

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.08.005

弱链对角占优 B -矩阵线性互补问题的误差界估计^①

孙德淑

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院, 贵阳 550025

摘要: 利用弱链对角占优 M -矩阵的逆矩阵的无穷大范数的范围, 给出了弱链对角占优 B -矩阵线性互补问题误差界新的估计式, 进而给出 B -矩阵线性互补问题误差界的估计式. 新估计式改进了已有文献的结果.

关键词: 误差界; 线性互补问题; 弱链对角占优矩阵; B -矩阵

中图分类号: O151.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2017)08-0025-07

线性互补问题在诸多领域具有广泛的应用, 如二次规划、双矩阵对策、市场均衡等^[1-3]. 线性互补问题的数学模型为求 $x \in \mathbb{R}^n$, 满足

$$x \geq 0 \quad Mx + q \geq 0 \quad (Mx + q)^T x = 0$$

记作 $LCP(M, q)$, 其中 $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $q \in \mathbb{R}^n$ 为给定的矩阵和向量.

线性互补问题解的性质主要取决于所定义矩阵的性质. 例如, 当矩阵是 P -矩阵(即它的所有主子式都是正的^[4])时, 线性互补问题有唯一解^[2].

文献[5]给出结果: 设 M 是 P -矩阵, 则

$$\|x - x^*\|_\infty \leq \max_{d \in [0, 1]^n} \|(I - D + DM)^{-1}\|_\infty \|r(x)\|_\infty$$

其中 x^* 是 $LCP(M, q)$ 的解, $r(x) = \min\{x, Mx + q\}$, $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ ($0 \leq d_i \leq 1$). 特别是, 近年来, 许多专家和学者对特殊矩阵线性互补问题的误差界进行了广泛探讨, 给出了一系列很好的估计式^[6-13]. 本文在文献[14]的基础上, 继续讨论 B -矩阵线性互补问题的误差界, 得到了一些新的估计式. 同时, 理论证明新估计式优于文献[12-13]的结果. 最后, 用数值示例表明结果的有效性.

1 预备知识

用 $\mathbb{N}$ 表示全体正整数的集合. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 记

$$r_i(A) = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

若 $|a_{ii}| \geq r_i(A)$ ($\forall i \in \mathbb{N}$) 且对每个 $i \notin J(A) = \{i \in \mathbb{N} : |a_{ii}| > r_i(A)\} \neq \emptyset$ 存在非零元素链 $a_{i_1 i_2}, a_{i_2 i_3}, \dots, a_{i_{l-1} i_l}$ 满足 $j \in J(A)$, 则称 A 为弱链对角占优矩阵^[15].

定义 1^[4] 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若对任意的 $i, j \in \mathbb{N}$, 有

① 收稿日期: 2016-09-26
基金项目: 国家自然科学基金项目(11361074; 11501141); 贵州省科技厅联合基金项目[(2015)7206]; 贵州省教育厅自然科学基金项目[(2015)420]; 贵州民族大学科研基金项目(16yjsxm002, 16yjsxm040).
作者简介: 孙德淑(1980-), 女, 山东临沂人, 讲师, 硕士, 主要从事矩阵理论及其应用的研究.

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ik} > 0 \quad \frac{1}{n} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ik} \right) > a_{ij} \quad i \neq j$$

则称 $\mathbf{A}$ 为 B -矩阵.

定义 2^[13] 设 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{C}$$

其中 $\mathbf{B}^+$ 是弱链对角占优矩阵且其主对角元素恒为正, 则称 $\mathbf{A}$ 为弱链对角占优 B -矩阵.

文献[9]给出结果: 设 $\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 B -矩阵, 可表示为 $\mathbf{M} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{C}$, 其中

$$\mathbf{B}^+ = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} m_{11} - r_1^+ & \mathbf{L} & m_{1n} - r_1^+ \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ m_{n1} - r_n^+ & \mathbf{L} & m_{nn} - r_n^+ \end{pmatrix} \quad (1)$$

且 $r_i^+ = \max\{0, m_{ij} \mid j \neq i\}$, 则

$$\max_{d \in [0, 1]^n} \|(\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{DM})^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{n-1}{\min\{\beta, 1\}} \quad (2)$$

其中 $\beta = \min_{i \in \mathbb{N}} \{\beta_i\}$ 和 $\beta_i = b_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^n |b_{ij}|$.

文献[12]给出了优于(2)式的新估计式: 设 $\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 B -矩阵, 可表示为 $\mathbf{M} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{C}$, 其中 $\mathbf{B}^+ = (b_{ij})$ 形如(1)式, 则

$$\max_{d \in [0, 1]^n} \|(\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{DM})^{-1}\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{1}{\bar{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}|\right) \quad (3)$$

其中 $\bar{\beta}_i = b_{ii} - \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}|$, $l_i(\mathbf{B}^+) = \max_{k \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{b_{ii}} \sum_{j=k, j \neq i}^n |b_{ij}| \right\}$ 且 $\prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{1}{\bar{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}|\right) = 1$ (若 $i = 1$).

文献[13]又给出了新估计式: 设 $\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是弱链对角占优 B -矩阵, 可表示为 $\mathbf{M} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{C}$, 其中 $\mathbf{B}^+ = (b_{ij})$ 形如(1)式, 则

$$\max_{d \in [0, 1]^n} \|(\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{DM})^{-1}\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{b_{jj}}{\bar{\beta}_j} \quad (4)$$

其中 $\bar{\beta}_i = b_{ii} - \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| > 0$ 且 $\prod_{j=1}^{i-1} \frac{b_{jj}}{\bar{\beta}_j} = 1$ (若 $i = 1$).

为讨论方便, 给出如下符号: 设 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i, j, k \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, $i+1 \leq k \leq n$, 记

$$u_i(\mathbf{A}) = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \quad u_n(\mathbf{A}) = 0$$

$$l_{ki}(\mathbf{A}) = \frac{1}{|a_{kk}|} \sum_{j=i, j \neq k}^n |a_{kj}| \quad l_i(\mathbf{A}) = \max_{i \leq k \leq n} \{l_{ki}(\mathbf{A})\} \quad l_n(\mathbf{A}) = 0$$

$$t_{ki}(\mathbf{A}) = \begin{cases} \frac{|a_{ki}|}{|a_{kk}| - \sum_{j=i+1, j \neq k}^n |a_{kj}|} & a_{ki} \neq 0 \\ 0 & a_{ki} = 0 \end{cases} \quad t_i(\mathbf{A}) = \begin{cases} \max_{i+1 \leq k \leq n} \{t_{ki}(\mathbf{A})\} & 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & i = n \end{cases}$$

2 主要结论

引理 1^[14] 设 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是弱链对角占优的 M -矩阵, 则

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{|a_{ii}| (1 - u_i(\mathbf{A})t_i(\mathbf{A}))} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{u_j(\mathbf{A})}{1 - u_j(\mathbf{A})t_j(\mathbf{A})}\right)$$

其中 $\prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{u_j(\mathbf{A})}{1 - u_j(\mathbf{A})t_j(\mathbf{A})}\right) = 1$ (若 $i = 1$).

引理 2^[12] 设 $\gamma > 0$ 且 $\eta \geq 0$, 则对任意的 $x \in [0, 1]$, 有

$$\frac{1}{1-x+\gamma x} \leq \frac{1}{\min\{\gamma, 1\}} \quad \frac{\eta x}{1-x+\gamma x} \leq \frac{\eta}{\gamma}$$

定理 1 设 $\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是弱链对角占优 B -矩阵, 可表示为 $\mathbf{M} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{C}$, 其中 $\mathbf{B}^+ = (b_{ij})$ 形如 (1) 式, 则

$$\max_{d \in [0, 1]^n} \|(\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{DM})^{-1}\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\hat{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}|\right) \quad (5)$$

其中 $\hat{\beta}_i = b_{ii} - \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| t_i(\mathbf{B}^+)$ 且 $\prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}|\right) = 1$ (若 $i = 1$).

证 令 $\mathbf{M}_D = \mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{DM}$. 则

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{DM} = \mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{D}(\mathbf{B}^+ + \mathbf{C}) = \mathbf{B}_D^+ + \mathbf{C}_D$$

其中 $\mathbf{B}_D^+ = \mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{DB}^+$. 由文献[13]中定理 2 的证明知 $\mathbf{B}_D^+$ 是弱链对角占优的非奇异 M -矩阵, 且

$$\|\mathbf{M}_D^{-1}\|_{\infty} \leq \|(\mathbf{I} + (\mathbf{B}_D^+)^{-1} \mathbf{C}_D)^{-1}\|_{\infty} \|(\mathbf{B}_D^+)^{-1}\|_{\infty} \leq (n-1) \|(\mathbf{B}_D^+)^{-1}\|_{\infty} \quad (6)$$

由引理 1 知

$$\|(\mathbf{B}_D^+)^{-1}\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1-d_i+b_{ii}d_i)(1-u_i(\mathbf{B}_D^+)t_i(\mathbf{B}_D^+))} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{u_j(\mathbf{B}_D^+)}{1-u_j(\mathbf{B}_D^+)t_j(\mathbf{B}_D^+)}\right)$$

由引理 2 知, 对任意的 $i, j, k \in \mathbb{N}$, 有

$$u_i(\mathbf{B}_D^+) = \frac{\sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| d_i}{1-d_i+b_{ii}d_i} \leq \frac{\sum_{j=i+1}^n |b_{ij}|}{b_{ii}} = u_i(\mathbf{B}^+)$$

$$t_k(\mathbf{B}_D^+) = \max_{i+1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{|b_{ki}| d_k}{1-d_k+b_{kk}d_k - \sum_{j=i+1, j \neq k}^n |b_{kj}| d_k} \right\} \leq \max_{i+1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{|b_{ki}|}{b_{kk} - \sum_{j=i+1, j \neq k}^n |b_{kj}|} \right\} = t_k(\mathbf{B}^+) < 1$$

且

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-d_i+b_{ii}d_i)(1-u_i(\mathbf{B}_D^+)t_i(\mathbf{B}_D^+))} &= \frac{1}{1-d_i+b_{ii}d_i - \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| d_i t_i(\mathbf{B}_D^+)} \leq \\ &= \frac{1}{\min\{b_{ii} - \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| t_i(\mathbf{B}^+), 1\}} = \\ &= \frac{1}{\min\{\hat{\beta}_i, 1\}} \end{aligned} \quad (7)$$

进而, 由引理 2 知

$$\begin{aligned} \frac{u_i(\mathbf{B}_D^+)}{1-u_i(\mathbf{B}_D^+)t_i(\mathbf{B}_D^+)} &= \frac{\sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| d_i}{1-d_i+b_{ii}d_i - \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| d_i t_i(\mathbf{B}_D^+)} \leq \\ &= \frac{\sum_{j=i+1}^n |b_{ij}|}{b_{ii} - \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| t_i(\mathbf{B}^+)} = \\ &= \frac{1}{\hat{\beta}_i} \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| \end{aligned} \quad (8)$$

由 (6) 式和 (7) 式知

$$\|(\mathbf{B}_D^+)^{-1}\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\min\{\hat{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}| \right) \quad (9)$$

因此, 由(6)式及(9)式知(5)式成立.

因为 B -矩阵是弱链对角占优 B -矩阵^[13], 故得如下推论:

推论 1 设 $\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 B -矩阵, 可表示为 $\mathbf{M} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{C}$, 其中 $\mathbf{B}^+ = (b_{ij})$ 形如(1)式, 则

$$\max_{d \in [0, 1]^n} \|(\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{DM})^{-1}\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\hat{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}| \right) \quad (10)$$

其中 $\hat{\beta}_i$ 如定理 1 所定义.

接下来, 对(4)式及(5)式进行比较.

定理 2 设 $\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是弱链对角占优 B -矩阵, 可表示为 $\mathbf{M} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{C}$, 其中 $\mathbf{B}^+ = (b_{ij})$ 形如(1), 则

$$\sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\hat{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}| \right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\tilde{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{1}{\tilde{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}| \right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{b_{jj}}{\bar{\beta}_j}$$

其中 $\bar{\beta}_i$, $\tilde{\beta}_i$ 及 $\hat{\beta}_i$ 分别如(3)式, (4)式及(5)式所定义.

证 因 $\mathbf{B}^+$ 是弱链对角占优的且主对角元为正, 故对任意的 $k \in \mathbb{N}$, $i+1 \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq n-1$, 若 $b_{ki} \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} l_{ki}(\mathbf{B}^+) - t_{ki}(\mathbf{B}^+) &= \frac{|b_{ki}| + \sum_{j=i+1, \neq k}^n |b_{kj}|}{|b_{kk}|} - \frac{|b_{ki}|}{|b_{kk}| - \sum_{j=i+1, \neq k}^n |b_{kj}|} = \\ &= \frac{\sum_{j=i+1, \neq k}^n |b_{kj}| (|b_{kk}| - |b_{ki}| - \sum_{j=i+1, \neq k}^n |b_{kj}|)}{|b_{kk}| (|b_{kk}| - \sum_{j=i+1, \neq k}^n |b_{kj}|)} \geq 0 \end{aligned}$$

若 $b_{ki} = 0$, 则 $l_{ki}(\mathbf{B}^+) \geq t_{ki}(\mathbf{B}^+) = 0$. 因此, 对任意的 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$0 \leq t_i(\mathbf{B}^+) \leq l_i(\mathbf{B}^+) < 1 \quad (11)$$

由(11)式, 可得对任意的 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$\bar{\beta}_i = b_{ii} - \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| l_i(\mathbf{B}^+) \leq b_{ii} - \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| t_i(\mathbf{B}^+) = \hat{\beta}_i \quad (12)$$

由(12)式, 可得对任意的 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$\frac{1}{\min\{\hat{\beta}_i, 1\}} \leq \frac{1}{\min\{\bar{\beta}_i, 1\}} \quad (13)$$

且对任意的 $1 \leq j \leq n-1$, 有

$$1 + \frac{1}{\hat{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}| \leq 1 + \frac{1}{\bar{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}| \quad (14)$$

由(13)式及(14)式, 可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\hat{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}| \right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{1}{\bar{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}| \right) \quad (15)$$

另外, 注意到

$$\tilde{\beta}_i = b_{ii} - \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| \quad \tilde{\beta}_i = b_{ii} - \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| l_i(\mathbf{B}^+)$$

且 $l_{ki}(\mathbf{B}_D^+) \leq l_k(\mathbf{B}^+) < 1$. 因此, 对任意的 $i \in N$, 有 $\tilde{\beta}_i \leq \bar{\beta}_i$, 且

$$\frac{1}{\min\{\tilde{\beta}_i, 1\}} \leq \frac{1}{\min\{\bar{\beta}_i, 1\}} \quad (16)$$

同时, 对任意的 $1 \leq j \leq n-1$, 有

$$1 + \frac{1}{\tilde{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}| \leq 1 + \frac{1}{\bar{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}| = \frac{1}{\tilde{\beta}_j} (\tilde{\beta}_j + \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}|) = \frac{b_{jj}}{\tilde{\beta}_j} \quad (17)$$

由(16)式及(17)式, 可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\tilde{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{1}{\tilde{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}|\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{b_{jj}}{\tilde{\beta}_j} \quad (18)$$

综上可得, 由(15)式及(18)式知结论成立.

注: 定理 2 表明了(5)式优于(3)式、(4)式, 但当 n 非常大时, (5)式的计算量要大于(3)式、(4)式.

类似于文献[9]中定理 2.4 的证明, 对 P -矩阵 $\mathbf{M}$, 可得如下结果:

$$\beta_p(\mathbf{M}) = \max_{d \in [0, 1]^n} \|(\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{DM})^{-1} \mathbf{D}\|_p$$

其中 $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ ($0 \leq d_i \leq 1$) 且 $\|\cdot\|_p$ 是向量诱导的矩阵范数. 此常量常用来度量 P -矩阵线性互补问题解的灵敏度^[1].

定理 3 设 $\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是弱链对角占优 B -矩阵, 可表示为 $\mathbf{M} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{C}$, 其中 $\mathbf{B}^+ = (b_{ij})$ 形如(1)式, 则

$$\beta_\infty(\mathbf{M}) \leq \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\hat{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left[1 + \frac{1}{\hat{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}|\right] \quad (19)$$

其中 $\hat{\beta}_i$ 如定理 1 所定义.

推论 2 设 $\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 B -矩阵, 可表示为 $\mathbf{M} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{C}$, 其中 $\mathbf{B}^+ = (b_{ij})$ 形如(1)式, 则

$$\beta_\infty(\mathbf{M}) \leq \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{\min\{\hat{\beta}_i, 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left[1 + \frac{1}{\hat{\beta}_j} \sum_{k=j+1}^n |b_{jk}|\right] \quad (20)$$

3 数值例子

例 1^[12] 考虑 B -矩阵:

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.4 & 0.5 \\ -0.1 & 1.7 & 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & -0.1 \frac{k}{k+1} & 1.8 & 0.7 \\ 0 & 0.7 & 0.8 & 1.8 \end{bmatrix}$$

其中 $k \geq 1$. 则 $\mathbf{M}_k = \mathbf{B}_k^+ + \mathbf{C}_k$, 其中

$$\mathbf{B}_k^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.1 & 0 \\ -0.8 & 1 & 0 & -0.1 \\ 0 & -0.1 \frac{k}{k+1} - 0.8 & 1 & -0.1 \\ -0.8 & -0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由(2)式得

$$\max_{d \in [0, 1]^n} \|(\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{DM})^{-1}\|_\infty \leq \frac{3}{\min\{\beta, 1\}} = 30(k+1)$$

易见 $30(k+1) \rightarrow +\infty (k \rightarrow +\infty)$.

由(3)式得

$$\max_{d \in [0, 1]^n} \| (I - D + DM)^{-1} \|_{\infty} \leq 14.104\ 4$$

由(4) 式得

$$\max_{d \in [0, 1]^n} \| (I - D + DM)^{-1} \|_{\infty} \leq 15.267\ 5$$

由(5) 式得

$$\max_{d \in [0, 1]^n} \| (I - D + DM)^{-1} \|_{\infty} \leq 13.723\ 0$$

可见(5) 式优于(2) — (4) 式.

例 2^[13] 考虑弱链对角占优 B -矩阵:

$$M = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ -0.1 & 1.5 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & -0.1 & 1.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.8 & 1.8 \end{pmatrix}$$

则 $M = B^+ + C$, 其中

$$B^+ = \begin{pmatrix} 1 & -0.3 & -0.1 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0 & -0.4 \\ 0 & -0.6 & 1 & -0.4 \\ -0.4 & -0.4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由(4) 式得

$$\max_{d \in [0, 1]^n} \| (I - D + DM)^{-1} \|_{\infty} \leq 41.111\ 1$$

由(5) 式得

$$\max_{d \in [0, 1]^n} \| (I - D + DM)^{-1} \|_{\infty} \leq 38.633\ 4$$

可见(5) 式优于(4) 式.

4 结 论

文中讨论了弱链对角占优 B -矩阵的 $\max_{d \in [0, 1]^n} \| (I - D + DM)^{-1} \|_{\infty}$ 的估计问题, 得到了几个新的上界估计式. 通过数值算例验证了本文的结果在一定条件下优于文献[9, 12, 13] 中的结果.

参考文献:

- [1] CHEN Xiao-jun, XIANG Shu-huang. Perturbation Bounds of P -Matrix Linear Complementarity Problems [J]. SIAM Journal on Optimization, 2007, 18(4): 1250—1265.
- [2] COTTLE R W, PANG Jong-shi, STONE R E. The Linear Complementarity Problem [M]. Boston: Academic Press, 1992.
- [3] MURTY K G. Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming [M]. Berlin: Heldermann Verlag Press, 1988.
- [4] PENA J M. A Class of P -Matrices with Applications to the Localization of the Eigenvalues of a Real Matrix [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2001, 22(4): 1027—1037.
- [5] CHEN Xiao-jun, XIANG Shu-huang. Computation of Error Bounds for P -Matrix Linear Complementarity Problem [J]. Mathematical Programming, 2006, 106(3): 513—525.
- [6] CHEN Ting-ting, LI Wen, WU Xian-ping, et al. Error Bounds for Linear Complementarity Problems of MB-Matrices [J]. Numerical Algorithms, 2015, 70(2): 341—356.
- [7] DAI Ping-fan. Error Bounds for Linear Complementarity Problems of DB -Matrices [J]. Linear Algebra and its Applications, 2011, 434(3): 830—840.

- [8] DAI Ping-fan, LU Chang-jing, LI Yao-tang. New Error Bounds for the Linear Complementarity Problem with an SB -Matrix [J]. Numerical Algorithms, 2013, 64(4): 741–757.
- [9] GARCÍA-ESNAOLA M, PEÑA J M. Error Bounds for Linear Complementarity Problems for B -Matrices [J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(7): 1071–1075.
- [10] GARCÍA-ESNAOLA M, PEÑA J M. Error Bounds for Linear Complementarity Problems Involving BS -Matrices [J]. Applied Mathematics Letters, 2012, 25(10): 1379–1383.
- [11] GARCÍA-ESNAOLA M, PEÑA J M. B -Nekrasov Matrices and Error Bounds for Linear Complementarity Problems [J]. Numerical Algorithms, 2016, 72(2): 435–445.
- [12] LI Chao-qian, LI Yao-tang. Note on Error Bounds for Linear Complementarity Problems for B -Matrices [J]. Applied Mathematics Letters, 2016(57): 108–113.
- [13] LI Chao-qian, LI Yao-tang. Weakly Chained Diagonally Dominant B -Matrices and Error Bounds for Linear Complementarity Problems [J]. Numerical Algorithms, 2016, 73(4): 985–998.
- [14] 潘淑珍, 陈神灿. 弱链对角占优矩阵 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 的上界估计 [J]. 福州大学学报(自然科学版), 2012, 40(3): 281–284.
- [15] SHIVAKUMAR P N, CHEW K H. A Sufficient Condition for Nonvanishing of Determinants [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1974, 43(1): 63–66.

Error Bounds for Linear Complementarity Problems of Weakly Chained Diagonally Dominant B -Matrices

SUN De-shu

College of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China

Abstract: Based on the range for the infinity norm of inverse matrix of a weakly chained diagonally dominant M -matrix, some new error bounds for the linear complementarity problem have been obtained when the involved matrix is a weakly chained diagonally dominant B -matrix. These bounds improve some existing results.

Key words: error bounds; linear complementarity problems; weakly chained diagonally dominant matrices; B -matrices

责任编辑 胡 杨