第 42 卷　第 7 期　　西南师范大学学报（自然科学版）　　2017 年 7 月
Vol. 42　No. 7　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Jul.　2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.07.027

“等价无穷小替换”求极限的教学思考①

黄玉梅[1]，李　娜[2]

1. 西南大学（荣昌校区）基础部，重庆 荣昌 402460；2. 四川城市职业学院 建筑工程学院，成都 610101

摘要：《高等数学》在大学非数学专业中是一门非常重要的数学类基础课程，极限的思想贯穿了整门课程，其中，等价无穷小替换是求极限的基本方法之一．该文从把握重要概念和基本原理的实质、改革教学方法和手段、对原理的应用实施分类教学、训练一题多解、解决问题抓主要方面、合理利用教学中的错误资源等几个方面进行思考，让初学者有更清晰的理解并掌握这门课程．

关　键　词：高等数学；等价无穷小替换；极限计算；教学研究

中图分类号：G642.0　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2017)07－0170－05

《高等数学》或《微积分》在大学非数学专业中是一门非常重要的数学类基础课程，极限的思想贯穿了整门课程，其中等价无穷小替换是求极限的基本方法之一．绝大部分教材只对分子或分母的因式进行无穷小替换这一情形进行了阐述，导致学生在使用时模糊不清，从而影响到整个课程的学习．笔者从事多年《高等数学》的教学工作，对教学中用等价无穷小替换求极限进行思考和总结，让初学者对这一知识点有更清晰的理解，为后续内容的学习奠定扎实的基础．

1　准备把握重要概念和基本原理的实质，做好教学设计

在学习等价无穷小这一新的概念及替换原理时，要求学生首先对这一知识点的实质要有清晰完整的理解和认识，这就迫使教师要根据学生已有的知识基础，做好教学设计．

定义 1　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小．特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 也称为 $n\to\infty$ 时的无穷小[1]．

按照定义，教学中强调无穷小不是一个数，更不是数零，而是一个函数，而零是无穷小中唯一的常数（函数）．另一方面，无穷小是和某一极限过程密切联系的．如函数 $f(x)=2x$，当 $x\to 0$ 时是无穷小，但当 $x\to 1$ 时不是无穷小．

定义 2　α,β 都是在同一个变量变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq 0$，如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，称 β 与 α 等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$[1]．

教师可由定义先推导一两个等价无穷小，再给出常见的等价无穷小，要求学生课外推导，并熟记，在计算极限过程中可以信手拈来，这些常见的等价无穷小主要有：当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$a^x-1\sim x\ln a$

另一方面，教师需讲清楚，若当 $x\to 0$ 时，有 $\varphi(x)\to 0$，上述等价无穷小中的变量 x 可以用 $\varphi(x)$ 去代替，如 $e^{2x}-1\sim 2x\ (x\to 0)$，$e^{\frac{n^2}{n^2+2n}-1}-1\sim\dfrac{n^2}{n^2+2n}-1\ (n\to\infty)$

① 收稿日期：2016－12－26
基金项目：重庆市自然科学基金项目(cstc2012jjA00029)；西南大学教改项目(2016JY094)．
作者简介：黄玉梅(1971－)，女，重庆荣昌人，硕士，副教授，主要从事课程与教学及应用数学研究．

定理 1　等价无穷小替换原理[2]：

设 α，α'，β，β' 都是在同一个变量变化过程中的无穷小量，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 也存在，且 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$

在讲解这个原理时，教师可根据学生已学过的极限四则运算法则及等价无穷小的定义简单推出，重点是向学生强调如果分子(或分母)为若干个因子的乘积，可对其中一个或若干个无穷小因子进行代换，可保证所得的新的分子(或分母)整体与原来的分子(或分母)整体是等价无穷小. 因此在计算极限时，将因式用适当的等价无穷小代替，可以简化很多计算.

2　改革教学方法和手段，提高学生学习兴趣

等价无穷小是高等数学中一个最基本的概念，但又非常抽象，学生在理解其实质上有一定的难度. 因此，教师需采用多种教学方法，由传统的"示范型"、"验证型"向"启发型"、"参与型"、"应用型"转变，启发学生动手动脑，让学生参与到教学过程中来，充分发挥学生的主体作用和教师的主导作用. 课堂可采用提问和讨论等方式，甚至可以让学生到黑板上做题并讲解，教师在学生的讲解过程中可发现问题并及时纠正、补充. 学生在巩固知识点的同时，也领悟到一种数学思维方法，并且能体验到学习的乐趣.

另一方面，素质教育要求将传授知识、培养能力、提高素质融为一体，把培养学生创新能力作为教育的一项重要任务. 因此，教师在教学中应注重培养学生的研究型学习方法，要求学生作为一名研究者对各种问题进行探讨. 如以计算 $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\sqrt{1+x^2}-1}$ 为例，对于 0^0，∞^0，1^∞ 型的幂指型未定式求极限，底数或指数上的无穷小量是否可以用等价无穷小替换来求解？并引导有兴趣的学生利用课余时间去查阅相关资料，获得完整解答，这样可培养学生的探究能力.

在教学手段上，由于计算机信息技术的大量普及，目前多数高校都改变了以往的"粉笔＋黑板"的教学手段，采用多媒体教学，因此可结合数学软件，如 MATLAB 的画图功能展示 2 个无穷小量的变化过程，让学生体会等价无穷小替换的实质意义，同时提高学生的学习兴趣.

3　实施分类教学，加强原理的应用

学生普遍存在"数学知识很有用，但学了后不会用"的思想，在学习了基本概念和无穷小替换原理后，不知如何灵活且正确地使用，因此教师可实施分类教学来加强原理的应用.

第一类：因式项的等价无穷小替换

定理 2　若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\varphi(x)$ 极限存在或有界，则

$$\lim\left[\frac{\alpha}{\beta}\varphi(x)\right]=\lim\left[\frac{\alpha'}{\beta'}\varphi(x)\right]$$

使用时，一方面要注意是对极限表达式中分子、分母的因子进行替换，另一方面在对极限的复合结构转化成常见的等价无穷小形式，须检查被替换部分是否是无穷小，再进行替换.

例 1　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=1$

第二类：幂指函数的等价无穷小替换

定理 3[3]　设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\alpha>0$，$\alpha'>0$，且 $\lim(\alpha')^{\beta'}$ 存在，则

$$\lim(\alpha')^{\beta'}=\lim\alpha^{\beta},\ \lim\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^{\beta'}=\lim\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta}$$

定理 4[4]　设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim(1+\alpha')^{\frac{1}{\beta'}}$ 存在，则 $\lim(1+\alpha')^{\frac{1}{\beta'}}=\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$

例 2　计算 $\lim\limits_{x\to0}[\ln(e+e^3\sin3x)]^{\frac{2x}{1-\cos x}}$

解　$\lim\limits_{x\to0}[\ln(e+e^3\sin3x)]^{\frac{2x}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+e^2\sin3x)]^{\frac{2x}{1-\cos x}}$

当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+e^2\sin 3x) \sim e^2\sin 3x \sim 3e^2 x$，有 $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(e+e^3\sin 3x)]^{\frac{2x}{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3e^2x)^{\frac{2x}{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3e^2x)^{\frac{1}{3e^2x}\cdot 3e^2x\cdot\frac{2x}{1-\cos x}} = e^{12e^2}$

第三类：变限函数的等价无穷小替换

定理 5[4]　设 $\alpha \sim \alpha'$，且在 $[0, x]$ 上连续，则有 $\int_0^x \alpha'(t)\mathrm{d}t \sim \int_0^x \alpha(t)\mathrm{d}t$

例 3　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\tan^2 x}(2^t-1)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3x^4}-1}$

解　当 $x \to 0$ 时，$2^x - 1 \sim x\ln 2$，$\sqrt{1+3x^4}-1 \sim \dfrac{3}{2}x^4$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\tan^2 x}(2^t-1)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3x^4}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\tan^2 x}t\ln 2\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln 2\tan^2 x\cdot 2\tan x\cdot\sec^2 x}{6x^3}\lim_{x\to 0}\frac{2\ln 2\cdot x^3}{6x^3\cdot\cos^2 x} = \frac{1}{3}\ln 2$$

第四类：级数敛散性的等价无穷小替换

用极限形式的比较审敛法判定 2 个正项级数的敛散性，也可用于 2 个等价无穷小(或同阶无穷小)的正项级数，判定它们的敛散性.

定理 6[5]　当 $n \to \infty$ 时，$\alpha(n)$ 与 $\alpha'(n)$ 是同号无穷小，且 $\alpha \sim \alpha'$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha(n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha'(n)$ 有相同的敛散性

例 4　判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{2n}\right)$ 的敛散性

解　当 $n \to \infty$ 时，$1-\cos\dfrac{1}{2n} \to 0$，且 $1-\cos\dfrac{1}{2n} \sim \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(2n)^2}$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{8n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{2n}\right)$ 也收敛

4　训练一题多解，培养学生的发散性思维

计算极限是高等数学中非常重要的知识点，方法众多. 一题多解即从不同角度、不同思维方式来解答同一个问题. 教学中积极、适宜地进行一题多解的训练，有利于充分调动学生思维的积极性，提高学生综合运用已学知识解答问题的技能和技巧；有利于锻炼学生思维的灵活性，促进学生知识与智慧的增长；有利于开拓学生的思路，引导学生灵活地掌握知识间的联系，培养和发挥学生的创造力. 在寻求一题多解时，还应该让学生选择解决问题的简便方法和最佳途径. 以计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\tan 4x}$ 为例：

解法一：先将正切函数转换成正弦余弦函数之商，再用第一个重要极限求解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\tan 4x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{\cos 5x}/\frac{\sin 4x}{\cos 4x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{\sin 4x}\cdot\frac{\cos 4x}{\cos 5x}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x}{\cos 5x} = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x\right)/\left(\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x\right)\right] = \frac{5}{4}$$

解法二：用等价无穷小替换求解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\tan 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}$$

解法三：洛比达法则求解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\tan 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{5\sec^2 5x}{4\sec^2 4x} = \frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos^2 5x}/\frac{1}{\cos^2 4x}\right) = \frac{5}{4}$$

以上 3 种是常见解法，学生容易完成. 比较这些解法，用等价无穷小替换求解要简便得多.

5　抓矛盾的主要方面，培养学生灵活解决问题的能力

由性质 $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$ 可知：2 个等价无穷小量并不相等，二者之间相差一个高阶无穷小 $o(\alpha)$. 由于高阶无穷小的概念非常抽象，学生理解起来有一定的难度，如果能用一个具体的表达式来展现，就形象得多. 教师可用"解决问题时抓矛盾的主要方面"的思想来通盘考虑. 等价无穷小替换通常是把涉及到的函数转化为有理函数，分子、分母都是多项式，当自变量趋向于零时，高次项远远低于低次项，因此决定分子、分母数值大小和变化趋势的是它们的最低次项，即矛盾的主要方面，而其他较高次项相对来说就是次要矛盾，是干扰项. 如：计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$，当 $x \to 0$ 时，因 $x^3 = o(3x)$，分母 x^3+3x 的主要项是 $3x$，而忽略次要项 x^3，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$，这就是和差取大规则：若 $\beta = o(\alpha)$，则 $\alpha \pm \beta \sim \alpha$.

另一方面，教师在教学泰勒公式时，可引导学生用"抓问题的主要方面"的思想来重新理解和认识等价无穷小及替换原理的实质. 以正弦函数的泰勒公式为例：$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$

如果 β 取 $\sin x$，当 α 分别取 x，$x - \dfrac{x^3}{3!}$，$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ 时，相应的 $o(\alpha)$ 分别为 $-\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$，$\dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$，$-\dfrac{x^7}{7!} + \cdots$，而这些 $o(\alpha)$ 就是次要项，属可忽略项.

为了提高学生解决实际问题的能力，教师可要求学生重新用泰勒公式来解决之前用无穷小替换来完成的练习，不仅可以培养学生思维的灵活性，还可以将前后所学知识有机地结合，形成完整的知识链.

6　合理利用教学中的错误资源，提高学生的自我思辨能力

在教学过程中不可避免地会出现这样或那样的错误解答，令人遗憾的是不少教师对学生错误的处理十分草率，或置之不理，或想方设法遮掩，或叫别的学生重新作答，或埋怨批评学生，这些做法既错失了教学机遇，又挫伤了学生思维和回答问题的积极性. 因此，在课堂教学中，当发现学生的错误时，教师应积极调控课堂教学，正确对待错误，认真分析错误，确定错误的性质，然后利用错误对症下药，让错误成为启迪思维的"催化剂"，让学生从"错误"中获得认识上的提升和超越. 学生由于对等价无穷小替换的实质没有正确的理解，在使用过程中很容易出现以下 3 种错误解答：

错误 1　$\lim\limits_{x\to 0}\left(arc\sin x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$

错误原因：$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x^2}$ 不存在.

正确解法：$\lim\limits_{x\to 0}\left(arc\sin x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$

错误 2　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x} = 0$

答案正确，但解题过程不对[6].

错误原因：在运算过程中用到了 $\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right) \sim x^2\sin\dfrac{1}{x}\,(x\to 0)$，忽略了等价无穷小定义的前提条件是 $x^2\sin\dfrac{1}{x} \neq 0$，而当 x 取 $x_n = \dfrac{1}{n\pi}\,(n \in \mathbf{N}^+)$ 时，$x_n \to 0$，但 $x^2\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

此题目的正确解答是：

当 $x \neq 0$ 时，$\left|\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^2\sin\dfrac{1}{x} \leqslant x^2$，有

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}\right| \leqslant |x|$$

由夹逼准则知，所求极限为0.

错误3[6] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

错误原因：分子 $\tan x-\sin x$ 是加减项，$\tan x-\sin x$ 用 $x-x$ 替换，替换后的分子与原来的分子不是等价无穷小.

正确解法：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{x^3}\cdot\dfrac{1}{2}x^2\right)=\dfrac{1}{2}$

若极限表达式中有加减项时，补充条件无穷小替换也可使用，教师可根据学生的接受能力补充以下定理：

定理7[7] 若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$. ① 当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=k\neq 1$ 时，$\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$；② 当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=k\neq -1$ 时，$\alpha+\beta\sim\alpha'+\beta'$

同时提供应用实例，让学生明白2个函数相加减时满足一定的条件也可使用等价无穷小替换.

教学是一门艺术，教师要扮演好导演的角色，不仅要有清晰的知识结构，而且还要有主导知识脉络发展的能力. 等价无穷小替换在高等数学中极限的计算方面起到了非常重要的作用，要灵活巧妙地使用，但在替换前要先检查是否满足条件，才能真正发挥它的作用.

参考文献：

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学 [M]. 7版. 北京：高等教育出版社，2014.

[2] 陈熙德，黄玉梅. 高等数学 [M]. 重庆：西南师范大学出版社，2014.

[3] 祝 微，杨春燕. 等价无穷小代换定理的拓展 [J]. 长春师范学院学报(自然科学版)，2010，29(1)：12－14.

[4] 尤晓琳，吴振芬. 极限的等价无穷小替换研究 [J]. 河南教育学院学报(自然科学版)，2011，20(3)：4－6.

[5] 同济大学数学系. 高等数学(本科少学时) [M]. 4版. 北京：高等教育出版社，2015.

[6] 同济大学数学系. 高等数学附册学习辅导与习题选解 [M]. 6版. 北京：高等教育出版社，2007.

[7] 吴维峰. 对等价无穷小代换及洛必达法则求极限的探讨 [J]. 潍坊教育学院学报，2008，21(2)：22－23.

On Teaching in Finding Limit in Equivalent Infinitesimal Replacement

HUANG Yu-mei[1], LI Na[2]

1. Basic Science Department, Southwest University (Rongchang Campus), Rongchang Chongqing 402460, China;

2. School of Civil Engineering, Sichuan Urban Vocational College, Chengdu 610101, China

Abstract: *Advanced Mathematics* is a very important basic subject of mathematics for non-mathematics majors in universities. The thought of limit has been applied in the whole subject, among which the Equivalent Infinitesimal Replacement is one of the basic methods of finding the limit. This paper deals with the thought in the following aspects, such as the grasp of the essence of important concepts and the basic principle, the reform of teaching methods and means, the implementation of classification teaching in the application of the principle, training of one problem with more solutions and the ability to solve problems by grasping the main aspects, the errors in the rational utilization of teaching resources and etc. The purpose is to let the beginners have a clearer understanding and mastering of this knowledge point.

Key words: Advanced Mathematics; equivalent infinitesimal replacement; limit calculation; teaching research

责任编辑 夏 娟