

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.07.022

基于随机违约和利率双重风险的可转换债券的定价^①

潘 坚^{1,2}, 肖庆宪¹

1. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093; 2. 赣南师范大学 数学与计算机科学学院, 江西 赣州 341000

摘要: 基于风险中性定价原理, 建立了股票价格服从几何布朗运动、随机利率和违约强度均服从 Hull-White 模型且两两相关的可转换债券定价模型. 利用 Feynman-Kac 表示定理和偏微分方程方法得到了该模型的解析定价公式, 随后在解析定价公式的基础上, 通过数值分析讨论了模型主要参数对可转换债券价值及其风险因子 Delta 的影响.

关键词: 可转换债券; 随机违约风险; 利率风险; 约化模型; 风险中性定价原理; 偏微分方程方法

中图分类号: F830.91

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2017)07-0138-08

可转换债券是一种特殊的公司债券, 与普通的公司债券相比, 它赋予持有者在合约规定的到期日可回收投资本金和合约规定的利息. 同时, 它也赋予持有者在合约规定的到期日之前(含到期日)按事先约定的价格转换成公司股票的权利. 因此, 可转换债券是一种既具有固定收益, 又具有权益特性的混合型金融工具. 可转换债券起源于金融市场发达的西方国家, 到了 20 世纪 90 年代才在我国出现, 但一直停滞不前, 直到 2003 年可转换债券才得到国内投资者的认可, 现已成为证券市场的重要组成部分. 本文的主要工作是在约化模型下考虑具有违约和利率双重风险的可转换债券的定价并利用 Feynman-Kac 表示定理和偏微分方程方法得到可转换债券的解析定价公式, 相关研究可参见文献[1-7].

1 模型的建立

考虑一个随机的金融市场, 不确定性由完备的概率空间 $(\Omega, F, P, (F_t)_{0 \leq t \leq T})$ 来表示, P 是一个风险中性鞅测度, F_t 表示时刻 t 的信息流, 满足自然假设(右连续、单调递增)且 F_0 包含所有 F 可测的 P 零测度集.

1.1 基本假设

1) 假定风险资产(股票)的价格 S_t 满足如下随机微分方程:

$$dS_t = S_t \{ [r_t - q(t)]dt + \sigma_1(t)dW_1(t) \} \quad (1)$$

其中: $q(t)$ 是股票的红利率, $\sigma_1(t)$ 是股票的波动率, $W_1(t)$ 是标准的布朗运动.

2) 随机利率 r_t 采用可以匹配初始期限结构的 Hull-White 利率模型:

$$dr_t = a_2 [b_2(t) - r_t]dt + \sigma_2 dW_2(t) \quad (2)$$

其中: 常数 a_2 是利率回归长期均值 $b_2(t)$ 的速度, σ_2 是利率的波动率, $W_2(t)$ 是标准的布朗运动.

3) 违约风险用违约强度 λ_t 刻画且满足如下随机微分方程:

① 收稿日期: 2015-03-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471175, 11171221); 安徽省高校省级自然科学基金项目(KJ2017A402).

作者简介: 潘 坚(1979-), 男, 江西寻乌人, 博士研究生, 讲师, 主要从事金融工程与金融数学的研究.

$$d\lambda_t = a_3 [b_3(t) - \lambda_t] dt + \sigma_3 dW_3(t) \quad (3)$$

其中: 常数 a_3 是 λ_t 回归长期均值 $b_3(t)$ 的速度, σ_3 为违约强度的波动率, $W_3(t)$ 是标准的布朗运动.

注: 式(2)和(3)中的 r_t 和 λ_t 的取值可能为负, 现实中不是很合理, 可以考虑 Cox-Ingersoll-Ross(CIR)模型, 但 CIR 模型的期限结构是均衡理论下的内生模型, 与初始的期限结构无法吻合. 在 Hull-White 模型下, 如果能选择合理的初始值, r_t 和 λ_t 取值为负的可能性很小^[8-9].

4) $Cov[dW_i(t), dW_j(t)] = \rho_{ij}(dt)$, ($|\rho_{ij}| < 1$), $i, j = 1, 2, 3$ 且 $i \neq j$, 常数 ρ_{ij} 表示两个随机源的相关系数.

5) 在债券市场中, 可转换债券的种类很多. 根据林海和郑振龙的研究结果^[10], 可转换债券在国内债券市场上一般不会被提前执行. 因此, 本文假定可转换债券的转换只可能发生在到期时刻 T , 即在 T 时刻债券持有者有权利选择是持有股票还是持有债券. 若在 T 时刻, 用债券转换成股票后的价值超过对应债券的价值, 则债券持有者可选择将债券转换成股票. 若在 T 时刻, 用债券转换成股票后的价值不超过债券的价值, 则债券持有者将选择继续持有可转换债券. 记 $\Phi(T)$ 表示可转换债券在 T 时刻的收益, 则有

$$\Phi(T) = \begin{cases} P_b, & S_T < C_v \\ P_b, & C_v < S_T < \frac{P_b}{M} C_v \\ \frac{M}{C_v} S_T, & S_T > \frac{P_b}{M} C_v \end{cases} \quad (4)$$

其中 $P_b = Me^{iT}$ 表示以票面利率 i 计算的单纯的债券价值(债券利息按连续复利计算), C_v 是约定的可转换债券转换成股票的转换价格, M 是可转换债券的面值.

6) 可转换债券有违约风险, 当可转换债券的发行方发生违约时, 在 T 时刻可转换债券的持有者仅收到先前承诺支付的一部分, 即 $h\Phi(T)$, 常数 h 是回收率, 且 $0 \leq h \leq 1$. 如果可转换债券的发行方不发生违约, 则债券的持有者在 T 时刻接受先前承诺的支付 $\Phi(T)$.

1.2 建立模型

为建立具有违约风险的可转换债券定价模型, 引入带滤流的概率空间 $(\Omega, G, (G_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$, 总的域流是 $G_t = F_t \vee H_t$, 其中 $F_t = \sigma(S_u, 0 \leq u \leq t) \vee \sigma(r_u, 0 \leq u \leq t) \vee \sigma(\lambda_u, 0 \leq u \leq t)$ 反映市场上除了公司违约信息之外的信息, 而 $H_t = \sigma(I_{\{\tau \leq u\}}, 0 \leq u \leq t)$ 反映公司的违约信息. 则可转换债券发行方在违约时刻 τ 关于 G_t 的条件概率和无条件概率分别是

$$P(\tau > t | G_0) = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}, \quad P(\tau > t) = E(e^{-\int_0^t \lambda_u du}), \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

于是由风险中性定价原理, 具有违约风险的可转换债券在 t 时刻的值 $V(S, r, \lambda, t)$ 可表示为:

$$V(S, r, \lambda, t) = E[e^{-\int_t^T r_u du} (h\Phi(T)I_{\{\tau \leq T\}} + \Phi(T)I_{\{\tau > T\}}) | F_t] \quad (6)$$

其中 $I_{\{\cdot\}}$ 是一个示性函数. 下面利用条件数学期望的平滑性以及 Bielecki 和 Rutkowski 的结论^[11] 消去(6)式中的违约时间 τ , 于是有

$$\begin{aligned} V(S, r, \lambda, t) &= hE[\Phi(T)e^{-\int_t^T r_s ds} | F_t] + (1-h)E[E[e^{-\int_t^T r_s ds} \Phi(T)I_{\{\tau > T\}} | G_T] | F_t] = \\ &hE[\Phi(T)e^{-\int_t^T r_s ds} | F_t] + (1-h)E[e^{-\int_t^T r_s ds} \Phi(T)I_{\{\tau > t\}} \frac{P(\tau > T | F_T)}{P(\tau > t | F_T)} | F_t] = \\ &hE[e^{-\int_t^T r_s ds} \Phi(T) | F_t] + (1-h)I_{\{\tau > t\}} E[e^{-\int_t^T (r_s + \lambda_s) ds} \Phi(T) | F_t] = \\ &hV_1(S, r, t) + (1-h)I_{\{\tau > t\}} V_2(S, r, \lambda, t) \end{aligned} \quad (7)$$

因此, 求解 $V(S, r, \lambda, t)$ 的值关键在于求解条件数学期望 $V_1(S, r, t)$ 和 $V_2(S, r, \lambda, t)$.

2 模型的求解

下面利用 Feynman-Kac 表示定理^[12] 和偏微分方程方法得到 $V_1(S, r, t)$ 和 $V_2(S, r, \lambda, t)$, 进而得到 $V(S, r, \lambda, t)$.

引理 1 $V_1(S, r, t) = P_b P(t, T) N(d_1) + \frac{M}{C_v} S e^{-\int_t^T q(s) ds} N(d_2)$, 其中

$$d_1 = \frac{\ln \frac{P_b C_v}{M} - \ln S + \ln P + \int_t^T q(s) ds + \frac{\int_t^T \sigma^2(s) ds}{2}}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}}$$

$$d_2 = -d_1 + \sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}$$

$$N(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

是标准正态分布的累积分布函数.

证 由 Feynman—Kac 定理, $V_1(S, r, t)$ 是如下偏微分方程终值问题的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\sigma_1^2(t) S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \sigma_2^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} + 2\rho_{12} \sigma_1(t) \sigma_2 S \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial r} \right] + a_2 [b_2(t) - r] \frac{\partial V_1}{\partial r} + [r - q(t)] S \frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1 = 0 \\ V_1(S, r, T) = \begin{cases} P_b, & \frac{MS}{C_v} \leq P_b \\ \frac{MS}{C_v}, & \frac{MS}{C_v} > P_b \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

为了解问题(9), 作变换

$$x = \ln \frac{S}{P(t, T)} - \int_t^T q(s) ds \quad N(x, t) = \frac{V_1(S, r, t)}{P(t, T)} e^{-\frac{x}{2} + \frac{\int_t^T \sigma^2(s) ds}{8}}$$

其中 $P(t, T)$ 是 Hull-White 利率模型下到期日支付 1 单位的零息票债券的价格且

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r} \quad (10)$$

其中: $B(t, T) = \frac{1 - e^{-a_2(T-t)}}{a_2}$, $A(t, T) = e^{\frac{\sigma_2^2}{8} [2a_2(T-t) - 3 + 4e^{-a_2(T-t)} - e^{-2a_2(T-t)}] - \int_t^T a_2 b_2(s) B(s, T) ds}$. 通过计算后, 问题(9)化为如下定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\sigma^2(t)}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = 0 \\ N(x, T) = \begin{cases} P_b e^{-\frac{x}{2}}, & x \leq \ln \frac{P_b C_v}{M} \\ \frac{M}{C_v} e^{\frac{x}{2}}, & x > \ln \frac{P_b C_v}{M} \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\sigma(t) = \sqrt{\sigma_1^2(t) + 2\rho_{12} \sigma_1(t) \sigma_2 B(t, T) + \sigma_2^2 B^2(t, T)}$. 为了求解问题(11), 再作变换 $\tau = \int_t^T \sigma^2(s) ds$,

$N(x, t) = U(x, \tau)$. 通过计算后, 问题(11)化为如下 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(x, 0) = \begin{cases} P_b e^{-\frac{x}{2}}, & x \leq \ln \frac{P_b C_v}{M} \\ \frac{M}{C_v} e^{\frac{x}{2}}, & x > \ln \frac{P_b C_v}{M} \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

Cauchy 问题的解可由 Poisson 公式^[13]表示, 即有

$$U(x, \tau) = e^{-\frac{x}{2} + \frac{\tau}{8}} P_b N \left(\frac{\ln \frac{P_b C_v}{M} - x + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} \right) + e^{\frac{x}{2} + \frac{\tau}{8}} \frac{M}{C_v} N \left(\frac{-\ln \frac{P_b C_v}{M} + x + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} \right)$$

最后经过一系列的上述变换回到原变量和原函数, 引理 1 得证.

$$\text{引理 2 } V_2(S, r, \lambda, t) = \left[P_b N \left(\frac{\ln \frac{P_b C_v}{M} - x_1}{\sqrt{2d_1^*}} \right) + \frac{M}{C_v} e^{x_1 + d_1^*} N \left(\frac{2d_1^* + x_1 - \ln \frac{P_b C_v}{M}}{\sqrt{2d_1^*}} \right) \right] P(t, T) e^{\int_t^T \gamma(s) ds + \frac{-a_3(T-t)-1}{a_3} \lambda},$$

其中

$$x_1 = \ln S + \frac{1 - e^{-a_2(T-t)}}{a_2} r + \frac{e^{-a_2 t} - e^{-a_2 T}}{a_2} C_1(t) + A_2(t)$$

$$C_1(t) = a_2 \int_t^T b_2(s) e^{a_2 s} ds + \frac{\rho_{23} \sigma_2 \sigma_3}{a_3 a_2} \left[e^{a_2 t} - e^{a_2 T} + \frac{e^{a_2 T} - e^{a_3(t-T) + a_2 t}}{a_3 + a_2} a_2 \right] + \frac{\sigma_2^2}{a_2^2} \left[e^{a_2 t} - e^{a_2 T} - e^{a_2 t} \sinh(a_2(t-T)) \right]$$

$$A_2(t) = \frac{\rho_{12} \sigma_2 \int_t^T \sigma_1(s) (e^{-a_2 T + a_2 s} - 1) ds}{a_2} + \frac{\rho_{13} \sigma_3 \int_t^T \sigma_1(s) (e^{-a_3 T + a_3 s} - 1) ds}{a_3} - \frac{\int_t^T \sigma_1^2(s) ds}{2} + a_2 \int_t^T \left[\int_u^T b_2(s) e^{a_2 s} ds \right] du + \frac{\rho_{23} \sigma_2 \sigma_3}{a_3 a_2} (t-T) +$$

$$\frac{\rho_{23} \sigma_2 \sigma_3}{a_3 a_2} \left[-\frac{1 + e^{a_3(t-T)}}{a_3(a_3 + a_2)} a_2 + \frac{-1 + e^{a_2(T-t)}}{a_2} - \frac{-1 + e^{a_2(T-t)}}{a_3 + a_2} \right] + \frac{\sigma_2^2}{a_2^3} \left[a_2(t-T) + 1 - \cosh(a_2(t-T)) - 1 + e^{a_2(T-t)} \right]$$

$$d_1^* = \frac{\int_t^T \sigma_1^2(s) ds}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_2^2}{a_2^2} \left[(T-t) - 2 \frac{1 - e^{-a_2 T + a_2 t}}{a_2} + \frac{1 - e^{-2a_2 T + 2a_2 t}}{2a_2} \right] + \frac{\rho_{12} \sigma_2 \int_t^T \sigma_1(s) [1 - e^{-a_2 T + a_2 s}] ds}{a_2} \right\}$$

$$\int_t^T \gamma(s) ds = \int_t^T b_3(s) (e^{-a_3 T + a_3 s} - 1) ds + \frac{\sigma_3^2}{2a_3^2} \left[(T-t) - 2 \frac{1 - e^{-a_3 T + a_3 t}}{a_3} + \frac{1 - e^{-2a_3 T + 2a_3 t}}{2a_3} \right] +$$

$$\frac{\rho_{23} \sigma_2 \sigma_3}{a_3 a_2} \left[(T-t) - \frac{1 - e^{-a_3(T-t)}}{a_3} - \frac{1 - e^{-a_2(T-t)}}{a_2} + \frac{1 - e^{-(a_3 + a_2)(T-t)}}{a_3 + a_2} \right]$$

证 由 Feynman—Kac 定理, $V_2(S, r, \lambda, t)$ 是如下偏微分方程终值问题的解:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\sigma_1^2(t) S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + \sigma_2^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} + \sigma_3^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial \lambda^2} + 2\rho_{12} \sigma_1(t) \sigma_2 S \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial r} + 2\rho_{13} \sigma_1(t) \sigma_3 S \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial \lambda} + 2\rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r \partial \lambda} \right] + \\ & [r - q(t)] S \frac{\partial V_2}{\partial S} + a_2 [b_2(t) - r] \frac{\partial V_2}{\partial r} + a_3 [b_3(t) - \lambda] \frac{\partial V_2}{\partial \lambda} - (r + \lambda) V_2 = 0 \\ & V_2(S, r, \lambda, T) = \begin{cases} P_b, & \frac{MS}{C_v} \leq P_b, \\ \frac{MS}{C_v}, & \frac{MS}{C_v} > P_b. \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

为求出问题(13)的解, 作变换

$$x = \ln S - \int_t^T q(s) ds, \theta = r e^{a_2 t} + C_1(t), y = \lambda e^{a_3 t} + C_2(t) \quad V_2(S, r, \lambda, t) = W(x, \theta, y, t) e^{\int_t^T \gamma(s) ds + \beta(t) \lambda} P(t, T)$$

$$\text{其中 } C_1(t) = \int_t^T [a_2 b_2(s) + \rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 \beta(s) + \sigma_2^2 \chi(s)] e^{a_2 s} ds, \quad C_2(t) = \int_t^T [a_3 b_3(s) + \rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 \chi(s) + \sigma_3^2 \beta(s)] e^{a_3 s} ds,$$

$$\chi(t) = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial r} = -B(t, T), \quad \beta(t) = \frac{e^{-a_3 T + a_3 t} - 1}{a_3}, \quad \gamma(t) = [a_3 b_3(t) + \rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 \chi(t) + \frac{\sigma_3^2}{2} \beta(t)] \beta(t). \quad \text{通过计算后, 问}$$

题(13)可化为如下定解问题:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\sigma_1^2(t) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma_2^2 e^{2a_2 t} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \sigma_3^2 e^{2a_3 t} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\rho_{12} \sigma_1(t) \sigma_2 e^{a_2 t} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} + 2\rho_{13} \sigma_1(t) \sigma_3 e^{a_3 t} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] + \\ & \rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 e^{a_2 t + a_3 t} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial y} + [r + B_1(t)] \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ & W(x, \theta, y, T) = \begin{cases} P_b, & x \leq \ln \frac{P_b C_v}{M} \\ \frac{M e^x}{C_v}, & x > \ln \frac{P_b C_v}{M} \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

其中 $B_1(t) = \rho_{12} \sigma_1(t) \sigma_2 \chi(t) + \rho_{13} \sigma_1(t) \sigma_3 \beta(t) - \frac{\sigma_1^2(t)}{2}$. 为了求解问题(14), 再做变换:

$$x_1 = x + A_1(t)\theta + A_2(t), W(x, y, \theta, t) = M(x_1, y, t)$$

其中 $A_1(t) = \frac{e^{-a_2 t} - e^{-a_2 T}}{a_2}$, $A_2(t) = \int_t^T [B_1(s) - C_1(s)e^{-a_2 s}] ds$. 通过计算后, 问题(14) 可化为:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[f_1(t) \frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \sigma_3^2 e^{2a_3 t} \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + 2f_2(t) \frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial y} \right] = 0 \\ M(x_1, y, T) = H(x_1) = \begin{cases} P_b, & x_1 \leq \ln \frac{P_b C_v}{M} \\ \frac{M e^{x_1}}{C_v}, & x_1 > \ln \frac{P_b C_v}{M} \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

其中 $f_1(t) = \sigma_1^2(t) + \sigma_2^2 e^{2a_2 t} A_1^2(t) + 2\rho_{12}\sigma_1(t)\sigma_2 e^{a_2 t} A_1(t)$, $f_2(t) = \rho_{13}\sigma_1(t)\sigma_3 e^{a_3 t} + \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 e^{a_2 + a_3 t} A_1(t)$. 下面利用 Fourier 变换^[13] 求解问题(15), 令 $\varphi(\xi, \eta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} M(x_1, y, t) e^{-i(\xi x_1 + \eta y)} dx_1 dy$ 并对问题(15) 进行 Fourier 变换, 得到如下常微分方程定解问题(ξ, η 是参数):

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} - \frac{[f_1(t)\xi^2 + \sigma_3^2 e^{2a_3 t} \eta^2 + 2f_2(t)\xi\eta]\varphi}{2} = 0 \\ \varphi(\xi, \eta, T) = \hat{H}(\xi) \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\hat{H}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x_1) e^{-i(\xi x_1)} dx_1$. 利用变量分离的方法得到问题(16) 的解, 即

$$\varphi(\xi, \eta, t) = \hat{H}(\xi) e^{-(d_1^* \xi^2 + d_3^* \eta^2 + 2d_2^* \xi\eta)} \quad (17)$$

其中: $d_1^* = \frac{\int_t^T f_1(s) ds}{2}$, $d_2^* = \frac{\int_t^T f_2(s) ds}{2}$, $d_3^* = \frac{\sigma_3^2 (e^{2a_3 T} - e^{2a_3 t})}{4a_3}$. 对(17) 式作 Fourier 逆变换^[13], 则有

$$M(x_1, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}(\xi) G(x_1 - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (18)$$

其中

$$G(x_1, y) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[d_1^* \xi^2 + d_3^* \eta^2 + 2d_2^* \xi\eta]} e^{i(x_1 \xi + y \eta)} d\xi d\eta}{4\pi^2} = \frac{e^{-\frac{d_3^* (x_1)^2 + d_1^* y^2 - 2d_2^* x_1 y}{4[d_1^* d_3^* - (d_2^*)^2]}}}{4\pi \sqrt{d_1^* d_3^* - (d_2^*)^2}}$$

对 $M(x_1, y, t)$ 进行较为繁琐的二重积分计算, 得到

$$M(x_1, y, t) = P_b N \left[\frac{\ln \frac{P_b C_v}{M} - x_1}{\sqrt{2d_1^*}} \right] + \frac{M}{C_v} e^{x_1 + d_1^*} N \left[\frac{2d_1^* + x_1 - \ln \frac{P_b C_v}{M}}{\sqrt{2d_1^*}} \right]$$

最后经过一系列的上述变换回到原变量和原函数, 引理 2 得证.

由引理 1 和引理 2, 可以得到:

定理 1 约化模型下具有违约和利率双重风险的可转换债券在 t 时刻的值是:

$$\begin{aligned} V(S, r, \lambda, t) = & h \left[P_b P(t, T) N(d_1) + \frac{M}{C_v} S e^{-\int_t^T q_s ds} N(d_2) \right] + (1-h) \left[P_b N \left[\frac{\ln \frac{P_b C_v}{M} - x_1}{\sqrt{2d_1^*}} \right] + \right. \\ & \left. \frac{M}{C_v} e^{x_1 + d_1^*} N \left[\frac{2d_1^* + x_1 - \ln \frac{P_b C_v}{M}}{\sqrt{2d_1^*}} \right] \right] P(t, T) e^{\left[\int_t^T r(s) ds + \frac{e^{-a_3(T-t)} - 1}{a_3} \right] \lambda} \end{aligned} \quad (19)$$

其中 h 是回收率, 其它参数同引理 1 和引理 2.

由定理 1 可以得到常利率下具有违约风险的可转换债券在 t 时刻的值. 此时, 只需在定解问题(9) 和(13) 中不考虑有关利率的微分项, 即

推论 常利率下具有违约风险的可转换债券在 t 时刻的值是:

$$V(S, \lambda, t) = h \left[P_b e^{-r(T-t)} N(d_3) + \frac{M}{C_v} S e^{-\int_t^T q(s) ds} N(d_4) \right] + (1-h) \left[P_b e^{-r(T-t)} N(d_5) + \right.$$

$$\frac{M}{C_v} S e^{-\int_t^T q(s) ds - \delta_1(t)} N(d_6)] e^{\delta_2(t) + \frac{e^{-a_3(T-t)} - 1}{a_3} \lambda}$$

其中:

$$d_3 = \frac{\ln \frac{P_b C_v}{M} - \ln S - r(T-t) + \int_t^T q(s) ds + \frac{\int_t^T \sigma_1^2(s) ds}{2}}{\sqrt{\int_t^T \sigma_1^2(s) ds}}$$

$$d_4 = -d_3 + \sqrt{\int_t^T \sigma_1^2(s) ds}$$

$$\delta_1(t) = \frac{\rho_{13} \sigma_3 \int_t^T \sigma_1(s) (1 - e^{-a_3 T + a_3 s}) ds}{a_3}$$

$$d_5 = d_3 + \frac{\delta_1(t)}{\sqrt{\int_t^T \sigma_1^2(s) ds}}$$

$$d_6 = -d_5 + \sqrt{\int_t^T \sigma_1^2(s) ds}$$

$$\delta_2(t) = \int_t^T b_3(s) (e^{-a_3 T + a_3 s} - 1) ds + \frac{\sigma_3^2}{2a_3^2} \left[(T-t) - 2 \frac{1 - e^{-a_3 T + a_3 t}}{a_3} + \frac{1 - e^{-2a_3 T + 2a_3 t}}{2a_3} \right]$$

其它参数同引理 1 和引理 2. 这里需要指出的是该结论与文献[6]用测度变换方法得到的结果完全一致.

3 数值计算与风险管理

本节通过数值分析讨论模型主要参数对可转换债券价值的影响. 考虑一份 5 年到期具有利率风险和违约风险的可转换债券并选取如下基本参数:

$S_0 = 6.5$, $q(t) = 0.01$, $\sigma_1 = 0.3$, $\rho_{12} = -0.3$, $a_2 = 0.2$, $b_2 = 0.055$, $\sigma_2 = 0.01$, $r_0 = 0.05$, $a_3 = 0.25$, $b_3 = 0.1$, $\sigma_3 = 0.2$, $\lambda_0 = 0.05$, $\rho_{13} = 0.3$, $\rho_{23} = 0.1$, $M = 100$, $i = 0.025$, $C_v = 20$, $h = 0.7$.

3.1 利率风险对具有违约风险可转换债券价值的影响

为了凸显利率风险对可转换债券价值的影响, 利用 Matlab 软件得到了不同股价下可转换债券价值的期限结构关系图:

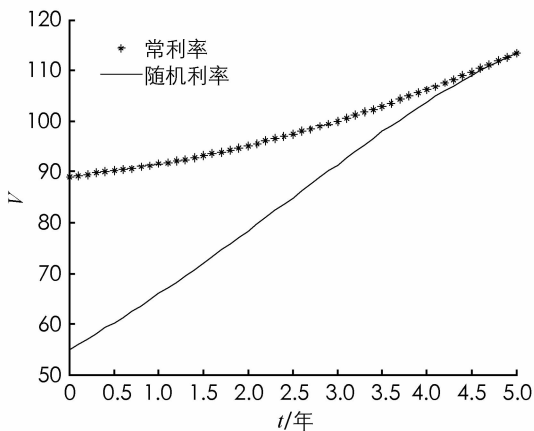


图 1 $S = 6.5 < C_v = 20$ 时
可转换债券的期限结构

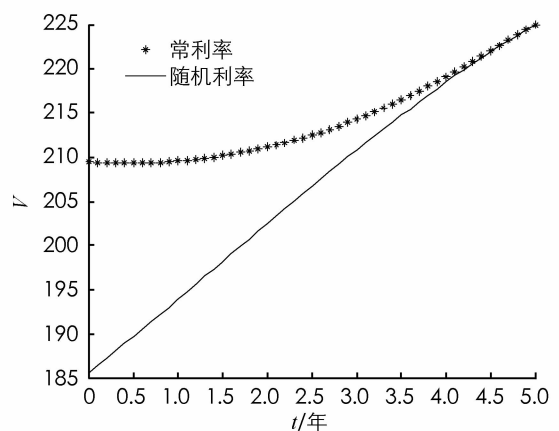


图 2 $S = 45 > C_v = 20$ 时
可转换债券的期限结构

从图 1 和图 2 可以观察到, 可转换债券的期限结构均随时间的上升而上升. 这是因为可转换债券是一种兼具债券、股票和期权特性的投资工具, 随着可转换债券的到期, 由于票面利率的原因, 持有债券的投资者能得到更多的利息. 另一方面, 由于可转换债券兼具了期权的性质, 可转换债券所隐含的期权的价值

也在逐渐增加. 此外, 从图 1 和图 2 还可以观察到: 随机利率下可转换债券的价值低于常数利率情形下的价值, 主要是利率风险降低了可转换债券的价值, 也是对投资者承担利率风险的一种补偿, 这是因为大多数可转换债券的期限较长, 多少会受到利率调整的影响.

3.2 转换价格 C_0 和股票价格 S 与可转换债券价值的关系

下面考虑 C_0 和 S 对可转换债券价值的影响, 利用 Matlab 软件得到如下图 3、图 4:

从图 3 可以观察到: 可转换债券的价值是 C_0 的单调不增的函数, 即随着转换价格的增加, 可转换债券的价值会减少, 但到了某一转换价格, 可转换债券的价值会趋于某一稳定值, 主要是可转换债券具有违约风险, 到了某一价格, 可转换债券可能发生违约, 由模型假设知道, 此时可转换债券的价值是 $\Phi(T)$ 的 h 倍. 此外, 从图 4 我们可以看出可转换债券的价值是 S 的增函数, 这是因为一张可转换债券实际上是一张中长期的普通股票的看涨期权, 在 $C_0 < S$ 和不违约情形下, 可转换债券的价值必定升高.

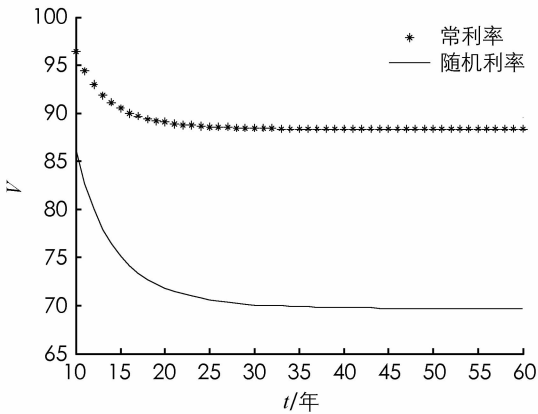


图 3 转换价格 C_0 与可转换债券价值的关系

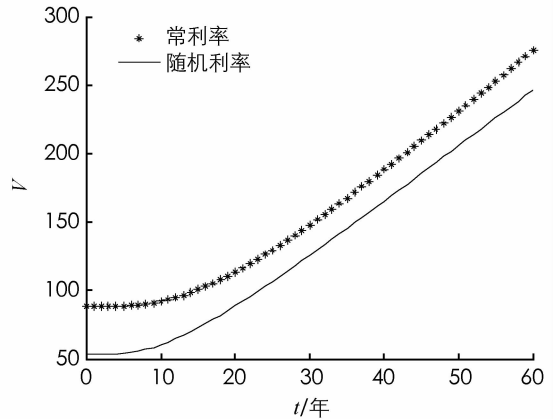


图 4 股票价格 S 与可转换债券价值的关系

3.3 风险管理因子 Delta

对可转换债券而言, Delta 值衡量的是可转换债券的价值对原生资产股票价格的变化率, 其定义是 $\Delta = \frac{\partial V(S, r, \lambda, t)}{\partial S}$. 由定理和推论, 可以分别得到随机利率情形和常利率情形的 Delta 值并利用 Matlab 软件分别得到 Delta 值与股票价格和实施期限的关系图:

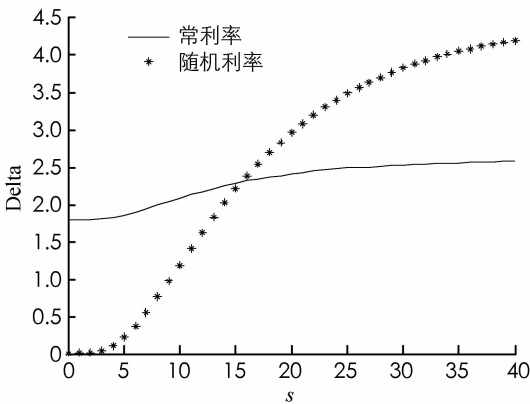


图 5 可转换债券的 Delta 值与股票价格的关系

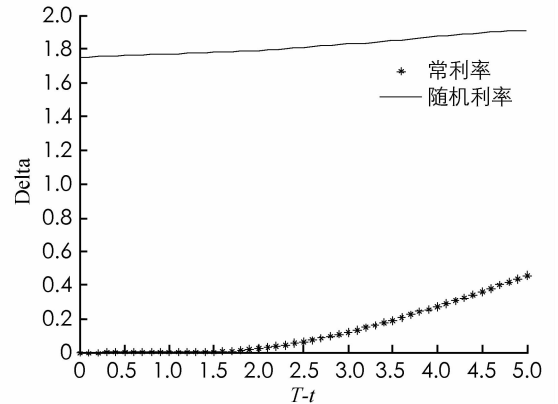


图 6 可转换债券的 Delta 值与 $T-t$ 的关系

从图 5、图 6 可以观察到: 随着原生资产股票价格的上涨(期限减小), 可转换债券的 Delta 值也随之增大, 由 Delta 的定义, 此时投资者需要同步调整原生资产股票的数量, 从而可规避股票价格所引起的波动风险. 因此, 投资者买入可转换债券后, 需密切关注 Delta 值的变化, 在恰当的时候实现 Delta 值最小, 进而调整空头头寸, 从而避免过度对冲或不完全对冲.

4 结 论

本文在约化模型下考虑了具有违约和利率双重风险的可转换债券的定价问题, 综合利用风险中性定价原理、Feynman—Kac 表示定理和偏微分方程方法得到了该模型下解析的定价公式, 推广了相关文献的结果, 也为债券发行公司、投资者和监管机构提供了理论上的支持. 最后在解析定价公式的基础上进行了数值计算. 结果表明: 利率风险和违约风险会降低可转换债券的价值; 随机利率下带有违约风险的可转换债券与常利率下带有违约风险的可转换债券相比有更大的 Delta 值.

参考文献:

- [1] INGERSOLL J. An Examination of Corporate Call Policies on Convertible Securities [J]. *Journal of Finance*, 1977, 32(2): 463—478.
- [2] BRENNAN M J, SCHWARTZ E S. Convertible Bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion [J]. *Journal of Finance*, 1977, 32(5): 1699—1715.
- [3] TSIVERIOTIS K, FERNANDES C. Valuing Convertible Bonds with Credit Risk [J]. *Journal of Fixed Income*, 1998, 8(2): 95—102.
- [4] AYACHE E, FORSYTH P A, VETZAL K R. The Valuation of Convertible Bonds with Credit Risk [J]. *Journal of Derivatives*, 2003, 11(1): 9—29.
- [5] XIAO T. A Simple and Precise Method for Pricing Convertible Bond with Credit Risk [J]. *Journal of Derivatives & Hedge Funds*, 2013, 19(4): 259—292.
- [6] 王 伟, 赵奇杰. 带有违约风险的可转换债券的简约型定价 [J]. *应用概率统计*, 2013, 29(3): 287—296.
- [7] 徐亚娟, 王过京. 约化模型中含有交易对手信用风险的可转换债券的定价 [J]. *应用概率统计*, 2016, 32(5): 476—487.
- [8] KIJIMA M, MUROMACHI Y. Credit Events and the Valuation Credit Derivatives of Basket Type [J]. *Review of Derivatives Research*, 2000, 4(1): 55—79.
- [9] KIJIMA M. Valuation of a Credit Swap of the Basket Type [J]. *Review of Derivatives Research*, 2000, 4(1): 79—95.
- [10] 林 海, 郑振龙. 中国可转债发行的股权价值效应 [J]. *商业经济与管理*, 2006, 18(10): 49—52.
- [11] BIELECKI T R, RUTKOWSKI M. *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging* [M]. Berlin: Springer, 2002.
- [12] 严加安. *金融数学引论* [M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [13] 姜礼尚, 陈亚浙, 刘西垣, 等. *数学物理方程讲义* [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2012.

On Pricing of Convertible Bond with Default Risk and Interest Rate Risk

PAN Jian^{1,2}, XIAO Qing-xian¹

1. Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. College of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou Jiangxi 341000, China

Abstract: In this paper, it is supposed that the stock price is obeyed by the geometric Brown motion, and that the stochastic interest rate and the default intensity are governed and correlated by the Hull-White model. We set up a pricing model of convertible bond with default risk and interest rate risk by the risk-neutral pricing principal. The closed-form solutions are also derived by means of Feynman-Kac theory and partial differential equation (PDE) methods. Finally, the effects of some main parameters on the value of convertible bond and the risk factor (Delta) are considered.

Key words: convertible bond; stochastic default risk; interest rate risk; reduced-form model; risk-neutral pricing principal; PDE methods