673－677.

[7] 何育赞，萧修治. 代数体函数与常微分方程 [M]. 北京：科学技术出版社，1988：87－102.

[8] 孙道椿. 单位圆内半纯函数的 Nevanlinna 点的存在性定理 [J]. 武汉大学学报(理学版)，1984(2)：3－12.

[9] 柳学坤. 单位圆内代数体亚纯函数 Borel 点的存在性定理 [J]. 湖北科技学院学报，1992，12(3)：179－187.

[10] 张洪申，孙道椿. 关于单位圆内代数体函数的 Borel 点 [J]. 数学物理学报，2011，31(6)：1512－1516.

On Maximality Borel Point of Algebroidal Function in Unit Disk

ZHANG　Jin

Department of Mathematics，De Hong Teacher Training College，Mangshi Yunnan 678400，China

Abstract：The problem has been discussed about existence of maximality Borel points of algebroidal function with certain condition in unit disk，and about the gained algebroidal function with this condition in unit disk which must posses maximality Borel points，and derived maximality Borel point which must be it's Borel point，by founding relationship between the counting function of values in angular domain and form function of algebroidal function.

Key words：algebroidal function；unit disk；maximality Borel point；form function

责任编辑　廖　坤