DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.08.002

# 非线性分数阶微分方程的一个正解[①]

崔亚琼，　康淑瑰，　陈慧琴

山西大同大学 数学与计算机科学学院，山西 大同 037009

**摘要：**讨论了非线性分数阶微分方程 $D_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t, u(t))=0 (t\in(0, 1))$ 在 Dirichlet 边值条件 $u(0)=u(1)=0$ 下正解的存在性，其中 $\alpha\in(1, 2]$，$D_{0+}^{\alpha}$ 是标准的 Riemann-Liouville 微分，$f:[0, 1]\times[0, +\infty)\to[0, +\infty)$ 连续. 利用不动点指数理论，在 $f$ 关于 $u$ 次线性的条件下，得到边值问题至少存在一个正解.

**关　键　词：**分数阶微分方程；Dirichlet 边值问题；正解；不动点指数理论

**中图分类号：O177**　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000-5471(2017)08-0009-04

这篇文章讨论了非线性分数阶微分方程边值问题(BVP)

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t, u(t))=0 & t\in(0, 1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $\alpha\in(1, 2]$，$D_{0+}^{\alpha}$ 是标准的 Riemann-Liouville 微分，$f:[0, 1]\times[0, +\infty)\to[0, +\infty)$ 连续.

近年来，连续型分数阶微分方程正解的存在性已吸引了许多研究者的兴趣，见文献[1-4]. 在文献[1]中，当 $\alpha\in(1, 2]$ 时，利用锥拉伸与锥压缩不动点定理，在非线性项 $f$ 满足一定条件下，得到 BVP(1) 存在多个正解. 若 $\alpha\in(3, 4]$，利用类似的方法，文献[2]讨论了唯一正解和多个正解的存在性. 文献[5]研究了在非线性项满足超线性和次线性的条件下，利用不动点指数理论，讨论了四阶边值问题正解的存在性. 参见文献[1-5]，本文将讨论 $\alpha\in(1, 2]$ 时，在非线性项满足较文献[1-2]弱的条件下，BVP(1) 至少存在一个正解.

为研究方便，我们介绍下列两个记号：

$$\underline{f}_{0, k}=\liminf_{u\to 0+}\min_{t\in[0, 1]}\frac{f(t, u)}{u^{k}}$$

$$\overline{f}_{\infty, k}=\limsup_{u\to+\infty}\max_{t\in[0, 1]}\frac{f(t, u)}{u^{k}}$$

其中 $k>0$.

本文主要结论如下：

**定理 1**　设 $f:[0, 1]\times[0, +\infty)\to[0, +\infty)$ 连续. 若存在常数 $k, \tilde{k}\in(0, 1)$，满足条件

(H) $0<\underline{f}_{0, k}\leqslant\infty$，$0\leqslant\overline{f}_{\infty, \tilde{k}}<+\infty$，那么 BVP(1) 至少存在一个正解.

**推论 1**　设 $f:[0, 1]\times[0, +\infty)\to[0, +\infty)$ 连续. 若存在常数 $k, \tilde{k}\in(0, 1)$，使得

$$\underline{f}_{0, k}=+\infty \qquad \overline{f}_{\infty, \tilde{k}}=0$$

成立，那么 BVP(1) 至少存在一个正解.

下面给出一个简单的例子. 考虑边值问题(BVP)

$$\begin{cases} D_{0+}^{\frac{3}{2}}u(t)+f(t, u(t))=0 & t\in(0, 1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

① 收稿日期：2016-09-29
作者简介：崔亚琼(1973-)，女，山西左云人，副教授，主要从事非线性泛函分析的研究.

**例 1** 设 $f(t, u)=(2+\sin t)\sqrt{u}$，$(t, u)\in[0, 1]\times[0, +\infty)$，$k=\tilde{k}=\dfrac{3}{4}$. 易证 $f$ 满足定理 1 的全部条件，根据定理 1，(2) 式至少存在一个正解.

## 1 准备知识

在这部分，参见文献[6－7]，首先介绍一些必要的定义和引理.

**定义 1** 函数 $y:(0, +\infty)\to R$ 在 $(0, +\infty)$ 上的 $\alpha(\alpha>0)$ 阶 Riemann-Liouville 积分是

$$I_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s$$

**定义 2** 连续函数 $y:(0, +\infty)\to R$ 在 $(0, +\infty)$ 上的 $\alpha(\alpha>0)$ 阶 Riemann-Liouville 微分是

$$D_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s$$

其中 $n=[\alpha]+1$，$[\alpha]$ 表示 $\alpha$ 的整数部分.

**引理 1** 设 $\alpha>0$，$u\in C(0, 1)\cup L(0, 1)$，那么方程 $D_{0+}^{\alpha}u(t)=0$ 有唯一解 $u(t)=C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+\cdots+C_Nt^{\alpha-N}$，其中 $C_i\in R$ 是常数，$i=1, 2, \cdots, N$，$N$ 是大于或等于 $\alpha$ 的最小整数.

**引理 2** 设 $\alpha>0$，$u\in C(0, 1)\cup L(0, 1)$. 则

$$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}u(t)=u(t)+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+\cdots+C_Nt^{\alpha-N}$$

其中 $C_i\in R$ 是常数，$i=1, 2, \cdots, N$.

由文献[1] 中的引理 2.3 与 2.4，我们有下面两个引理.

**引理 3** 设 $h\in C[0, 1]$ 且 $\alpha\in(1, 2]$. 那么边值问题(BVP)

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)+h(t)=0 & t\in(0, 1)\\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

的解为 $u(t)=\int_0^1 G(t, s)h(s)\mathrm{d}s$，其中

$$G(t, s)=\begin{cases} \dfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\\ \dfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

**引理 4** $G(t, s)$ 有下列性质：

(i) $G(t, s)>0$，$t, s\in(0, 1)$；

(ii) 存在正函数 $\gamma\in C(0, 1)$，使得 $\min\limits_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}G(t, s)\geqslant\gamma(s)\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t, s)=\gamma(s)G(s, s)$，$s\in(0, 1)$.

为方便起见，令

$$m=\min_{\frac{1}{4}\leqslant t, s\leqslant\frac{3}{4}}G(t, s) \tag{4}$$

显然 $m>0$.

设 $P$ 是实 Banach 空间 $E$ 中的一个锥，$\Omega$ 是 $E$ 中一有界开集，且 $P\cap\Omega\neq\varnothing$. 取 $r>0$，令 $P_r=\{u\in P: \|u\|<r\}$，$\partial P_r=\{u\in P: \|u\|=r\}$ 为 $P_r$ 相对于 $P$ 的边界. 设 $A: P\cap\overline{\Omega}\to P$ 全连续，若 $i(A, P\cap\overline{\Omega}, P)\neq 0$，那么 $A$ 在 $P\cap\Omega$ 中至少有一个不动点.

下面两个不动点定理是我们证明主要结果的理论基础.

**引理 5**[7] 设 $A: P\cap\overline{\Omega}\to P$ 全连续. 若对每个 $u\in\partial P_r$，有 $Au\neq\mu u$，$\mu\geqslant 1$，那么 $i(A, P_r, P)=1$.

**引理 6**[7] 设 $A: P\cap\overline{\Omega}\to P$ 全连续. 若对每个 $u\in\partial P_r$，存在 $u_0\in P\backslash\{\theta\}$，使得 $u-Au\neq\gamma u_0$，$\gamma\geqslant 0$，那么

$$i(A, P_r, P)=0$$

## 2 证明主要结果

令 $E=\{u\in C[0, 1]: u(0)=u(1)=0\}$. 则 $E$ 按范数 $\|u\|=\max_{t\in[0, 1]}|u(t)|$，$u\in E$，是一 Banach

空间. 取锥

$$P = \{u \in E: u(t) \geqslant 0, t \in [0, 1]\}$$

定义算子 $K$，$F$，$A$：

$$Ku(t) = \int_0^1 G(t, s)u(s)ds$$

$$Fu(t) = f(t, u(t))$$

$t \in [0, 1]$，$u \in E$，且 $A = KF$.

由引理 4 及 Ascoli-Arzela's 定理易知 $K: P \to P$ 线性全连续，且

$$\| K \| = \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 G(t, s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

若 $f: [0, 1] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 连续，那么 $A: P \to P$ 全连续，且 $A$ 的一个非零不动点等价于 BVP(1) 的一个非平凡解.

**定理 1 的证明**　下面证明在条件(H) 成立的前提下，算子 $A$ 在锥 $P$ 中至少存在一个非零不动点.

利用反证法，假设存在 $r_0 > 0$，满足

$$u - Au \neq 0, u \in P, 0 < \| u \| \leqslant r_0 \tag{6}$$

否则结论已证. 由条件(H) 及 $\underline{f}_{0,k}$ 的定义知，存在 $\sigma > 0$，$r_1 > 0$，当 $u \in [0, r_1]$ 时，有

$$f(t, u) \geqslant \sigma u^k \qquad t \in [0, 1] \tag{7}$$

令 $r' = \min\left\{r_0, r_1, \left(\dfrac{m\sigma}{4}\right)^{\frac{1}{1-k}}\right\}$，其中 $m$ 的定义见(4) 式. 作函数

$$u_0(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3}{4}, 1\right] \\ 1 & t \in \left[\dfrac{3}{8}, \dfrac{5}{8}\right] \\ 8t - 2 & t \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{8}\right) \\ -8t + 6 & t \in \left(\dfrac{5}{8}, \dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

显然，$u_0 \in P$ 且 $\| u_0 \| = 1$.

取 $r \in (0, r')$. 下证对任一 $u \in \partial P_r$，有

$$u - Au \neq \tau u_0 \tag{8}$$

其中 $\tau \geqslant 0$. 事实上，若存在 $u_1 \in \partial P_r$ 和 $\tau_1 \geqslant 0$ 使得 $u_1 - Au_1 \equiv \tau_1 u_0$. 由(6) 式知 $\tau_1 > 0$，故 $u_1 = \tau_1 u_0 + Au_1 \geqslant \tau_1 u_0$. 令 $\tau^* = \sup\{\tau: u_1 \geqslant \tau u_0\}$，则 $\tau_1 \leqslant \tau^* < \infty$，$u_1 \geqslant \tau^* u_0$，且

$$\tau^* = \tau^* \| u_0 \| \leqslant \| u_1 \| = r < \left(\frac{m\sigma}{4}\right)^{\frac{1}{1-k}}$$

由(6) 式和(7) 式，对任一 $t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$，有

$$\begin{aligned} u_1(t) = & \int_0^1 G(t, s)(t, s) f(s, u_1(s))ds + \tau_1 u_0(t) \geqslant \\ & \int_0^1 G(t, s)\sigma[u_1(s)]^k ds + \tau_1 u_0(t) \geqslant \\ & \sigma(\tau^*)^k \int_0^1 G(t, s)[u_0(s)]^k ds + \tau_1 u_0(t) \geqslant \\ & \sigma(\tau^*)^k \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{5}{8}} G(t, s)[u_0(s)]^k ds + \tau_1 u_0(t) \geqslant \\ & \frac{m\sigma(\tau^*)^k}{4} + \tau_1 u_0(t) \geqslant \tau^* + \tau_1 u_0(t) \end{aligned}$$

因此 $u_1 \geqslant (\tau^* + \tau_1)u_0$，与 $\tau^*$ 的定义矛盾，故(8) 式成立. 由引理 6，有

$$i(A, P_r, P) = 0 \tag{9}$$

另一方面，既然$\overline{f}_{\infty,k}<+\infty$，由$\overline{f}_{\infty,k}$的定义知，存在$a>0$，$R'>0$，使得$f(t,u)\leqslant au^{\tilde{k}}$，$t\in[0,1]$，$u\geqslant R'$成立．令$C=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant u\leqslant r'} f(t,u)$．即$t\in[0,1]$时，

$$0\leqslant f(t,u)\leqslant au^{\tilde{k}}+C \qquad u\geqslant 0 \tag{10}$$

取$R>\max\{R',r'\}$，使

$$\frac{C\|K\|}{R}+\frac{a\|K\|}{R^{1-\tilde{k}}}<1 \tag{11}$$

下证$Au\neq\mu u$，$u\in\partial P_R$，$\mu\geqslant 1$．假设存在$v_0\in\partial K_R$，$\mu_0\geqslant 1$使$Av_0=\mu_0 v_0$．由(10)式，有不等式

$$\mu_0 v_0(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,v_0(s))\mathrm{d}s\leqslant\|K\|(a\|v_0\|^{\tilde{k}}+C)=\|K\|(aR^{\tilde{k}}+C)$$

即$\mu_0 R=\mu_0\|v_0\|\leqslant\|K\|(aR^{\tilde{k}}+C)$．由(11)式得，$\mu_0\leqslant\dfrac{C\|K\|}{R}+\dfrac{a\|K\|}{R^{1-\tilde{k}}}<1$．这与假设$\mu_0\geqslant 1$相矛盾．利用引理5，得

$$i(A,P_r,P)=1 \tag{12}$$

由(9)式，(12)式知

$$i(A,P_R\setminus\overline{P}_r,P)=1$$

因此算子$A$在$P_R\setminus\overline{P}_r$中至少有一个不动点，该不动点即为BVP(1)在$P_R\setminus\overline{P}_r$中的一个正解．证毕．

注：相对于文献[1-2]中定理3.1的条件，这里条件(H)是较弱的．

**参考文献：**


[1] BAI Zhan-bing, LÜ Hai-shen. Positive Solutions for Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equation [J]. Math Anal Appl, 2005, 311(2): 495-505.

[2] XU Xiao-jie, JIANG Da-qing, YUAN Cheng-jun. Multiple Positive Solutions for the Boundary Value Problem of a Nonlinear Fractional Differential Equation [J]. Nonlinear Anal. 2009, 71(10): 4676-4688.

[3] ZHANG Xing-qiu, WANG Lin, SUN Qian. Existence of Positive Solutions for a Class of Nonlinear Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions and a Parameter [J]. Appl Math Comput, 2014, 226(1): 708-718.

[4] CHRISTOPHER S G. On a Fractional Boundary Value Problem with Fractional Boundary Conditions [J]. Appl Math Lett, 2012, 25(8): 1101-1105.

[5] LI Yong-xiang. Positive Solutions of Fourth-Order Boundary Value Problems with Two Parameters [J]. Math Anal Appl, 2003, 281(2): 477-484.

[6] OLDHAM K, SPANIER J. The Fractional Calculus [M]. Academic Press: New York and London, 2006: 1-234.

[7] 郭大均．非线性泛函分析[M]．2版．济南：山东科学技术出版社，2001：1-550．


# On a Positive Solution to Nonlinear Fractional Differential Equations


CUI Ya-qiong, KANG Shu-gui, CHEN Hui-qin

*School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Datong University, Datong Shanxi 037009, China*



**Abstract**: This paper discusses the existence of positive solutions to nonlinear fractional differential equation $D_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0\ (t\in(0,1))$ subject to Dirichlet boundary value condition $u(0)=u(1)=0$, where $\alpha\in(1,2]$, $D_{0+}^{\alpha}$ is the standard Riemann-Liouville differentiation, and $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ is continuous. According to the fixed point index theory, the existence results of at least one positive solution are obtained under the condition that $f$ is sublinear on $u$.



**Key words**: fractional differential equation; Dirichlet boundary value problems; positive solution; fixed point index theory

责任编辑 周仁惠