

一类非局部问题的多解性^①

李红英

西华师范大学 数学与信息学院, 四川 南充 637002; 遵义师范学院 数学与计算科学学院, 贵州 遵义 563002

摘要: 研究了如下非局部问题:

$$\begin{cases} -\left(a-b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u=\lambda u^p & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geq 3)$ 是一个非空有界区域, $a,b,\lambda>0, 0<p<1$ 为参量. 利用山路引理, 获得了该问题的 2 个非平凡解.

关键词: 非局部问题; 非平凡解; 山路引理

中图分类号: O176.3

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2017)06-0024-04

考虑如下非局部问题:

$$\begin{cases} -\left(a-b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u=\lambda u^p & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geq 3)$ 是一个非空有界区域, $a,b,\lambda>0, 0<p<1$ 为参量.

当 $1<p<2^*-1$ 时, 文献[1]研究了问题(1)非平凡解的存在性, 这里 $2^*=\frac{2N}{N-2}$ 为临界指数. 据

我们查阅的文献资料显示, 文献[1]是首次研究问题(1)的文献.

近 10 年来, 许多作者研究了如下非局部问题:

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u=f(x,u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

其中 $f:\Omega\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ 为满足一定条件的函数. 问题(2)被称为 Kirchhoff 型问题. 该问题源于 1883 年, Kirchhoff 在研究可伸缩自由振动弦的经典 D'Alembert 波动方程中提出了如下实际存在的方程^[2]:

$$u_{tt}-\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u=f(x,u)$$

关于问题(2)的研究已经有大量的结果(见文献[3-11]及其参考文献).

受文献[1]的启发, 我们研究问题(1)解的存在性. 定义 I_{λ} 为问题(1)对应的能量泛函, 即

$$I_{\lambda}(u)=\frac{a}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx-\frac{b}{4}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)^2-\frac{\lambda}{p+1}\int_{\Omega}|u|^{p+1} dx$$

如果 u 满足

$$\left(a-b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\int_{\Omega}(\nabla u,\nabla\varphi)dx-\lambda\int_{\Omega}u^p\varphi dx=0 \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$$

① 收稿日期: 2016-07-12

基金项目: 贵州省科学技术基金项目(LH[2015]7049); 西华师范大学科研启动基金项目(16E014).

作者简介: 李红英(1984-), 女, 四川南充人, 讲师, 主要从事数理统计与非线性分析的研究.

则称 $u \in H_0^1(\Omega)$ 为问题(1)的解. 其中 $H_0^1(\Omega)$ 为 Sobolev 空间, 其范数为

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

记

$$|u|_s = \left(\int_{\Omega} |u|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}$$

为空间 $L^s(\Omega)$ ($1 < s < \infty$) 的范数. 定义 S 为

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}} \quad (3)$$

根据文献[1]中引理 2.2 的证明, 我们可以获得如下重要的引理:

引理 1 对任意的 $c < \frac{a^2}{4b}$, 泛函 I_{λ} 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中满足 $(PS)_c$ 条件.

证 假设 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ 是泛函 I_{λ} 的 $(PS)_c$ 序列, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时有:

$$I_{\lambda}(u_n) \rightarrow c \quad I'_{\lambda}(u_n) \rightarrow 0 \quad (4)$$

依据文献[1]中引理 2.2 的证明, 我们只需证明 $\{u_n\}$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中有界即可. 依据 Hölder 不等式和(3)式, 可得

$$\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \leq |\Omega|^{\frac{2^*-p-1}{2^*}} |u|_{2^*}^{p+1} \leq |\Omega|^{\frac{2^*-p-1}{2^*}} S^{-\frac{p+1}{2}} \|u\|^{p+1} \quad (5)$$

根据(4)式和(5)式以及 $\lambda > 0$, 可以推得

$$\begin{aligned} 1 + c + o(1) \|u_n\| &\geq I_{\lambda}(u_n) - \frac{1}{4} \langle I'_{\lambda}(u_n), u_n \rangle = \\ &= \frac{a}{4} \|u_n\|^2 - \frac{\lambda(3-p)}{4(p+1)} \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx \geq \\ &= \frac{a}{4} \|u_n\|^2 - \frac{\lambda(3-p)}{4(p+1)} |\Omega|^{\frac{2^*-p-1}{2^*}} S^{-\frac{p+1}{2}} \|u_n\|^{p+1} \end{aligned}$$

由于 $0 < p < 1$, 则 $\{u_n\}$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 引理 1 证毕.

下面我们给出本文的主要结果及其证明:

定理 1 假设 $a, b > 0$, $0 < p < 1$, 则存在正常数 $\lambda^* > 0$, 使得对一切的 $0 < \lambda < \lambda^*$, 问题(1)至少存在 2 个非平凡解.

证 我们分以下两步来完成定理 1 的证明:

步骤 1 证明问题(1)存在一个局部极小解 u_* 且 $I_{\lambda}(u_*) < 0$.

我们断言: 存在 $\lambda^*, R, \rho > 0$, 使得对任意的 $0 < \lambda < \lambda^*$, 有:

$$I_{\lambda}(u) |_{u \in S_R} \geq \rho \quad \inf_{u \in B_R} I_{\lambda}(u) < 0$$

其中 $B_R = \{u \in H_0^1(\Omega): \|u\| \leq R\}$ 为闭球, $S_R = \{u \in H_0^1(\Omega): \|u\| = R\}$ 为球面. 从而, 由(5)式可得

$$\begin{aligned} I_{\lambda}(u) &= \frac{a}{2} \|u\|^2 - \frac{b}{4} \|u\|^4 - \frac{\lambda}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \geq \\ &= \frac{a}{2} \|u\|^2 - \frac{b}{4} \|u\|^4 - \lambda |\Omega|^{\frac{2^*-p-1}{2^*}} S^{-\frac{p+1}{2}} \|u\|^{p+1} = \\ &= \|u\|^{p+1} \left(\frac{a}{2} \|u\|^{1-p} - \frac{b}{4} \|u\|^{3-p} - \lambda |\Omega|^{\frac{2^*-p-1}{2^*}} S^{-\frac{p+1}{2}} \right) \end{aligned}$$

对任意的 $t > 0$, 令

$$g(t) = \frac{a}{2} t^{1-p} - \frac{b}{4} t^{3-p} - \lambda |\Omega|^{\frac{2^*-p-1}{2^*}} S^{-\frac{p+1}{2}}$$

则

$$g'(t) = t^{-p} \left[\frac{a(1-p)}{2} - \frac{b(3-p)}{4} t^2 \right]$$

令 $g'(t) = 0$, 我们很容易得到 $t_{\max} = \sqrt{\frac{2a(1-p)}{b(3-p)}}$, 使得

$$\max_{t>0} g(t) = g(t_{\max}) = \frac{a}{3-p} \left[\frac{2a(1-p)}{b(3-p)} \right]^{\frac{1-p}{2}} - \lambda |\Omega|^{\frac{2^*-p-1}{2^*}} S^{-\frac{p+1}{2}}$$

取:

$$R = \sqrt{\frac{2a(1-p)}{b(3-p)}} \\ \lambda^* = \frac{aS^{\frac{p+1}{2}}}{(3-p) |\Omega|^{\frac{2^*-p-1}{2^*}} \left[\frac{2a(1-p)}{b(3-p)} \right]^{\frac{1-p}{2}}}$$

从而存在 $\rho > 0$, 使得 $I_\lambda(u) |_{u \in S_R} \geq \rho$. 固定 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ 且 $u_0 \neq 0$, 可得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I_\lambda(tu_0)}{t^{p+1}} = -\frac{\lambda}{p+1} \int_\Omega |u_0|^{p+1} dx < 0$$

因此, 当 $\|u\|$ 充分小时, 有 $\inf_{u \in B_R} I_\lambda(u) < 0$. 从而, 我们的断言成立. 不妨记 $m = \inf_{u \in B_R} I_\lambda(u)$. 对于极小值 m , 存在极小化序列 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(u_n) = m$. 进一步, 根据文献[12]中的命题 9, 可知极小化序列 $\{u_n\}$ 中可抽取子列, 不妨仍记为 $\{u_n\}$, 使得 $\{u_n\}$ 为泛函 I_λ 的 $(PS)_m$ 序列. 从而, 根据引理 1, 可得存在 $u_* \in H_0^1(\Omega)$, 使得在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n \rightarrow u_*$. 即 $I_\lambda(u_*) = m < 0$. 因此, u_* 是问题(1) 的局部极小解.

步骤 2 证明问题(1) 存在一个山路解 u_{**} .

对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 固定 $u \in H_0^1(\Omega)$ 且 $u \neq 0$, 由 $0 < p < 1$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 可得

$$I_\lambda(u) = \frac{a}{2} \|u\|^2 t^2 - \frac{b}{4} \|u\|^4 t^4 - \frac{\lambda |t|^{p+1}}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1} dx \rightarrow -\infty$$

因此, 存在 $e \in H_0^1(\Omega)$ 且 $\|e\| > R = \sqrt{\frac{2a(1-p)}{b(3-p)}}$, 使得 $I_\lambda(e) < 0$. 记

$$c_0 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I_\lambda(\gamma(t))$$

其中

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H_0^1(\Omega)): \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

从而, 根据山路引理, 存在序列 $\{v_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $I_\lambda(v_n) \rightarrow c_0$ 且 $I'_\lambda(v_n) \rightarrow 0$. 即 $\{v_n\}$ 为泛函 I_λ 的 $(PS)_{c_0}$ 序列. 我们断言 $c_0 < \frac{a^2}{4b}$. 事实上, 对上述的 $e \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\max_{t \in [0, 1]} I_\lambda(te) = \max_{t \in [0, 1]} \left(\frac{a}{2} \|e\|^2 t^2 - \frac{b}{4} \|e\|^4 t^4 - \frac{\lambda |t|^{p+1}}{p+1} \int_\Omega |e|^{p+1} dx \right) < \\ \max_{t \in [0, 1]} \left(\frac{a}{2} \|e\|^2 t^2 - \frac{b}{4} \|e\|^4 t^4 \right) \leq \frac{a^2}{4b}$$

根据引理 1, 存在 $u_{**} \in H_0^1(\Omega)$, 使得在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $v_n \rightarrow u_{**}$. 即

$$I_\lambda(u_{**}) = c_0 > \rho$$

因此, u_{**} 是问题(1) 的一个山路解. 定理 1 证毕.

参考文献:

- [1] YIN G S, LIU J S. Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for a Nonlocal Problem [J]. Bound Value Probl, 2015, 2015(1): 1-7.
- [2] KIRCHHOFF G. Vorlesungen Über Mechanik [M]. Leipzig: Teubner, 1883.
- [3] MA T F, RIVERA J E M. Positive Solutions for a Nonlinear Nonlocal Elliptic Transmission Problem [J]. Appl Math Lett, 2003, 16(2): 243-248.

[4] ZHANG Z T, PERERA K. Sign Changing Solutions of Kirchhoff Type Problems Via Invariant Sets of Descent Flow [J]. J Math Anal Appl, 2006, 317(2): 456—463.

[5] HE X M, ZOU W M. Infinitely Many Solutions for Kirchhoff-Type Problems [J]. Nonlinear Anal, 2009, 70: 1407—1414.

[6] ALVES C O, CORRÊA F J S A, FIGUEIREDO G M. On a Class of Nonlocal Elliptic Problems with Critical Growth [J]. Differential Equation and Applications, 2010, 2(2): 409—417.

[7] ANELLO G. A Uniqueness Result for a Nonlocal Equation of Kirchhoff Type and Some Related Open Problems [J]. J Math Anal Appl, 2011, 373(1): 248—251.

[8] 丁 瑶, 廖家锋. 一类带临界指数的非齐次 Kirchhoff 型方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(12): 17—21.

[9] 任正娟, 商彦英. 带有临界指数的 Kirchhoff 方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(4): 78—84.

[10] 安育成, 索洪敏. 一类分数阶 Kirchhoff 型方程无穷多解的存在性 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2015, 38(3): 345—350.

[11] LIAO J F, KE X F, LEI C Y, et al. A Uniqueness Result for Kirchhoff Type Problems with Singularity [J]. App Math Lett, 2016, 59: 24—30.

[12] WU T F. On Semilinear Elliptic Equation Involving Concave-Convex Nonlinearities and Sign-Changing Weight Function [J]. J Math Anal Appl, 2006, 318(1): 253—270.

On Multiplicity of Solutions for a Class of Nonlocal Problem

LI Hong-ying

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan 637002, China;
School of Mathematics and Computational Science, Zunyi Normal College, Zunyi Guizhou 563002, China

Abstract: The following nonlocal problem is considered:

$$\begin{cases} -\left((a-b)\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx\right)\Delta u=\lambda u^p & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

where $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geqslant3)$ is a smooth bounded domain, $a,b,\lambda>0, 0<p<1$ are parameters. By the Mountain Pass Lemma, the existence of two nontrivial solutions is obtained.

Key words: nonlocal problem; nontrivial solution; Mountain Pass Lemma

责任编辑 廖 坤