第 42 卷　第 8 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2017 年 8 月
Vol. 42　No. 8　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Aug. 2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.08.004

资源受限最小赋权树形图的一种贪婪分解启发式算法①

杨子兰[1]，　朱娟萍[2]，　李　睿[1]

1. 云南大学 旅游文化学院，云南 丽江 674199；2. 云南大学 数学系，昆明 650091

摘要：资源受限的最小赋权树形图问题($RMWA$)是 NP -难的，针对 $RMWA$ 问题给出一种新的贪婪分解启发式算法. 通过分解目标函数和约束条件，把 $RMWA$ 模型分解成一个最小赋权树形图问题和 n 个独立的特殊背包问题. 对这 n 个独立的特殊背包问题，设计贪婪算法求其解，其时间复杂度为 $O(nm\log_2 m)$；然后调整该解使其满足树形图的约束条件得到 $RMWA$ 问题的一个可行解，该算法总的复杂度为 $O(nm^2)$. 最后，给出实例来阐述该贪婪分解启发式算法.

关　键　词：受限资源；树形图；背包问题；分解；贪婪算法；启发式算法

中图分类号：O157.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2017)08-0018-07

资源受限的最小赋权树形图问题($RMWA$)是 NP -难的，文献[1-3]给出了求解该问题不同的算法，如枚举算法、分支分割算法等. 文献[1]中的枚举算法引入大量的拉格朗日乘子使问题的求解更为复杂；文献[2]中的分支分割算法得到该问题的一个近似最优解，但该算法把多种方法结合在一起，使得问题求解的过程变得繁琐. 限制性优化问题目前成为研究的一个热点[4-5]，文献[6-8]对限制性优化问题给出了一种分解算法，该算法对限制性优化问题的目标函数进行分解，从而使算法更灵活且在很大程度上减少了算法的时间复杂度. 受文献[6-8]中分解算法的启发，针对 $RMWA$ 问题，本文提出一种新的贪婪分解启发式算法($HGDA$). $HGDA$ 算法的基本思想是把 $RMWA$ 问题的目标函数进行分解继而分解约束条件，将原模型分解成一个最小赋权树形图问题和 n 个独立特殊背包问题. 针对这 n 个独立的特殊背包问题，利用贪婪算法求其最优解. 再考虑该最优解是否与树形图问题的约束条件相矛盾. 若矛盾，则考虑相应的限制条件(先考虑在保证资源受限约束条件下的树形图约束，然后对有圈图按权重破圈)对最优解中的相应变量重新赋值，一旦所有的变量都满足限制条件，则得到 $RMWA$ 问题的一个可行解. 该新启发式算法不同于文献[1]的算法，在对 n 个独立的特殊背包问题，并没有引入拉格朗日乘子.

1　资源受限的最小赋权树形图问题

给定有向连通图 $G=(V, A, C)$，其中 $V=\{1, 2, \cdots, n\}$ 表示顶点集合，A 表示弧集合，r 表示树形图的根节点. 设 c_{ij} 表示弧(i, j)的权重(或费用)，置 $C=\{c_{ij} \mid (i, j) \in A\}$. $P(i)=\{j \in V \mid (j, i) \in A\}$ 表示顶点 i 的父辈，$Q(i)=\{j \in V \mid (i, j) \in A\}$ 表示顶点 i 的后辈. 置子集 $V'=V\backslash r$，用 $d^-(i)$ 表示顶

---

① 收稿日期：2016-09-25
基金项目：国家自然科学基金项目(11126355)；云南省教育厅科学研究基金项目(2017ZDX270)；云南大学旅游文化学院项目(2015XY08).
作者简介：杨子兰(1985-)，女，彝族，云南楚雄人，讲师，主要从事组合最优化研究.

点 i 的入度，$d^+(i)$ 表示顶点 i 的出度. 设 $a_{ij} \in R^+$ 表示经历弧(i, j)所需要的资源量，$b_i \in R^+$ 表示在顶点 i 能提供的固定资源量. 置 $R = \{a_{ij} \mid (i, j) \in A\}$，$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots, b_n\}$. G' 是根为 r 的图 G 的树形图，资源受限的最小赋权树形图 $RMWA$ 问题的数学模型如下：

$$\min \sum_{(i, j) \in A} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in P(j)} x_{ij} = 1 \qquad j \in V' \tag{2}$$

$$G' \text{ 不含圈} \tag{3}$$

$$\sum_{j \in Q(i)} a_{ij} x_{ij} \leqslant b_i \qquad i \in V \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j) \in A \tag{5}$$

即 $RMWA$ 问题的目标是要在满足资源受限的约束条件(4)下，在图 G 中找到一棵总权重(或费用)最小的树形图 G'. 从上述数学模型我们可以看出式(1)、(2)、(3)、(5) 构成最小赋权树形图问题，即最小树形图是 $RMWA$ 问题的简单特殊情况. 最小树形图问题是多项式时间可解的，有著名的朱-刘算法. 但是由于增加条件(4)，$RMWA$ 问题就成为 NP -难的[1].

2　RMWA 问题的贪婪分解启发式算法

如引言中的分析，对于 $RMWA$ 问题有诸如枚举算法和分支分割算法，但其求解都是相当的繁琐与复杂. 近几年来，分解技术的应用十分广泛[6-10]. 为解决 $RMWA$ 问题，本文提出一种新的贪婪分解启发式算法($HGDA$)，其分解思想产生于文献[6－9]的分解思想，模型的分解如下.

2.1　RMWA 模型的分解

对 $RMWA$ 模型的目标函数进行变形如下：

$$\min \sum_{(i, j) \in A} c_{ij} x_{ij} = \min \sum_{(i, j) \in A} (c_{ij} + 1 - 1) x_{ij} = \min \sum_{(i, j) \in A} (c_{ij} + 1) x_{ij} - \max \sum_{(i, j) \in A} x_{ij} \tag{1$'$}$$

把(1′) 式中的第二部分和(4) 式中变量 x_{ij} 替换成变量 y_{ij}，得到新的模型 $RMWAN$ 如下：

$$\min_x \sum_{(i, j) \in A} (c_{ij} + 1) x_{ij} - \max_y \sum_{(i, j) \in A} y_{ij} \tag{1$''$}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in P(j)} x_{ij} = 1 \qquad j \in V' \tag{2}$$

$$G' \text{ 不含圈} \tag{3}$$

$$\sum_{j \in Q(i)} a_{ij} y_{ij} \leqslant b_i \qquad i \in V \tag{4$'$}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j) \in A \tag{5}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j) \in A \tag{5$'$}$$

从上述模型可以看到(2) 式和(3) 式只与树形图有关，(4′) 式只与受限资源有关，于是再次分解约束条件和目标函数，$RMWAN$ 模型可分解成 o_1 和 o_2 两部分. o_1 的变量只与最小树形图有关，o_2 的变量只与资源受限有关且可视为 n 个独立的特殊背包.

$$o_1: \min_x \sum_{(i, j) \in A} (c_{ij} + 1) x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in P(j)} x_{ij} = 1 \qquad j \in V' \tag{2}$$

$$G' \text{ 不含圈} \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j) \in A \tag{5}$$

$$o_2: -\max_y \sum_{(i, j) \in A} y_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j \in Q(i)} a_{ij} y_{ij} \leqslant b_i \qquad i \in V \tag{4$'$}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j) \in A \tag{5$'$}$$

针对 $RMWA$ 问题的 o_1 和 o_2 子问题的分解，我们提出贪婪分解启发式算法，该算法采取分两步的思想：首先对特殊的背包 o_2 问题我们给出贪婪算法，此时 o_2 问题考虑的是资源受限的约束条件；接下来在满足资源受限基础上考虑该最优解是否构成树形图且使得该树形图的权重尽可能小，即要确定 o_2 问题的最优解是否满足 o_1 问题的限制性条件以及其目标函数值. 我们可以看到 $RMWAN$ 模型的可行解即为 $RMWA$ 模型的可行解，要得到该可行解，需进行如下的操作：如果 o_2 问题的最优解满足 o_1 问题的限制性条件，即得到 $RMWA$ 模型的可行解；否则根据 o_1 和 o_2 限制性条件以及 o_1 的目标函数对 o_2 问题的最优解的相应变量进行调整，直到所有变量都满足限制性条件，即得到 $RMWA$ 模型的可行解.

2.2 特殊背包问题的贪婪算法

o_2 问题可看做是 n 个独立的特殊背包问题，分别求解这 n 个独立的背包问题将不会影响原问题的解的最优性. 因为 o_2 中变量 y_{ij} 的系数是1，所以对于 o_2 中的任意一个背包来说，只要被选弧的数量越多，其目标函数值就越大. 故在解单个的背包问题时，只要最大限度的选不同的弧，就能找到该背包问题的一个可行解. 于是应用该贪婪算法，可得到 o_2 问题的可行解.

贪婪算法($GA-SKP$)：

Input：$G=(V, A, C, B, R)$

Output：可行解 y

Begin

Step 1：初始化，令 $i=1$.

Step 2：对顶点 $i \in V$，构造背包问题模型

$$\max_y \sum_{(i, j) \in A} y_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j \in Q(i)} a_{ij} y_{ij} \leqslant b_i \qquad i \in V$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j) \in A$$

Step 3：对 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{id^+(i)}$ 进行从大到小排序为：$a_{i1'} \geqslant a_{i2'} \geqslant \cdots \geqslant a_{ij'} \geqslant \cdots \geqslant a_{i[d^+(i)]'}$，令 $\theta_i = \sum\limits_{j'=1'}^{[d^+(i)]'} a_{ij'}$.

Step 4：若 $\theta_i \leqslant b_i$，令 $y_{i1'} = y_{i2'} = \cdots = y_{ij'} = \cdots = y_{i[d^+(i)]'} = 1$，转 Step 6；否则令 $\hat{\theta}_i \leqslant \theta_i - b_i$. 若 $\hat{\theta}_i \leqslant a_{i1'}$，则令 $y_{i1'} = 0$，$y_{i2'} = \cdots = y_{ij'} = \cdots = y_{i[d^+(i)]'} = 1$，转 Step 6；否则令 $\hat{\theta}_i \leqslant \hat{\theta}_i - a_{ij'}$，$j' = (j+1)'$，转 Step 5.

Step 5：若 $\hat{\theta}_i \leqslant a_{ij'}$，令 $y_{i1'} = y_{i2'} = \cdots = y_{ij'} = 0$，$y_{i(j+1)'} = \cdots = y_{i[d^+(i)]'} = 1$，转 Step 6；否则令 $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i - a_{ij'}$，$j' = (j+1)'$，当 $j' > [d^+(i)]'$ 时，算法停止(此时任意顶点 $j \in Q(i)$，都有 $b_i < a_{ij}$，说明无可行解)，否则转 Step 5.

Step 6：令 $i = i+1$，当 $i > |V|$ 时，算法停止(输出可行解)，否则转 Step 2.

End

定理1 若贪婪算法 $GA\text{-}SKP$ 可得到 o_2 问题的一个可行解，则该可行解是 o_2 问题的最优解，且算法时间复杂度为 $O(nm \log_2 m)$.

证 设 $\bar{y}$ 为通过贪婪算法找到的 o_2 问题的一个可行解. 假设 $\bar{y}$ 不是 o_2 问题的最优解，则有 $\sum \bar{y}_{ij} \neq \sum y_{ij}^*$，其中 y^* 为 o_2 问题的最优解. 对于任意 $i \in V$，若任意 $j \in Q(i)$，有 $\theta_i = \sum\limits_{j'=1'}^{[d^+(i)]'} a_{ij'} \leqslant b_i$，则 $\bar{y}_{ij} = 1$，$y_{ij}^* = 1$，从而 $\bar{y} = y^*$. 对于任意 $i \in V$，若对任意 $j \in Q(i)$，若 $\theta_i = \sum\limits_{j'=1'}^{[d^+(i)]'} a_{ij'} > b_i$，则令 $\hat{\theta}_i = \theta_i - b_i$，若

$\sum_{j'=(l+1)'}^{[d^+(i)]'} a_{ij'} < \hat{\theta}_i \leqslant \sum_{j'=1'}^{l'} a_{ij'}$ 时，有 $\sum_{j'=1'}^{l'} \bar{y}_{ij'} = 0$ 且 $\sum_{j'=(l+1)'}^{[d^+(i)]'} \bar{y}_{ij'} = d^+(i) - l$，可知 $\sum_{j'=1'}^{l'} y^*_{ij'} = 0$ 且 $\sum_{j'=(l+1)'}^{[d^+(i)]'} y^*_{ij'} = d^+(i) - l$. 此时，对任意 $\bar{y}_{ij} \in \bar{y}$，若 $\bar{y}_{ij} = 1$，则有 $y^*_{ij} \in y^*$ 且 $y^*_{ij} = 1$；若对任意 $\bar{y}_{ij} \in \bar{y}$，若 $\bar{y}_{ij} = 0$，则有 $y^*_{ij} \in y^*$ 且 $y^*_{ij} = 0$；若 $y^*_{ij} \in y^*$ 且 $y^*_{ij} = 1$，但 $\bar{y}_{ij} \in \bar{y}$ 且 $\bar{y}_{ij} = 0$，则与 $\sum_{j'=(l+1)'}^{[d^+(i)]'} a_{ij'} < \hat{\theta}_i \leqslant \sum_{j'=1'}^{l'} a_{ij'}$ 矛盾. 故 y^* 中取值为 1 的变量与 $\bar{y}$ 中取值为 1 的变量一一对应，所以 $\bar{y} = y^*$. 因此，$\bar{y}$ 为 o_2 问题的最优解.

假设给定一个有向连通图 $G = (V, A, C)$，其中 $|V| = n$，$|A| = m$. 设 $\bar{y}$ 为通过贪婪算法得到的可行解，则该解也是 o_2 问题的最优解(上述已证明). 在贪婪算法中，分别求解 n 个独立的背包问题. 对任意一个背包问题的求解分成 4 个步骤，其时间复杂度主要取决于 Step 3 和 Step 5. Step 3 的计算量主要取决于顶点 i 的 $d^+(i)$ 条出弧所需资源进行从大到小的排序，其计算量为 $O(d\log_2 d)$，其中 $d = \max_i\{d^+(i)\}$. Step 5 的计算量为 $O(d-1)$. 因为共有 n 个独立的特殊背包问题，故贪婪算法的时间复杂度为 $O(nm\ \log_2 m)$.

2.3 *RMWA* 问题的贪婪分解启发式算法

若上述背包问题有可行解时，贪婪算法可找到其最优解. 接下来第二步算法判断该最优解是否构成树形图且使其权重尽可能小. 如果树形图的限制性条件不满足，则对 o_2 问题的最优解的相应变量进行调整，直到所有变量都满足限制性条件；对于这些变量的调整操作实际上是一破圈过程，因为要使得 o_1 的目标函数尽可能小，所以在破圈时尽量去掉那些权重大的弧.

基于贪婪算法的分解启发式算法 *HGDA*：

Input：$G = (V, A, C, B, R)$

Output：RMWA 问题的可行解

Begin

Step 1：设顶点 r 为图 G 的根节点，调用贪婪算法 GA-SKP 得到 o_2 问题的最优解 y. 置弧集合 $Q = \varnothing$.

Step 2：对每个 $j \in V'$，令 $M[j] = \sum_{i \in V} y_{ij}$. 若对所有的 $j \in V'$ 都有 $M[j] = 1$，则转 Step 8；否则对 $M[j] \neq 1$ 的 j，将其对应的权重 $c_{1j}, c_{2j}, \cdots, c_{ij}, \cdots, c_{[d^-(j)]j}$ 进行从小到大排序为 $c_{1'j} \leqslant c_{2'j} \leqslant \cdots \leqslant c_{i'j} \leqslant \cdots \leqslant c_{[d^-(j)]'j}$.

Step 3：若存在 $j \in V'$ 使得 $M[j] \geqslant 1$ 且当 $i' = 1'$，$y_{i'j} = 1$ 时，令 $y_{(i+1)'j} = \cdots = y_{[d^-(j)]'j} = 0$，转 Step 8；否则令 $i' = (i+1)'$.

Step 4：若 $y_{i'j} = 1$，令 $y_{(i+1)'j} = y_{(i+2)'j} = \cdots = y_{[d^-(j)]'j} = 0$，转 Step 8；否则令 $i' = (i+1)'$，转 Step 4.

Step 5：若存在 $j \in V'$ 且 $i' = 1'$，使得 $M[j] = 0$ 且 $a_{i'j} \leqslant b_{i'}$ 且 $(i', j) \in Q$ 时，令 $i' = (i+1)'$.

Step 6：当 $a_{i'j} \leqslant b_{i'}$ 且 $(i', j) \in Q$ (或 $a_{i'j} > b_{i'}$) 时，令 $i' = (i+1)'$. 若 $i' > [d^-(j)]'$，则算法停止(此时无可行解)；否则转 Step 7.

Step 7：当 $a_{i'j} \leqslant b_{i'}$ 且 $(i', j) \notin Q$ 时. 若 $\sum_{j^*=1}^{d^+(i')} y_{i'j^*} = 0$，令 $y_{i'j} = 1$，转 Step 8；否则若 $\sum_{j^*=1}^{L_i} y_{i'j^*} = L_i$，如 $\sum_{j^*=1}^{L_i} a_{i'j^*} + a_{i'j} \leqslant b_i$，令 $y_{i'j} = 1$，转 Step 8；否则令 $i' = (i+1)'$，转 Step 7.

Step 8：假如 y 中不存在圈 S，则转 Step 9；否则检测当前被选的弧，从圈 S 中找出入度不为 1 的顶点：$j_1, j_2, \cdots, j_w$，(设有 w 个这样的顶点)，以这 w 个点为入弧顶点在圈 S 中找出这 w 条弧，并在这 w 条弧种找出关于权重 c 最大的那条弧记为 (i^*, j^*)，令 $y_{i^*j^*} = 0$，转 Step 9；若圈 S 中所有的顶点入度都为 1，则在圈 S 中找关于权重 c 最大的那条弧记为 (i^*, j^*)，置 $y_{i^*j^*} = 0$，$Q = Q \cup (i^*, j^*)$，转 Step 9.

Step 9：假如存在 $j \in V'$，使得 $M[j] \neq 1$，则转 Step 3；否则转 Step 10.

Step10：假如任意 $j \in V'$，使得 $M[j] = 1$，则令 $x_{ij} = y_{ij}$，算法停止(输出可行解).

End

定理 2　算法 $HGDA$ 能找到 $RMWA$ 问题的一个可行解且其时间复度为 $O(nm^2)$.

证　设图 G 中有 m 条弧 n 个顶点($m > n$). 令 $d = \max\limits_i\{d^+(i)\}$ 和 $d' = \max\limits_j\{d^-(j)\}$. 设 $\bar{x}$ 表示通过贪婪分解启发式算法找到的一个可行解. 对于任意 $\bar{x}_{ij} \in \bar{x}$，显然有 $\sum\limits_{i \in P(j)} \bar{x}_{ij} = 1 (j \in V')$，$G'$ 中不存在圈且 $\sum\limits_{j \in Q(i)} a_{ij}\bar{x}_{ij} \leqslant b_i (i \in V)$，故 $\bar{x}$ 是 $RMWA$ 问题的一个可行解. 算法 $HGDA$ 的 Step 1 的运行时间为 $O(nm\log_2 m)$，Step 2 到 Step 9 最多循环 n 次，在每次循环中，Step 2 到 Step 9 的运行时间分别为：$O(d'\log_2 d')$，$O(d')$，$O(d')$，$O(1)$，$O(d')$，$O(d'^2)$，$O(|S|)$ 和 $O(1)$. Step 10 的运行时间为 $O(nm)$. 因为 $d' \leqslant m$，$d \leqslant m$，$|S| \leqslant n-1$，所以整个 $HGDA$ 算法的总复杂度为：$O(nm^2)$.

3　算　　例

给定一个有向连通图 $G=(V, A, C)$(图 1)，c_{ij} 表示弧 (i, j) 的权重，a_{ij} 表示经历弧 (i, j) 所需要的资源量，b_i 表示在顶点 i 处提供的固定资源量，目标是在图 G 中找到一棵以 1 为根节点的资源受限的最小赋权树形图. 该算例阐述如何应用贪婪分解启发式算法 $HGDA$ 求解 $RMWA$ 问题的可行解的过程(易知，该算例的最优值为 $z^* = 17$). 因为对贪婪算法 GA-SKP 而言比较简单，具体步骤不再给出，主要给出的是树形图约束条件调整的具体步骤：

1) 置顶点 1 为根节点. 用贪婪算法求得 o_2 问题的最优解：

$y_{12} = y_{13} = y_{32} = y_{36} = y_{46} = y_{67} = y_{74} = y_{75} = 1$，$y_{14} = y_{16} = y_{24} = y_{43} = y_{45} = y_{56} = 0$.

2) 计算

$M[2] = y_{12} + y_{32} = 2$，$M[3] = y_{13} + y_{43} = 1$，$M[4] = y_{14} + y_{24} + y_{74} = 1$，$M[5] = y_{45} + y_{75} = 1$，$M[6] = y_{16} + y_{36} + y_{46} + y_{56} = 2$，$M[7] = y_{67} = 1$.

因为 $M[2]$ 和 $M[6]$ 不等于 1，所以对 c_{12}，c_{32} 排序为 $c_{32} < c_{12}$；对 c_{16}，c_{36}，c_{46}，c_{56} 进行排序为 $c_{36} < c_{46} < c_{56} < c_{16}$.

3) 因为 $M[2] > 1$ 且 $y_{32} = 1$，令 $y_{12} = 0$；因为 $M[6] > 1$ 且 $y_{36} = 1$，令 $y_{16} = y_{46} = y_{56} = 0$.

4) 此时 $y_{12} = y_{14} = y_{16} = y_{24} = y_{45} = y_{46} = y_{43} = y_{56} = 0$，$y_{13} = y_{32} = y_{36} = y_{67} = y_{75} = y_{74} = 1$. 对所有的 $j \in V'$ 都有 $M[j] = 1$ 且没有圈，执行 Step10，得

$x_{12} = x_{14} = x_{16} = x_{24} = x_{45} = x_{46} = x_{43} = x_{56} = 0$，$x_{13} = x_{32} = x_{36} = x_{67} = x_{75} = x_{74} = 1$.

此时，得到以 1 为根节点的资源受限的最小赋权支撑树形图的可行解(如图 2 中粗线所示，易知 $\sum\limits_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} = z^* = 17$).

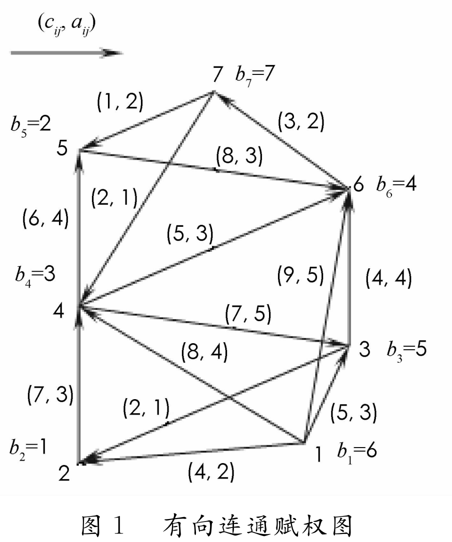

图 1　有向连通赋权图

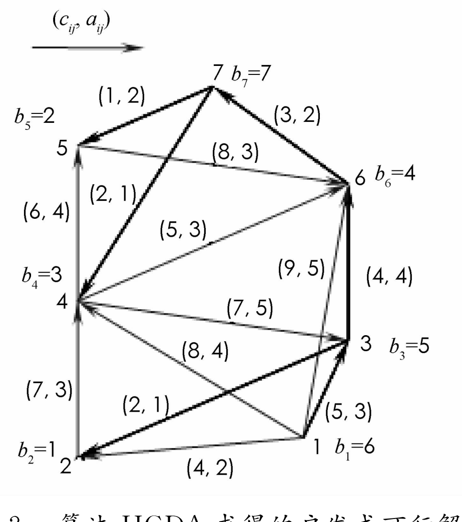

图 2　算法 HGDA 求得的启发式可行解

如果将图 1 中的 c_{ij} 的赋值进行改动，令 $c_{56}=4$，$c_{36}=8$，其它的 c_{ij} 和 a_{ij} 保持不变，则求解步骤如下：

1）与上述步骤 1 一样，用贪婪算法求得 o_2 问题的最优解：

$y_{12}=y_{13}=y_{32}=y_{36}=y_{46}=y_{67}=y_{74}=y_{75}=1$，$y_{14}=y_{16}=y_{24}=y_{43}=y_{45}=y_{56}=0$.

2）与上述步骤 1 一样，求得相同的 $M[j]$. 排序得 $c_{32}<c_{12}$，而对 c_{16}，c_{36}，c_{46}，c_{56} 进行排序则变为 $c_{56}<c_{46}<c_{36}<c_{16}$.

3）因为 $M[2]>1$ 且 $y_{32}=1$，令 $y_{12}=0$；因为 $M[6]>1$ 且 $y_{46}=1$，而 $a_{56}=3>b_5$，令 $y_{36}=y_{16}=y_{56}=0$.

4）此时 $y_{12}=y_{14}=y_{16}=y_{24}=y_{45}=y_{36}=y_{43}=y_{56}=0$，$y_{13}=y_{32}=y_{46}=y_{67}=y_{75}=y_{74}=1$.

所选的弧如图 3 中的粗线所示. 因为存在圈 $S'=\{4,6,7,4\}$，圈 S' 的节点入度都为 1 且 $c_{46}>c_{67}>c_{74}$，所以令 $y_{46}=0$，$Q=Q\cup(4,6)=\{(4,6)\}$.

5）此时 $M[6]=0$，因为 $c_{56}<c_{46}<c_{36}<c_{16}$，$a_{56}=3>b_5$，弧$(4,6)\in Q$，$a_{36}=4<b_3$，而弧$(3,6)\notin Q$，$y_{32}=1$，且 $a_{32}+a_{36}=5=b_5$，故令 $y_{32}=1$.

6）此时 $y_{12}=y_{14}=y_{16}=y_{24}=y_{45}=y_{46}=y_{43}=y_{56}=0$，$y_{13}=y_{32}=y_{36}=y_{67}=y_{75}=y_{74}=1$.

图 4 中，粗线表示通过应用算法 *HGDA* 找到的资源受限的最小赋权支撑树形图的可行解.

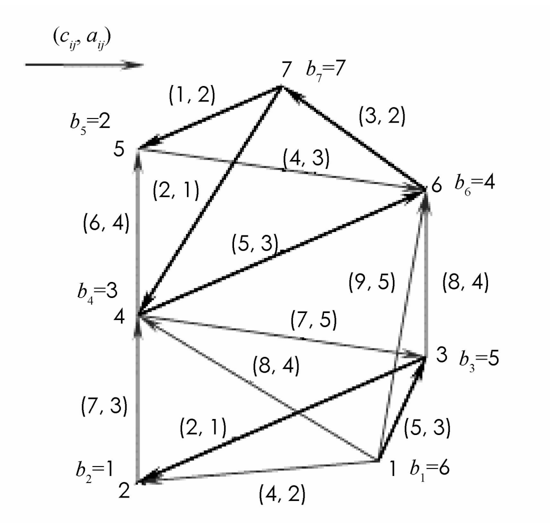

图 3　有向圈 7—4—6—7

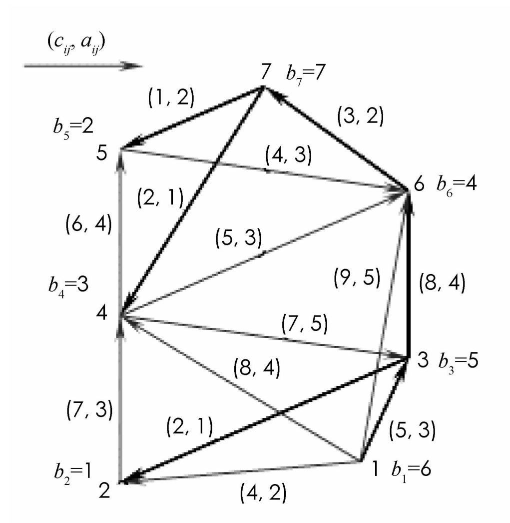

图 4　算法 *HGDA* 求得的启发式可行解

4　总　　结

本文主要对有向图中资源受限的最小赋权树形图问题提出一个新的贪婪分解启发式算法. 首先把原始的 *RMWA* 模型分解成一个最小树形图问题和 n 个独立的特殊背包问题. 其次，针对 n 个独立的特殊背包问题，设计贪婪算法求其最优解. 接下来，调整该贪婪算法得到的最优解使其满足树形图条件得到 *RMWA* 问题的一个可行解. 最后，给出算列阐述如何应用贪婪分解启发式算法求解 *RMWA* 问题的可行解的过程. 该 *HGDA* 算法只是一个启发式的算法，其中间的算法步骤还有一定的改进空间.

参考文献：

[1] GUIGNARD M，ROSENWEIN M B. An Application of Lagrangean Decomposition to the Resource-Constrained Minimum Weighted Arborescence Problem [J]，Networks，1990 ，20：345－359.

[2] FISCHETTI M，VIGO D. A Branch-and-Cut Algorithm for the Resource-Constrained Minimum-Weight Arborescence Problem [J]. Networks，1997，29：55－67.

[3] HANDLER G Y，ZANG I. A Dual Algorithm for the Constrained Shortest Path Problem [J]. Networks，1980，10(4)：293－309.

[4] 李伟东，葛　瑜，张同全，等. 限制性的带核元划分问题[J]. 云南大学学报(自然科学版)，2010，32(1)：6－11.

[5] 朱娟萍，吴旭亭，杨子兰. 网络中支撑树的边扩容问题[J]. 云南大学学报(自然科学版)，2013，35(5)：592－597.

[6] KITCHING M，BACCHUS F. Exploiting Decomposition in Constraint Optimization Problem [J]. Lecture Notes in Computer Science，2008，5202：478－492.

[7] KITCHING M，BACCHUS F. Exploiting Decomposition on Constraint Problems with High Tree-Width [C]//IJCAI 2009，Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence. California，USA：Pasadena，2009：525－531.

[8] KITCHING M，BACCHUS F. Set Branching in Constraint Optimization [C]//IJCAI 2009，Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence. California，USA：Pasadena，2009：532－537.

[9] YUAN Min-di，JIANG Chong，LI Shen，et al. Message Passing Algorithm for the Generalized Assignment Problem [J]. Lecture Notes in Computer Science，2014，8707：423－434.

[10] CHU G，GANGE G，STUCKEY P J. Lagrangian Decomposition via Sub-problem Search [C]//Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming. Berlin：Springer International Publishing，2016.

On New Heuristic Greedy Decomposition Algorithm for Resource Constrained Minimum Weight Arborescence Problem

YANG Zi-lan[1]， ZHU Juan-ping[2]， LI Rui[1]

1. College of Tourism and Culture，Yunnan University，Lijiang Yunnan 674199，China；

2. Dept. of Math.，Yunnan University，Kunming 650091，China

Abstract：The resource constrained minimum weight arborescence problem (*RMWA*) is NP-Hard. In this paper，a new heuristic greedy decomposition algorithm has been presented for this problem. By decomposing the objective function and the constraints，the *RMWA* model is decomposed into a minimum weight arborescence problem and special independent knapsack problems. A greedy algorithm is designed for solving these special knapsack problems，and the adjustment of the solution is followed. The greedy algorithm runs in time $O(nm\log_2 m)$ and the whole heuristic algorithm runs in $O(nm^2)$. Also，we give some example to illustrate how this new heuristic algorithm works.

Key words：constrained resource；arborescence；knapsack problem；decomposition；greedy algorithm；heuristic algorithm

责任编辑　潘春燕
崔玉洁