第 42 卷　第 6 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2017 年 6 月
Vol. 42　No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun.　2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.06.028

分块矩阵在线性代数中的应用及其教学方法探讨[①]

江　蓉，　王守中

广东石油化工学院 理学院，广东 茂名 525000

摘要：线性代数在理论和现实生活中有着非常广泛的应用. 该课程的教学内容多，课时数较少，而且该课程中大量的内容与矩阵和线性方程组相关. 分块矩阵是其中的一个重要教学内容，它可将线性代数的众多知识点联系起来. 重点讨论了分块矩阵在线性代数中的应用，也探讨了关于这个知识点的教学方法.

关　键　词：线性代数；分块矩阵；行列式；教学方法

中图分类号：G642.41　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000-5471(2017)06-0167-05

线性代数的应用很广，该课程的特点是内容抽象、知识点多，但课时少，教师受制于课程的学时数，无法深入地讲解，导致学生学习该课程时困难重重. 矩阵是线性代数中开展研究的最重要的载体之一，它将线性代数的众多知识点联系起来，分块矩阵[1] 是其重要的组成部分. 分块矩阵可使许多复杂问题迅速简单化. 如果教师将关于分块矩阵的内容开展得当，可节约宝贵的教学时间，使教师的教学既深入又广泛，亦可使学生能更好地掌握相关知识. 本文从分块矩阵在线性代数中的应用及教学法两个方面进行讨论.

1　分块矩阵在线性代数中的应用

1.1　利用分块矩阵计算高阶行列式

定理 1[2]　设矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 为 $m+n$ 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 分别为 m 阶与 n 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $n\times m$ 矩阵，则：

(i) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，有 $|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$；

(ii) 当 $\boldsymbol{D}$ 可逆时，有 $|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|\cdot|\boldsymbol{D}|$.

定理 2[2]　(i) 设矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 为 $m+n$ 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 m 阶与 n 阶方阵，$\boldsymbol{O}$ 为 $n\times m$ 零矩阵，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{C}|$；

(ii) 设矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 为 $m+n$ 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 m 阶和 n 阶方阵，$\boldsymbol{O}$ 为 $m\times n$ 零矩阵，$\boldsymbol{D}$ 为 $n\times m$ 矩阵，则 $|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{C}|$.

① 收稿日期：2016-03-01
作者简介：江　蓉(1970-)，女，广东茂名人，副教授，主要从事图论及教学法的研究.

定理 3[2]　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

借助这些已知的关于分块矩阵行列式计算的公式，可方便地求出许多高阶行列式的结果，比用行列式的性质及按行(列)展开的方法计算更简单. 下面探讨一些典型的实例.

例 1　计算 4 阶行列式 $|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解

记 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，其中：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

显然，$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，则根据定理 1(i) 可知

$$|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

事实上，$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，也可以用定理 1(ii) 计算此例，两种解法的计算量和难易程度相当.

例 2　计算 4 阶行列式 $|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解

记 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，其中：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

则根据定理 2(i) 可知

$$|\boldsymbol{P}| = (-1)^{2\times 2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

例 3　计算 4 阶行列式 $|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

解

记：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} y & z \\ z & y \end{pmatrix}$$

则 $|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}$. 根据定理 3 可知

$$|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} y & x+z \\ x+z & y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -y & x-z \\ x-z & -y \end{vmatrix} = [y^2-(x+z)^2] \cdot [y^2-(x-z)^2]$$

1.2　利用分块矩阵计算高阶方阵的逆矩阵

用矩阵的初等变换尤其是用公式 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^*$（$\boldsymbol{A}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵）求高阶方阵的逆矩阵，计算量很大. 求一些特殊类型方阵的逆矩阵时，利用分块矩阵可大幅地减少计算量.

定理 4[3]　(i) 设矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 是四分块方阵，其中 $\boldsymbol{B}$ 为 r 阶方阵，$\boldsymbol{C}$ 为 k 阶方阵，当 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}B^{-1}\boldsymbol{A}$ 都是可逆矩阵时，则 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1} \end{pmatrix}$$

(ii) 设矩阵 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 是四分块方阵，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 r 阶方阵，$\boldsymbol{D}$ 为 k 阶方阵，当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵时，则 $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵，且

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} \\ -(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} \end{pmatrix}$$

特别地，当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 都可逆时，有

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{pmatrix}$$

例 4　求方阵 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

记 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，其中：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

显然：

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

则根据定理 4(ii) 可知

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & -13 & -32 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 13 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3　利用分块矩阵证明有关矩阵的秩的问题

线性代数中关于矩阵的秩问题的证明方法很多，借助分块矩阵的秩的相关性质可使得相关的证明过程极大地简化.

定理5[4]　$\mathrm{R}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$；$\mathrm{R}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

例5　如果 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证　证法一

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0})$，即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{0}\qquad i=1,2,\cdots,l$$

这说明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 l 个列向量都是齐次线性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 记方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集为 S，由 $\boldsymbol{b}_i\in S$ 可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)\leqslant \mathrm{R}_S$，即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{R}_S$. 根据齐次线性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集 S 的秩与其系数矩阵的秩的关系可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}_S=n$，故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$. 证毕.

证法二

因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-\boldsymbol{A}r_2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-c_1\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

故

$$\mathrm{R}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{R}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=n$$

由定理5可知

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant \mathrm{R}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=n$$

证毕.

证法一利用了向量组的秩与矩阵的秩间的关系，以及齐次方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集 S 的秩与其系数矩阵的秩间的关系来证明结论，且必须把 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$ 理解为 l 个齐次线性方程的集合，涉及到的知识点比较多而且证明过程比较繁琐. 证法二利用分块矩阵的性质，证法更简洁.

2　分块矩阵的教学方法的探讨

矩阵是线性代数中最重要的概念之一，是研究线性代数各类问题的载体，它是线性代数中与其它知识点关联度最高的概念，无论研究矩阵的秩、线性方程组的解、求方阵的逆矩阵，或是研究向量组的线性相关性等重点内容时，都必须以矩阵为平台. 但对于行数列数比较高的矩阵，用常见的方法来处理计算量较大，借助分块矩阵，往往会使得一些问题的解决过程大大简化. 分块矩阵不仅在线性代数中有重要作用，在数学专业学生必修的《高等代数》教材中，对相关的内容也有较深入的探讨[5]，这也体现了分块矩阵的重要性，因此这个知识点的教学方法值得教师去深入探讨. 教师应该做到以下这几点：

① 深挖分块矩阵这个概念的本质. 要向学生强调一个重要的事实：分块矩阵并不是真的改变了原有的矩阵，只是使其形式上简单化.

② 国内线性代数教材的教学体系基本上都是：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型. 显然，关于矩阵和分块矩阵的学习次序较行列式晚，因而在教学实践中，可将分块矩阵在计算高阶行列式的应用的讲授，放在习题课或期末复习课更恰当. 国外的线性代数教材[6]，教学内容体系与我国的体系次序上有很大的差别，它首先介绍线性方程组与矩阵，之后再介绍行列式. 这样的体系，在学习高阶行列式的计算时，可直接利用分块矩阵的相关结论，知识点的衔接非常自然. 因而，教师在教学实践中，可以自行调整教学内容的次序，也可以获得良好的教学效果.

③ 利用分块矩阵的性质计算一些类型的高阶行列式和求逆矩阵以及证明矩阵的秩的性质时，比常规的解决问题的方法更简洁、有效，可将典型性的例题穿插在教学环节中，开阔学生的视野，激发学生的学习兴趣.

④ 很多与分块矩阵相关的定理有适用范围，不能适用于所有的类型，因而在教学实践中，教师需要把握好各个教学环节的时间分配，避免造成喧宾夺主的情形. 但这不意味着分块矩阵无关紧要，它的作用不可替代.

参考文献：

[1] 同济大学数学系. 线性代数 [M]. 6 版. 北京：高等教育出版社，2014：1－109.

[2] 张　燕. 分块矩阵行列式的性质及其应用 [J]. 高等函授学报(自然科学版)，2010，23(6)：31－33.

[3] 徐天保. 分块矩阵的应用 [J]. 安庆师范学院学报(自然科学版)，2010，16(2)：106－109.

[4] 严坤妹. 分块矩阵的应用 [J]. 福建广播电视大学学报，2006(5)：71－73.

[5] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数 [M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，1988：1－202.

[6] STEVEN J L. Linear Algebra with Applications [M]. 8 版. 北京：机械工业出版社，2014：1－98.

[7] 江　蓉，周　敏. 素质教育背景下提高大学数学课堂教学质量的若干方法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(4)：176－180.

[8] 江世明，李敬文，江红豆. 图的点可区别边染色猜想的算法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(10)：47－54.

On Applications and Teaching Methods of Block Matrix in Linear Algebra

JIANG　Rong，　WANG Shou-zhong

School of Sciences，Guangdong Institute of Petrochemical Technology，Maoming Guangdong 525000，China

Abstract：Linear algebra is of wide application in the fields of theory and practice. This course has many teaching contents，but not enough class hours. Many contents in the course are relative to matrices and the system of linear equations. The block matrix is an important teaching content in the course，and it can contact with many knowledge points in linear algebra. One focuses on discussing the applications of block matrix in linear algebra and the teaching methods about block matrix.

Key words：linear algebra；block matrix；determinant；teaching methods

责任编辑　廖　坤