第 42 卷　第 6 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2017 年 6 月
Vol. 42　No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun.　2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.06.006

凸体的最小 Logarithmic 函数[①]

夏落燕[1]，　曾春娜[2]

1. 重庆人文科技学院 数学系，重庆 合川 401524；2. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331

摘要： 为了解决 Logarithmic Minkowski 问题，已对球面上的任意有限偶 Borel 测度引入了 Logarithmic 函数. 考虑单位球面上旋转不变概率测度的 Logarithmic 函数，并考虑它的最小值问题.

关　键　词： Logarithmic 函数；凸体；最小平均宽度

中图分类号：O186.5　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000 - 5471(2017)06 - 0028 - 04

凸体是凸几何分析的重要研究对象之一，凸几何分析的核心理论是 Brunn-Minkowski 理论，凸体的平均宽度是Brunn-Minkowski理论中的重要概念[1]. Giannopoulos 和 Milman 定义了最小平均宽度，并给出了凸体有最小平均宽度的充要条件[2]. 20 世纪，凸几何分析取得了长足的发展，经典的 Brunn-Minkowski 理论发展为 L_p-Brunn-Minkowski 理论($p \geqslant 1$). 文献[3] 将文献[2] 的部分结果推广到 L_p 空间，定义了最小 L_p 平均宽度，并给出了它的充要条件.

为了解决著名的 Logarithmic Minkowski 问题，文献[4] 对球面上的任意有限偶 Borel 测度引入了 Logarithmic 函数. 本文考虑球面上旋转不变的概率测度的 Logarithmic 函数，定义了凸体的最小 Logarithmic 函数，受文献[2] 思想的启发，我们得到了凸体有最小 Logarithmic 函数的必要条件.

1　预备知识

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中具有非空内点的紧致凸集称为凸体，设 $\mathscr{K}^n$ 表示欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中所有凸体构成的集合，$\mathscr{K}_o^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点在其内部的凸体. 设 S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面，单位球记为 B. n 维单位球 B 的体积记为 ω_n. 设 $GL(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一般线性变换群，$SL(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的特殊线性变换群. 设 $T \in GL(n)$，T^t 表示线性变换 T 的转置.

凸体 K 的支持函数 h_K 定义为

$$h_K(u) = \max\{\langle u, x\rangle : x \in K\} \qquad u \in S^{n-1}$$

其中$\langle u, x\rangle$ 表示 u 和 x 的标准内积. 支持函数二阶可导的凸体称为足够光滑凸体[2]. 对任意的 $T \in GL(n)$，$h_{TK}(x) = h_K(T^t x)$(参见文献[5]). 设 $K \in \mathscr{K}_o^n$，u(其中 $u \in S^{n-1}$) 方向的宽度为

$$w(K, u) = h_K(u) + h_K(-u)$$

凸体 K 的平均宽度 $w(K)$ 定义为

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} w(K, u)\sigma(\mathrm{d}u) = 2\int_{S^{n-1}} h_K(u)\sigma(\mathrm{d}u)$$

---

① 收稿日期：2016 - 09 - 06

基金项目：国家自然科学基金数学天元基金项目(11326073)；重庆市基础与前沿研究项目(cstc2014jcyjA00019)；重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500312).

作者简介：夏落燕(1987 -)，女，安徽安庆人，讲师，主要从事几何不等式的研究.

其中 σ 是 S^{n-1} 上旋转不变的概率测度．若对任意的 $T \in SL(n)$，均有 $w(K) \leqslant w(TK)$ 成立，则称凸体 K 具有最小平均宽度．文献[2] 证明了下列结论：设 $K \in \mathscr{K}_o^n$ 且足够光滑，则 K 有最小平均宽度当且仅当

$$\int_{S^{n-1}} h_K(u)\langle u, \theta\rangle^2 \sigma(\mathrm{d}u) = \frac{w(K)}{2n}$$

凸体 K 在 u 方向的 p(其中 $u \in S^{n-1}$ 且 $p \geqslant 1$) 宽度为

$$w_p(K, u) = h_K(u)^p + h_K(-u)^p$$

凸体 K 的 p 平均宽度 $w_p(K)$ 定义为

$$w_p(K) = \int_{S^{n-1}} w_p(K, u)\sigma(\mathrm{d}u) = 2\int_{S^{n-1}} h_K{}^p(u)\mathrm{d}\sigma(u)$$

若对任意的 $T \in SL(n)$，均有 $w_p(K) \leqslant w_p(TK)$ 成立，则称凸体 K 具有最小平均宽度．文献[3] 证明了下列结论：设 K 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中足够光滑的凸体，则 K 具有最小 p 平均宽度当且仅当

$$\int_{S^{n-1}} h_K(u)^p \langle u, \theta\rangle^2 \sigma(\mathrm{d}u) = \frac{w_p(K)}{2n}$$

设 f 是 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上的实函数，令 $\hat{f}$ 表示 f 限制到单位球面 S^{n-1} 上的函数．当 F 是定义在 S^{n-1} 的函数时，F 的径向扩张到 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的函数 f 为

$$f(x) = F\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

设 F 是 S^{n-1} 上的二次可微函数，定义[2]：

$$\Delta_o F = (\widehat{\Delta f}) \qquad \nabla_o F = (\widehat{\nabla f}) \tag{1}$$

其中 f 是 F 的径向扩张．算子 Δ_o 称为 Laplace-Beltrami 算子，∇_o 称为梯度．由 Green 公式可得[2]

$$\int_{S^{n-1}} F\Delta_o G = \int_{S^{n-1}} G\Delta_o F = -\int_{S^{n-1}} \langle \nabla_o F, \nabla_o G\rangle \tag{2}$$

2　主要结果

文献[4] 为解决 Logarithmic Minkowski 问题引入了下列 Logarithmic 泛函：设 μ 是 S^{n-1} 上的有限偶的 Borel 测度，定义 Φ_μ：$\mathscr{K}_o^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\Phi_\mu(K) = \int_{S^{n-1}} \log h_K(u)\mu(\mathrm{d}u)$$

Logarithmic 泛函 Φ_μ 是解决 Logarithmic Minkowski 问题的关键量．

本文中，我们考虑 μ 是 S^{n-1} 的上旋转不变的概率测度 σ．设 $K \in \mathscr{K}_o^n$，定义凸体 K 的 Logarithmic 函数为

$$\Phi(K) = \int_{S^{n-1}} \log h_K(u)\sigma(\mathrm{d}u)$$

其中 σ 是 S^{n-1} 上旋转不变的概率测度．进一步，若对任意的 $T \in SL(n)$，都有 $\Phi(K) \leqslant \Phi(TK)$，则称凸体 K 具有最小 Logarithmic 函数．即对任意的 $T \in \mathrm{SL}(n)$，有

$$\int_{S^{n-1}} \log\left(\frac{h_K(T^t u)}{h_K(u)}\right)\sigma(\mathrm{d}u) \geqslant 0 \tag{3}$$

为了得到凸体的最小 Logarithmic 函数的必要条件，我们需要下列几个引理：

引理 1　欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中足够光滑的凸体 K 具有最小 Logarithmic 函数，则对任意的 $T \in \mathrm{GL}(n)$，有

$$\int_{S^{n-1}} h_K^{-1}(u)\langle \nabla h_K(u), Tu\rangle \sigma(\mathrm{d}u) = \frac{\mathrm{tr}\, T}{n} \tag{4}$$

证　令 $T \in \mathrm{GL}(n)$ 且 $\varepsilon > 0$ 足够小．由于

$$\frac{(I+\varepsilon T)^t}{[\det(I+\varepsilon T)]^{\frac{1}{n}}} \in SL(n)$$

根据最小 Logarithmic 函数的定义得

$$\int_{S^{n-1}} \log h_K(u+\varepsilon Tu)\sigma(\mathrm{d}u) \geqslant \int_{S^{n-1}} \log([\det(I+\varepsilon T)]^{\frac{1}{n}} h_K(u))\sigma(\mathrm{d}u) = \log[\det(I+\varepsilon T)]^{\frac{1}{n}} + \int_{S^{n-1}} \log h_K(u)\sigma(\mathrm{d}u) \tag{5}$$

因为

$$\log h_K(u+\varepsilon Tu) = \log h_K(u) + \varepsilon h_K^{-1}(u)\langle \nabla h_K(u), Tu\rangle + O(\varepsilon^2)$$

和

$$\log[\det(I+\varepsilon T)]^{\frac{1}{n}} = \varepsilon \frac{\mathrm{tr}\ T}{n} + O(\varepsilon^2)$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，可得

$$\int_{S^{n-1}} h_K^{-1}(u)\langle \nabla h_K(u), Tu\rangle\sigma(\mathrm{d}u) \geqslant \frac{\mathrm{tr}\ T}{n} \tag{6}$$

在(6)式中用 $-T$ 替换 T，可知(4)式对一切 $T \in \mathrm{GL}(n)$ 均成立.

引理2 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中足够光滑的凸体. 令

$$I_K(\theta) = \int_{S^{n-1}} h_K^{-1}(u)\langle \nabla h_K(u), u\rangle\langle u, \theta\rangle\sigma(\mathrm{d}u) \qquad \theta \in S^{n-1} \tag{7}$$

则对任意的 $\theta \in S^{n-1}$，有

$$\Phi(K) + I_K(\theta) = n\int_{S^{n-1}} \log h_K(u)\langle u, \theta\rangle^2\sigma(\mathrm{d}u) + \int_{S^{n-1}} \langle u, \theta\rangle^2\sigma(\mathrm{d}u) \tag{8}$$

证 令 $\theta \in S^{n-1}$，并且考虑函数

$$f(x) = \frac{\langle x, \theta\rangle^2}{2}$$

由(1)式可得

$$(\nabla_o \hat{f})(u) = \langle u, \theta\rangle\theta - \langle u, \theta\rangle^2 u \tag{9}$$

和

$$(\Delta_o \hat{f})(u) = 1 - n\langle u, \theta\rangle^2 \tag{10}$$

直接计算得

$$(\nabla_o \log \hat{h}_K)(u) = h_K^{-1}(u)\nabla h_K(u) - u \qquad u \in S^{n-1}$$

根据(9)式和 $h_K(u) = \langle \nabla h_K(u), u\rangle$，我们得

$$\langle (\nabla_o \hat{f})(u), (\nabla_o \log \hat{h}_K)(u)\rangle = h_K^{-1}(u)\langle \nabla h_K(u), \theta\rangle\langle u, \theta\rangle - \langle u, \theta\rangle^2 \tag{11}$$

将(11)式在球面上积分，并利用 Green 公式(2)，可得

$$I_K(\theta) - \int_{S^{n-1}} \langle u, \theta\rangle^2\sigma(\mathrm{d}u) = -\int_{S^{n-1}} \log h_K(u)(\Delta_o \hat{f})(u)\sigma(\mathrm{d}u) \tag{12}$$

由(10)式知(12)式的右端等价于

$$-\Phi(K) + n\int_{S^{n-1}} \log h_K(u)\langle u, \theta\rangle^2 \mathrm{d}\sigma(\mathrm{d}u) \tag{13}$$

由(12)式和(13)式得(8)式.

利用引理1和引理2得到下列凸体具有最小 Logarithmic 函数的必要条件:

定理1 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中足够光滑的凸体 K 具有最小 Logarithmic 函数，则

$$\int_{S^{n-1}} \log h_K(u)\langle u, \theta\rangle^2\sigma(\mathrm{d}u) = \frac{\Phi(K)}{n} \tag{14}$$

其中 $\theta \in S^{n-1}$.

证 不难发现，当(4)式对任意 $T \in \mathrm{GL}(n)$ 成立时，则对任意的 $\theta \in S^{n-1}$，有

$$I_K(\theta) = \frac{1}{n} \tag{15}$$

因为 σ 是 S^{n-1} 上的概率测度，所以

$$\int_{S^{n-1}} \langle u, \theta \rangle^2 \sigma(\mathrm{d}u) = \frac{1}{n} \tag{16}$$

根据引理 1、引理 2、(15) 和(16) 式可得(14) 式.

参考文献：

[1] SCHNEIDER R. Convex Bodies：The Brunn-Minkowski Theory [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2014.

[2] GIANNOPOULOS A A，MILMAN V D. Extremal Problems and Isotropic Positions of Convex Bodies [J]. Israel J Math，2000，117(1)：29－60.

[3] YUAN J，LENG G，CHEUNG W. Convex Bodies with Minimal p-Mean Width [J]. Houston J Math，2010，36(2)：499－511.

[4] BÖRÖZKY K，LUTWAK E，YANG D，et al. The Logarithmic Minkowski Problem [J]. J Amer Math Soc，2013，26(3)：831－852.

[5] GARDNER R J. Geometric Tomography [M]. Cambridge：Cambridge Univ Press，1995.

On Minimal Logarithmic Function of Convex Bodies

XIA Luo-yan[1]，　ZENG Chun-na[2]

1. *Department of Mathematics，Chongqing College of Humanities，Science & Technology，Hechuan Chongqing 401524，China*；

2. *College of Mathematics Science，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China*

Abstract：In order to solve the Logarithmic Minkowski problem，the Logarithmic functional of finite even Borel measure on sphere was introduced. In this paper，the Logarithmic functional of rotationally invariant probability measure on sphere has been discussed and the minimal Logarithmic function has been studied.

Key words：Logarithmic function；convex body；minimal mean width

责任编辑　廖　坤