

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.07.011

比例微分控制模型在双稳态悬臂梁混沌运动中的实证研究^①

曹 勃

宁波职业技术学院 公共教学部, 浙江 宁波 315800

摘要: 建立了双稳态悬臂梁集中参数模型, 并利用不动点的稳定性理论解释了系统的双稳态特性. 分析了在不同外界激励频率下悬臂梁振动特性. 引入比例微分控制器对悬臂梁的混沌运动进行了控制. 研究表明: 比例微分控制器可以有效地将悬臂梁的混沌运动控制到周期状态, 并且控制器的引入并不影响原系统的稳定性.

关键词: 双稳态; 悬臂梁; 混沌运动; 比例微分控制

中图分类号: TH113.2

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2017)07-0068-07

控制和利用混沌是当年自然科学基础研究的热门课题之一^[1]. 混沌控制的方法有很多种, 如 OGY 方法、连续反馈控制法、自适应控制法等^[2]. 比例微分控制属于连续反馈控制法的范畴, 其优点在于控制器的设计简单、系统响应迅速.

近年来, 混沌控制应用于机械系统领域的报道有很多. 悬臂梁作为一种典型的机械模型, 因其结构简单而被广泛应用, 如力学传感器领域, 微米和纳米级别的悬臂梁能够对微弱信号的高速度和高精度实时检测^[3]. 随着微机电技术的发展, 悬臂梁的应用拓展到压电能量收集器领域. 现有研究大都以悬臂梁作为基础结构, 进行机械振动能量的俘获研究. 相比于传统的电磁式和电容式机械能量收集系统, 压电悬臂梁能量收集器以其结构简单、使用周期长、单位体积俘获能量高而备受研究者关注.

压电悬臂梁俘能结构中具有双稳态特性的压电悬臂梁俘能器系统尤为受人关注. Erturk 等^[4]通过理论分析和实验验证得出了悬臂梁混沌运动时不利于储能的结论, 并证明了悬臂梁在周期运动下输出电压远高于混沌运动; Geiyer 等^[5]在研究中发现, 当悬臂梁振动出现混沌运动时, 俘能效率较低, 而基于 OGY 混沌控制方法得到的周期轨道能够大大地提高俘能效率; Liu 等^[6]将间歇控制运用到受迫 Duffing 方程中, 成功实现了将混沌运动控制到任意周期状态. 因此, 悬臂梁的周期运动才是压电悬臂梁俘能器系统最理想的运动形式.

悬臂梁本身具有许多非线性因素, 因此在受到外界激励时, 悬臂梁振动极易出现混沌运动状态, 而在某些应用领域, 悬臂梁混沌运动形式是不利的, 目前尚未有运用比例微分控制悬臂梁混沌运动的报道.

本文主要研究的是能量收集器基础结构的动力学特性, 并运用比例微分控制器将悬臂梁混沌运动控制到周期状态, 为悬臂梁应用提供了理论指导.

1 悬臂梁动力学模型

1.1 悬臂梁物理模型

图 1 为本文研究的双稳态悬臂梁物理模型示意图. 悬臂梁为均质矩阵梁, 梁的质量为 m_1 , 长度为 L ,

① 收稿日期: 2016-12-09

作者简介: 曹 勃(1973-), 男, 安徽安庆人, 硕士, 副教授, 主要从事应用数学与数学教育研究.

宽度为 b , 厚度为 h . 悬臂梁末端有一个固定的永磁铁, 质量为 m_2 , 与其水平相对的固定端也有一个同样大小的永磁铁, 且永磁铁异性相斥. 本文所研究的悬臂梁只考虑横向振动.

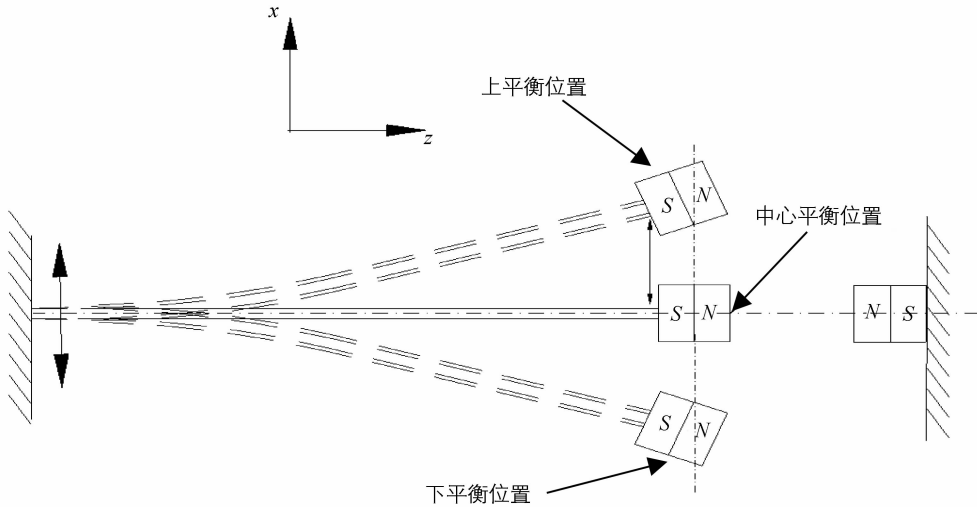


图 1 悬臂梁振动示意图

悬臂梁振动的基本原理为: 悬臂梁固定端受到外界简谐激励作用, 同时在自由端受到非线性磁力的作用. 在外力和磁力的作用下, 悬臂梁呈现出复杂的运动特性.

1.2 悬臂梁动力学数学建模及双稳态特性

1.2.1 悬臂梁数学建模

悬臂梁动力学建模方式主要有集中参数模型^[7]和分布参数模型^[8]2种, 为了便于分析, 本文采用目前比较常用的集中参数模型. 将悬臂梁等效为如图 2 所示的弹簧-质量-阻尼系统.

图 2 中, M 为悬臂梁等效质量, $M = m_2 + 33/140 m_1$, k 和 c 分别表示悬臂梁等效弹性系数和等效阻尼, 其中 $k = 3YI/L^3$, Y 为悬臂梁的杨氏模量, I 为矩阵梁相对于中性层的转动惯量, 其计算公式为 $I = 1/12bh^3$. $x(t)$ 表示悬臂梁末端相对振动位移, 设外界激励为简谐激励, 因此 $\ddot{y} = A\cos(\omega_0 t)$. F 表示末端磁铁相互作用的排斥力, $F = k_1 x + k_2 x^3$. 其具体推导过程参考文献[9].

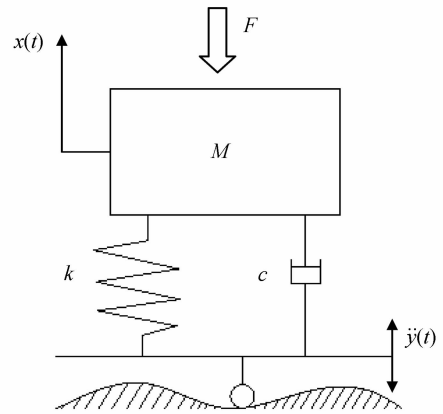


图 2 悬臂梁等效模型

根据牛顿第二定律建立悬臂梁的动力学模型为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - F = -m\ddot{y} \quad (1)$$

引入无量纲尺度变换: $x = lX$, $\tau = \omega t$, 对方程(1) 进行无量纲变换得对应的无量纲方程为

$$\ddot{X} + 2\xi\dot{X} + \alpha X + \beta X^3 = -f\cos(\Omega\tau) \quad (2)$$

其中: $\xi = \frac{c}{2\omega m}$ 为悬臂梁的等效阻尼比, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 为悬臂梁振动的固有频率, $\alpha = \frac{k - k_1}{k}$ 为无量纲线性弹性系数, $\beta = \frac{k_2 l^2}{k}$ 为无量纲非线性弹性系数, $f = \frac{A}{\omega^2 l}$ 为无量纲外界激励加速度幅值, $\Omega = \frac{\omega_0}{\omega}$ 为无量纲外界激励频率.

方程(2) 为典型的受迫型 Duffing 方程, 为了方便数值求解, 令 $X = x_1$, $\dot{X} = x_2$, 将方程(2) 改写为状态空间方程形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\xi x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3 - f\cos(\Omega\tau) \end{cases} \quad (3)$$

1.2.2 系统双稳态特性分析

由于本文研究的悬臂梁具有双稳态特性. 悬臂梁双稳态特性可以利用系统数学模型的不动点稳定性理论来解释. 因此, 需要对方程(3)对应的自治系统进行分析. 方程(3)对应的自治系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\xi x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3 \end{cases} \quad (4)$$

方程(4)对应的 Jocabi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\beta x_1^2 & -2\xi \end{bmatrix} \quad (5)$$

根据不动点的定义 $\dot{x} = 0$, 其中 $x = [x_1, x_2]$. 当 $\alpha < 0$ 时, 可以求得悬臂梁动力系统有如下 2 个不动点: $(0, 0), (\pm \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}, 0)$. 为了方便分析不动点的稳定性, 本文取无量纲参数值 $\alpha = -0.6, \beta = 1.5, \xi = 0.05$.

1) 对于不动点 $(0, 0)$, 将不动点代入 Jocabi 矩阵, 得到

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & -0.1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

它对应的特征方程 $\det(J_1 - \lambda I) = 0$ 为

$$\lambda^2 + 0.1\lambda - 0.6 = 0 \quad (7)$$

解得方程两根为 $\lambda_1 = 0.7262, \lambda_2 = -0.8262$; 根据不动点稳定性判断依据^[10]可知, 当特征方程两根中有一个为正时, 不动点为不稳定的. 因此, 不动点 $(0, 0)$ 为不稳定不动点.

2) 对于不动点 $(\pm \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}, 0)$, 将不动点代入 Jocabi 矩阵, 得到

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.2 & -0.1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

它对应的特征方程 $\det(J_2 - \lambda I) = 0$ 为

$$\lambda^2 + 0.1\lambda + 1.2 = 0 \quad (9)$$

解得方程两根为 $\lambda_1 = -0.05 + 1.0943i, \lambda_2 = -0.05 - 1.0943i$; 其中 i 为单位虚数. 此时特征方程两根均为复数, 但是实部均为负数, 由稳定性判断依据可知, 不动点 $(\pm \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}, 0)$ 为渐进稳定. 因此, 悬臂梁系统 3 个平衡点中, 中心平衡点为不稳定的, 而上、下 2 个平衡位置(图 1)为稳定的, 因而具有双稳态特性.

2 悬臂梁运动特性及混沌运动控制数值模拟仿真

2.1 悬臂梁运动特性分析

受迫型 Duffing 方程在外界激励下会表现出极其丰富的非线性现象, 如单周期到多周期分岔运动, 从多周期通向混沌运动. 这种非线性现象可以从分叉图中很好地体现出来.

本文运用 MATLAB2012b 版本对方程(3)进行数值求解, 初始值取 $[0.6325, 0]$. 为此, 取激励幅值 $f = 2.2$, 以外界激励频率 Ω 为变量作出悬臂梁振动位移分叉图, 如图 3 所示.

从图 3 可以看出, 在外界激励幅值一定时, 随着激励频率的增大, 悬臂梁振动特性不断发生变化. 当激励频率比较小时, 悬臂梁表现为 3 周期运动, 逐渐由 3 周期转变为混沌运动, 继而又

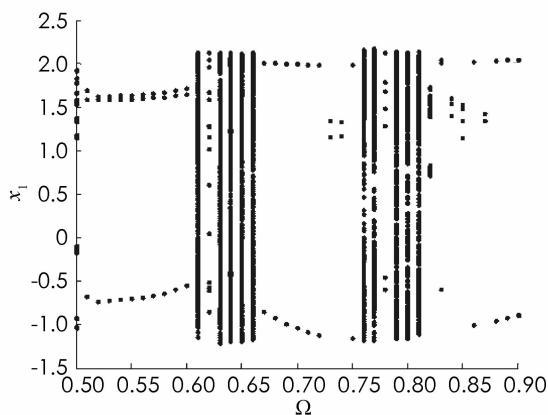


图 3 悬臂梁振动位移分叉图

交替出现周期运动和混沌运动. 事实上, 时域图和相图及 Poincare 映射图更能清晰地反映出悬臂梁的振动特性. 因此, 分别给出图 4 和图 5 所示的 $\Omega=0.6$ 和 $\Omega=0.8$ 时悬臂梁振动位移时域图、相图和 Poincare 映射图.

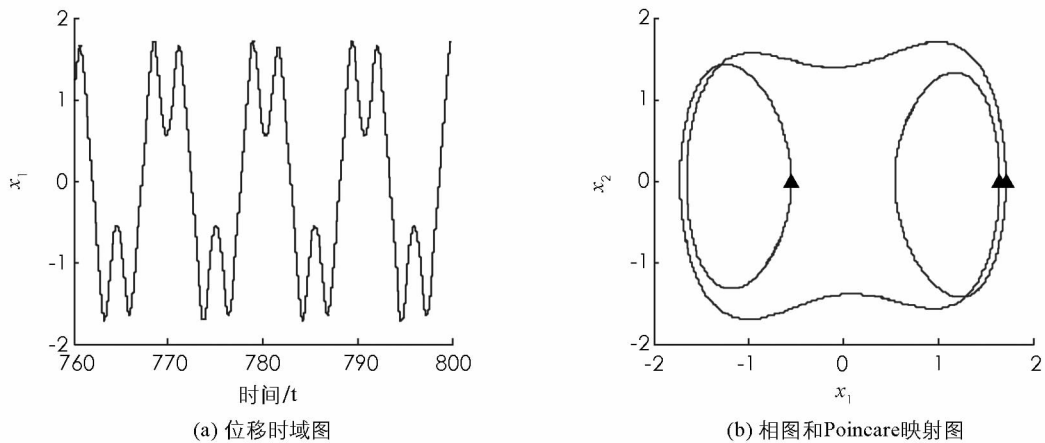


图 4 $\Omega=0.6$ 时悬臂梁振动特性(周期 3 运动)

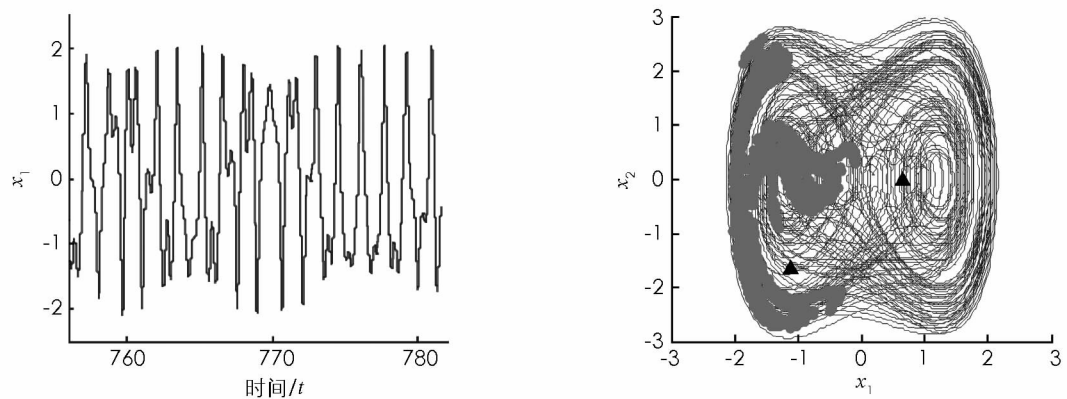


图 5 $\Omega=0.8$ 时悬臂梁振动特性(混沌运动)

从图 4 的位移时域图可以看出, 当外界激励频率为 $\Omega=0.6$ 时, 悬臂梁作稳定的周期 3 运动, 图 4(b) 的相图表现为封闭的极限环, 三角形相点表示 Poincare 截面上的相点, 相点的个数表示运动的周期数, 3 个相点代表周期 3 运动. 而图 5 所示的时域图则表现为极不规则的变化规律, 对应的相图表现出紊乱的相轨, Poincare 映射点呈现出云状吸引子(图 5(b)中的三角形相点)特征, 从以上这些特征可以判断此时运动特性为混沌运动.

2.2 混沌运动控制数值模拟

2.2.1 比例微分控制器参数设计

混沌控制就是通过人为施加控制将混沌运动转变为周期运动, 目前针对混沌控制方法有很多种. 本文基于比例-微分控制器实现对悬臂梁混沌运动的控制, 目标是将悬臂梁从混沌运动状态控制到周期轨道. 而速度反馈控制就属于常用的比例-微分控制方法的一种. 因此, 在方程(3)中引入速度反馈控制器 $p\dot{x}_2$, 则方程(3)转化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\xi x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3 + p\dot{x}_2 - f\cos(\Omega\tau) \end{cases} \quad (10)$$

其中: p 称为比例控制系数.

控制系数的选取对控制效果非常重要. 不失一般性, 本文选择将图 5 所示的混沌运动控制到周期运动状态. 为了分析不同控制系数下的控制效果, 以 p 为变量, 作出悬臂梁振动位移在不同控制系数变化下的

分叉图,如图 6 所示.

从图 6 可以看出,当控制系数在 $[-10, -0.1]$ 时,控制器能够将悬臂梁混沌运动控制到周期运动状态,并且随着控制系数的不断增大,悬臂梁周期运动的幅值也不断增大.为了详细说明不同控制系数下的控制效果,取 $p=-8$ 和 $p=-0.5$ 时悬臂梁受控后的振动位移时域图和相图,分别如图 7 和图 8 所示.

从图 7 和图 8 可以看出,施加控制后悬臂梁被控制到单周期极限环运动,而控制系数增大后,悬臂梁被控制到振幅较大的周期 3 运动.

此外,为了比较施加控制前后的效果,取控制系数 $p=-0.4$,给出如图 9 所示的施加控制前后悬臂梁振动位移特性变化图.

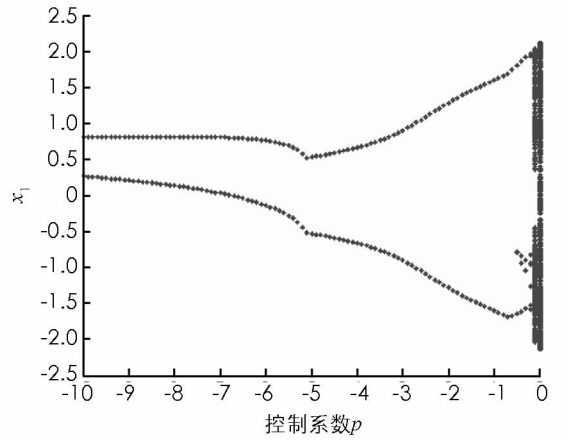


图 6 悬臂梁振动位移随控制系数变化分叉图

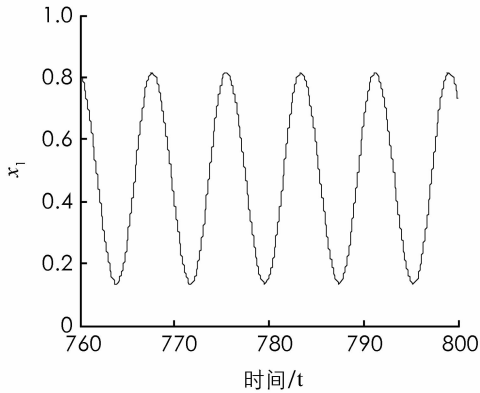


图 7 控制系数 $p=-8$ 时悬臂梁振动特性

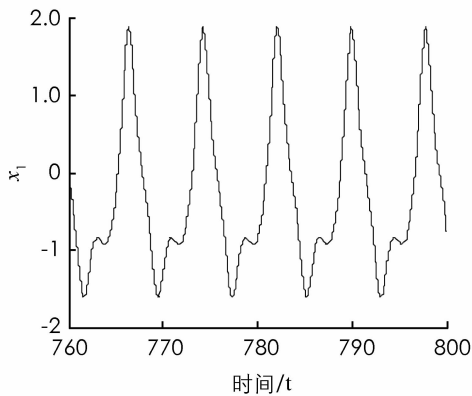
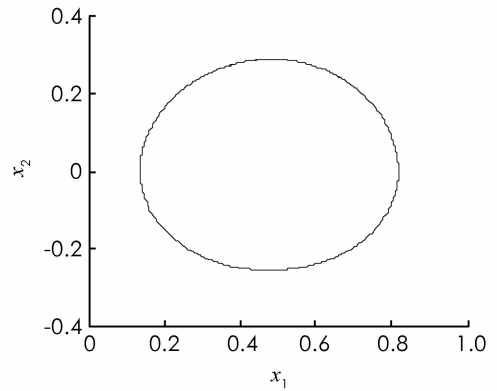
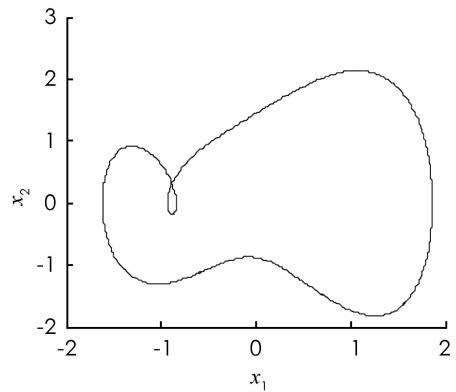


图 8 控制系数 $p=-0.4$ 时悬臂梁振动特性



从图 9 可以看出,当不施加控制时,悬臂梁表现为混沌运动,在 $t=100$ s 时施加反馈控制作用,悬臂梁立刻转化为周期运动;在 $t=200$ s 时,解除控制作用,悬臂梁又立即恢复到混沌运动状态.因此,比例微分控制器能够在很短的时间内实现运动状态的切换,减轻了系统响应的振荡.因此,运动比例微分控制能够有效地对悬臂梁的混沌运动实现控制作用.

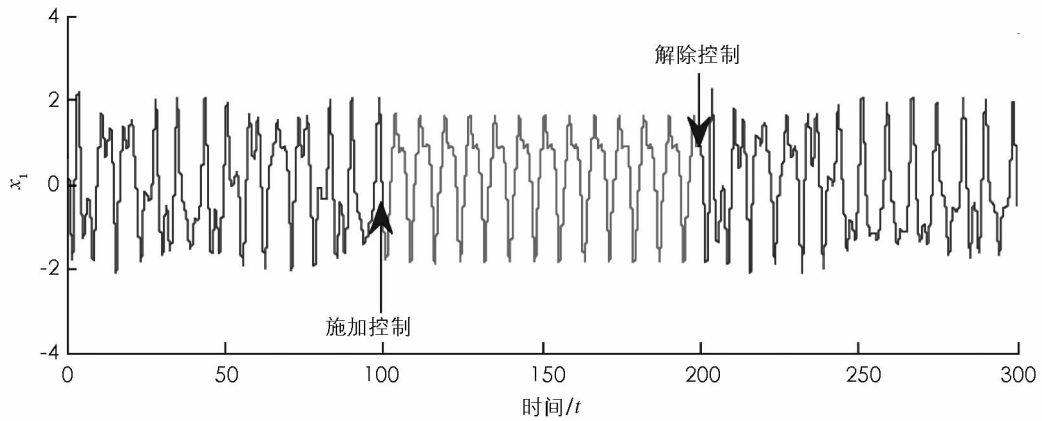


图9 连续施加控制效果图

2.2.2 混沌运动控制后不动点稳定性分析

引入比例微分控制器后可能对原系统的不动点或其稳定性有影响^[13], 因此有必要对施加控制后的系统不动点及其稳定性进行分析. 不失一般性, 仅分析当比例控制系数 $p = -0.4$ 时的稳定性, 方程(5)变为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\beta x_1^2 & -2\xi + p \end{bmatrix} \quad (11)$$

对于不动点 $(0, 0)$, 其特征方程的根为 $\lambda_1 = 0.5639$, $\lambda_2 = -1.0639$, 因此不动点为不稳定的;

对于不动点 $(\pm \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}, 0)$, 其特征方程的根为 $\lambda_1 = -0.25 + 1.0665i$, $\lambda_2 = -0.25 - 1.0665i$, 此时两

复数根仍然具有负实部, 因此不动点为稳定不动点. 其他比例系数取值下均有上述相同结果, 不再一一论述. 因此, 引入控制器并不影响原系统的稳定性.

3 结 论

本文运用数值方法分析了将比例微分控制器应用到悬臂梁混沌运动中的控制效果. 本文研究表明, 当控制系数为负数时, 可以实时将悬臂梁混沌运动控制到周期状态, 并且控制系数越大, 悬臂梁的周期运动幅值越大. 因此, 在工程应用中可以根据实际需要选取合适的控制系数. 另外, 引入比例微分控制器并不影响系统的稳定性, 从而证实了控制方法的有效性.

参考文献:

- [1] 王瑞光, 于熙龄, 陈式刚. 混沌的控制、同步与利用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.
- [2] 韩军海, 吴云洁. 混沌控制综述 [J]. 计算机仿真, 2006, 23(6): 6-8.
- [3] 冯兆斌. 微悬臂梁力学传感器的振动激发研究及在材料学中的应用探索 [D]. 济南: 山东大学, 2013.
- [4] ERTURK A, INMAN D J. Broadband Piezoelectric Power Generation on High-Energy Orbits of the Bistable Duffing Oscillator with Electromechanical Coupling [J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(10): 2339-2353.
- [5] GEIYER D, KAUFFMAN J L. Chaotification as a Means of Broadband Energy Harvesting with Piezoelectric Materials [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2015, 137(5): 051005.
- [6] LIU Y, WIERCIGROCH M, ING J, et al. Intermittent Control of Coexisting Attractors [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2013, 371(1993): 20120428.
- [7] ROUNDY S, WRIGHT P K. A Piezoelectric Vibration Based Generator for Wireless Electronics [J]. Smart Materials and structures, 2004, 13(5): 1131-1142.
- [8] RAO S S. Vibration of Continuous Systems [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2007.
- [9] 孙 舒, 曹树谦. 双稳态压电悬臂梁发电系统的动力学建模及分析 [J]. 物理学报, 2012, 61(21): 210505.

- [10] 张淑芬, 张彦斌, 王彦生. 机械系统运动稳定性分析的 Routh-Hurwitz 法 [J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2004, 25(2): 9-12.
- [11] 袁玉全, 彭建设, 周志坚, 等. 动力学问题的时域微分求积法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2010, 35(2): 7-12.
- [12] 杜小芳, 李扬荣. 带快速振荡外力项的随机反应扩散方程的拉回吸引子的上半连续性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(6): 24-30.
- [13] 韩煜杰, 李云伍, 赵华慧, 等. 基于 SPH 算法的立式旋耕刀土壤切削仿真模拟 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(12): 150-155.

Empirical Study of Proportional Derivative Control Model in Chaotic Motion of Bi-stable Cantilever Beam

CAO Bo

Department of Public Course Teaching, Ningbo Polytechnic, Ningbo Zhejiang 315800, China

Abstract: A bi-stable cantilever beam with lumped parameter model is established. The bi-stable characteristics is explained with the theory of stability of fixed point. Vibration characteristics of cantilever beam with various external excitation frequencies is analyzed. The proportional derivative controller is used to control the chaotic motion of the cantilever beam. The results is showed that the proportional derivative controller can effectively control the chaotic motion of the cantilever beam to the periodic state, and the introduction of the controller does not affect the stability of the original system.

Key words: bi-stable; cantilever beam; chaotic motion; proportional derivative control

责任编辑 夏 娟