第 42 卷　第 8 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2017 年 8 月
Vol. 42　No. 8　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Aug.　2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.08.006

半群 $L_D(n, r)$的极大正则子半群[①]

罗 永 贵

贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550001

摘要: 设自然数 $n \geqslant 4$，DO_n 是有限链$[n]$上的保反序奇异变换半群. 对任意的 $r(1 \leqslant r \leqslant n-1)$，记 $L_D(n, r) = \{\alpha \in DO_n: |\mathrm{im}(\alpha)| \leqslant r\}$ 为半群 DO_n 的双边理想. 通过对秩为 r 的幂等元和格林关系的分析，获得了半群 $L_D(n, r)$ 的极大正则子半群的完全分类.

关　键　词: 保序；保反序；奇异变换半群；极大正则子半群；完全分类

中图分类号: O152.7　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1000-5471(2017)08-0032-06

设 S 是(正则)半群，M 是 S 的真(正则)子半群，对 S 的任意(正则)子半群 T 有 $M \subseteq T$ 推出 $T = M$ 或 $T = S$，则 M 是 S 的极大(正则)子半群. 最感兴趣的是：当半群 S 是正则半群时，如何刻划 S 的极大正则子半群. 对于有限半群的极大(正则)子半群的研究目前已有许多结果[1-6].

设$[n] = \{1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}(n \geqslant 4)$并赋予自然数的大小序. T_n 与 S_n 分别表示$[n]$上的全变换半群和对称群，$\mathrm{Sing}_n = T_n \backslash S_n$ 是$[n]$上的奇异变换半群. 设 $\alpha \in \mathrm{Sing}_n$，如果对任意的 $x, y \in [n]$，$x \leqslant y$ 推出 $x\alpha \leqslant y\alpha$，则 α 是保序的，记 O_n 为$[n]$上的保序有限奇异变换半群. 如果对任意的 $x, y \in [n]$，$x \leqslant y$ 推出 $x\alpha \geqslant y\alpha$，则 α 是反序的，记 D_n 为$[n]$上的所有反序变换构成的集合. 令 $DO_n = O_n \cup D_n$，易证，DO_n 是 Sing_n 的子半群，称为保反序有限奇异变换半群. 记 $L_D(n, r) = \{\alpha \in DO_n: |\mathrm{im}(\alpha) \leqslant r\}(1 \leqslant r \leqslant n-1)$. 易见 $L_D(n, r)$ 是 DO_n 的子半群且对任意的 $\alpha \in L_D(n, r)$，$\beta, \gamma \in DO_n$ 均有 $|\mathrm{im}(\beta\alpha\gamma)| \leqslant r$，即 $\beta\alpha\gamma \in L_D(n, r)$，因而 $L_D(n, r)$ 是 DO_n 的双边理想. 文献[1]证明了半群 DO_n 的极大子半群的结构和完全分类. 文献[2]确定了半群 DO_n 的理想 $L_D(n, r)$ 的极大子半群的结构和完全分类. 文献[3]得到了半群 DO_n 的理想 $L_D(n, r)$ 的秩和相关秩. 目前还没有人刻划半群 $L_D(n, r)$ 的极大正则子半群. 因此，主要考虑半群 DO_n 的理想 $L_D(n, r)$ 的极大正则子半群的结构和完全分类.

1　预备知识

设 P, Q 是自然序集$[n]$的非空子集，如果对任意的 $a \in P$，$b \in Q$ 有 $a < b$，则 P 小于 Q，记为 $P < Q$. 若 A 是自然序集$[n]$的非空子集，对任意的 $k \in [n]$，如果 $\min A \leqslant k \leqslant \max A$ 都有 $k \in A$，则 A 是$[n]$的凸子集. 设 $x, y \in [n]$，$x < y$，令$[x, y] = \{m \in [n]: x \leqslant m \leqslant y\}$，$[x, y) = \{m \in [n]: x \leqslant m < y\}$，$(x, y] = \{m \in [n]: x < m \leqslant y\}$，$(x, y) = \{m \in [n]: x < m < y\}$. 设 $\alpha \in L_D(n, r)$，用 $\mathrm{im}(\alpha)$ 表示 α 的象集，$\ker(\alpha)$ 表示$[n]$上如下等价关系：$\ker(\alpha) = \{(x, y) \in [n] \times [n]: x\alpha = y\alpha\}$，对任意的 $t \in \mathrm{im}(\alpha)$，$t\alpha^{-1}$ 表示 t 的原象集. 设 $\alpha \in L_D(n, r)$，对任意 $x, y \in \mathrm{im}(\alpha)$ 满足 $x < y$，如果 α 是保序的，则 $x\alpha^{-1} < y\alpha^{-1}$；如果 α 是反序的，则 $x\alpha^{-1} > y\alpha^{-1}$. 若 $|\mathrm{im}(\alpha)| = k$，$1 \leqslant k \leqslant r \leqslant n-1$，则由保反序性容易验证 α 有如下表示法(称为 α 的标准表示)，

---

① 收稿日期：2016-10-10
基金项目：贵州省科学技术基金-贵州师范大学联合科技基金资助项目(黔科合 LH 字(2014)7056 号).
作者简介：罗永贵(1985-)，男，贵州安顺人，讲师，硕士，主要从事半群代数理论的研究.

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_{k-1} & A_k \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix}$$

其中，对任意的 $i,j \in [1,k]$ 有 A_i 是 $[n]$ 的凸子集，当 $i<j$ 时，有 $A_i<A_j$ 且 $a_i<a_j$ 或 $A_i>A_j$ 且 $a_i<a_j$.

为叙述方便，引用 Green -等价关系[7]．易证：在半群 $L_D(n,r)$ 中 $\mathscr{L}$，$\mathscr{R}$，$\mathscr{J}$ 有如下刻划：

对任意的 $\alpha,\beta \in L_D(n,r)$，有

$(\alpha,\beta)\in\mathscr{L}\Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)$　　$(\alpha,\beta)\in\mathscr{R}\Leftrightarrow \ker(\alpha)=\ker(\beta)$　　$(\alpha,\beta)\in\mathscr{J}\Leftrightarrow |\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\beta)|$

其中在半群 $L_D(n,r)$ 上 $\mathscr{D}=\mathscr{J}$(注：周期半群上，特别地，有限半群上有 $\mathscr{D}=\mathscr{J}$[7])．易见，$\mathscr{L}\subseteq\mathscr{D}$，$\mathscr{R}\subseteq\mathscr{D}$. 对 $k\in[1,r]$，记 $\mathscr{D}_k=\{\alpha\in L_D(n,r):|\mathrm{im}(\alpha)|=k\}$．当 $k=1$ 时，有 $\mathscr{D}_1^O=\mathscr{D}_1^D$；当 $k\in[2,r]$ 时，有 $\mathscr{D}_k^O=\mathscr{D}_k\cap O_n$，$\mathscr{D}_k^D=\mathscr{D}_k\cap D_n$ 且 $\mathscr{D}_k=\mathscr{D}_k^O\cup\mathscr{D}_k^D$，$\mathscr{D}_k^O\cap\mathscr{D}_k^D=\varnothing$．对任意的 $k\in[1,n-1]$ 有 $E(\mathscr{D}_k^O)=E(\mathscr{D}_k)$；对任意的 $k\in[2,n-1]$ 且 $\alpha\in\mathscr{D}_k$ 都有 $|\mathscr{H}_\alpha|=2^{[1-2]}$．易见 $\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2,\cdots,\mathscr{D}_{k-1},\mathscr{D}_k,\mathscr{D}_{k+1},\cdots,\mathscr{D}_{r-1},\mathscr{D}_r$ 恰好是 $L_D(n,r)$ 的 r 个 $\mathscr{D}$-类，并且 $L_D(n,r)=\{\alpha\in DO_n:|\mathrm{im}(\alpha)|\leqslant r\}=\bigcup_{k=1}^{r}\mathscr{D}_k$．不难验证 DO_n 具有如下包含关系的双边理想链 $L_D(n,1)\subset L_D(n,2)\subset L_D(n,3)\subset\cdots\subset L_D(n,k-1)\subset L_D(n,k)\subset L_D(n,k+1)\subset\cdots\subset L_D(n,n-2)\subset L_D(n,n-1)=DO_n$.

研究 $L_D(n,r)$ 的极大正则子半群的切入点就是要弄清楚 $\mathscr{D}_r$ 中幂等元的分布情况．于是，给出一类至关重要的幂等元.

当 $r=1$ 时，对任意的 $j\in[n]$ 都有 $\alpha=\begin{pmatrix}[n]\\ j\end{pmatrix}\in\mathscr{D}_1$．易证：$\alpha^2=\alpha$，即 $\mathscr{D}_1=E(\mathscr{D}_1)$.

当 $r=2$ 时，对任意的 $j\in[1,n-1]$，易证 $\varepsilon_j=\begin{pmatrix}[1,j] & [j+1,n]\\ j & j+1\end{pmatrix}\in E(\mathscr{D}_2)$.

令 $R_C=\{\alpha\in\mathscr{D}_2:$ 存在 $j\in[1,n-1]$ 使得 $\ker(\alpha)=\ker(\varepsilon_j)\}$，则 $\mathscr{D}_2\backslash R_C=\varnothing$，即 $\mathscr{D}_2=\mathscr{R}_C$.

当 $r\in[3,n-1]$ 时，对任意的 $j\in[1,n-r+1]$，易证

$$\varepsilon_j=\begin{pmatrix}[1,j] & \{j+1\} & \cdots & \{i-1\} & \{i\} & \{i+1\} & \cdots & \{r+j-2\} & [r+j-1,n]\\ j & j+1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & r+j-2 & r+j-1\end{pmatrix}\in E(\mathscr{D}_r)$$

令 $R_C=\{\alpha\in\mathscr{D}_r:\exists j\in[1,n-r+1],\ \mathrm{s.t.}\ \ker(\alpha)=\ker(\varepsilon_j)\}$，则 $\mathscr{D}_r\backslash\mathscr{R}_C\neq\varnothing$.

众所周知，在研究半群的极大正则子半群时，主因子起到非常好的作用．因此，需要给出半群 DO_n 的主因子．按照主因子的定义可得，半群 DO_n 的每个主因子是一个 Ress 商半群 $L_D(n,k)/L_D(n,k-1)$，记为 P_k．为方便，可将 P_k 理解为 $\mathscr{D}_k\cup\{0\}$，即 $P_k=\mathscr{D}_k\cup\{0\}$，其乘法运算 $\cdot$ 定义为：如果 $\alpha\beta\in\mathscr{D}_k$，那么 $\alpha\cdot\beta=\alpha\beta$；否则 $\alpha\cdot\beta=0$．易见 P_k 对乘法运算 $\cdot$ 作成一个完全 0 -单半群．关于完全 0 -单半群的 2 个重要结果参考文献[6]的引理 1 与引理 2.

设 S 是半群，对任意的 $a\in S$ 分别用 $\mathscr{L}_a$，$\mathscr{R}_a$，$\mathscr{H}_a=\mathscr{L}_a\cap\mathscr{R}_a$，$\mathscr{D}_a$，$\mathscr{J}_a$ 表示 a 所在的 $\mathscr{L}$-类，$\mathscr{R}$-类，$\mathscr{H}$-类，$\mathscr{D}$ -类，$\mathscr{J}$ -类.

文中没有特别强调时都要求 $n\geqslant 4$．本文未定义的术语及符号参见文献[7].

2　主要结果及证明

为完成定理的证明需要如下引理与推论.

引理 1　设 $1\leqslant k\leqslant r\leqslant n-1$，则 $L_D(n,r)$ 是正则半群.

证　当 $k=1$ 时，对任意的 $j\in[n]$ 都有 $\alpha=\begin{pmatrix}[n]\\ j\end{pmatrix}\in\mathscr{D}_1$．易证：$\alpha^2=\alpha$ 且 $\alpha=\alpha\alpha\alpha$，即 α 是正则元.

当 $k=2$ 时，若 $\alpha\in L_D(n,r)$，不妨设 α 的标准表示为 $\alpha=\begin{pmatrix}[1,i] & [i+1,n]\\ a_1 & a_2\end{pmatrix}$，其中：$a_1<a_2$ 或 $a_1>a_2$.

如果 α 是保序的，则 $a_1<a_2$，令 $\beta=\begin{pmatrix}[1,a_1] & (a_1,n]\\ i & i+1\end{pmatrix}$；

如果 α 是反序的，则 $a_1 > a_2$，令 $\beta = \begin{pmatrix} [a_1, n] & [1, a_1) \\ i & i+1 \end{pmatrix}$；

易见 $\beta \in \mathscr{D}_2 \subseteq L_D(n, r)$ 且 $\alpha = \alpha\beta\alpha$，即 α 是正则元.

当 $3 \leqslant k \leqslant r \leqslant n-1$ 时，若 $\alpha \in L_D(n, r)$，不妨设 α 的标准表示为

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_{k-1} & A_k \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix}$$

其中，对任意的 $i, j \in [1, k]$，A_i 是$[n]$的凸子集，当 $i < j$ 时，有 $A_i < A_j$ 且 $a_i < a_j$ 或 $A_i > A_j$ 且 $a_i < a_j$.

对任意的 $i \in [1, k]$，记 $t_i = \min A_i$.

如果 α 是保序的，则 $t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_{k-1} < t_k$ 且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{i-1} < a_i < a_{i+1} < \cdots < a_{k-1} < a_k$，令

$$\beta = \begin{pmatrix} [1, a_1] & (a_1, a_2] & \cdots & (a_{i-2}, a_{i-1}] & (a_{i-1}, a_i] & (a_i, a_{i+1}] & \cdots & (a_{k-2}, a_{k-1}] & (a_{k-1}, n] \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{i-1} & t_i & t_{i+1} & \cdots & t_{k-1} & t_k \end{pmatrix}$$

易见 $\beta \in \mathscr{D}_k^O \subseteq \mathscr{D}_k \subseteq L_D(n, r)$ 且 $\alpha = \alpha\beta\alpha$，即 α 是正则元.

如果 α 是反序的，则 $t_1 > t_2 > \cdots > t_{k-i} > t_{k-i+1} > t_{k-i+2} > \cdots > t_{k-1} > t_k$ 且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{i-1} < a_i < a_{i+1} < \cdots < a_{k-1} < a_k$，令

$$\beta = \begin{pmatrix} [a_k, n] & [a_{k-1}, a_k) & \cdots & [a_{k-i+2}, a_{k-i+3}) & [a_{k-i+1}, a_{k-i+2}) & [a_{k-i}, a_{k-i+1}) & \cdots & [a_2, a_3) & [1, a_2) \\ t_k & t_{k-1} & \cdots & t_{k-i+2} & t_{k-i+1} & t_{k-i} & \cdots & t_2 & t_1 \end{pmatrix}$$

易见 $\beta \in \mathscr{D}_k^D \subseteq \mathscr{D}_k \subseteq L_D(n, r)$ 且 $\alpha = \alpha\beta\alpha$，即 α 是正则元.

因此，对任意的 $\alpha \in L_D(n, r)$，若 $|\operatorname{im}(\alpha)| = k$ 且 $1 \leqslant k \leqslant r \leqslant n-1$ 必有 $\beta \in \mathscr{D}_k \subseteq L_D(n, r)$ 使得$\alpha = \alpha\beta\alpha$. 由此可见：半群 $L_D(n, r)$ 中的每一个元素都是正则元，即 $L_D(n, r)$ 是正则半群.

引理2　设 $1 \leqslant k \leqslant r \leqslant n-1$，$\alpha \in \mathscr{D}_k$，则 $|E(\mathscr{R}_\alpha)| \geqslant 2$.

证　不妨设$[n]/\ker(\alpha) = \{A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}, A_k\}$，其中 $A_1 < A_2 < \cdots < A_{k-1} < A_k$. 对任意的 $i \in [1, k]$，令 $m_i = \min A_i$，$c_i = \max A_i$，易见 $m_1 < m_2 < \cdots < m_{k-1} < m_k$ 且 $c_1 < c_2 < \cdots < c_{k-1} < c_k$. 由 $1 \leqslant k \leqslant r \leqslant n-1$ 可知：至少存在 $i \in [1, k]$ 使得 $|A_i| \geqslant 2$，于是，必有 $c_i > m_i$. 令

$$e = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_{k-1} & A_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{i-1} & m_i & m_{i+1} & \cdots & m_{k-1} & m_k \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_{k-1} & A_k \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{i-1} & c_i & c_{i+1} & \cdots & c_{k-1} & c_k \end{pmatrix}$$

易见 $e, f \in E(\mathscr{D}_k) \subseteq \mathscr{D}_k$，$e \neq f$ 且 $\ker(\alpha) = \ker(e) = \ker(f)$. 由 Green -等价关系可知 $\alpha \mathscr{R} e \mathscr{R} f$，即 $|E(\mathscr{R}_\alpha)| \geqslant 2$.

引理3　设 $1 \leqslant k \leqslant r \leqslant n-1$，$\alpha \in \mathscr{D}_k$，则 $|E(\mathscr{L}_\alpha)| \geqslant 1$.

证　不妨设 $\operatorname{im}(\alpha) = \{a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k\}$，其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k$. 以下分两种情形证明：

情形1　当 $|\operatorname{im}(\alpha)| = 1$ 时，由引理1的证明过程可知 $\alpha^2 = \alpha$，即 α 是幂等元. 注意到 $\mathscr{D}_1$ 中只有1个 $\mathscr{R}$-类和 n 个 $\mathscr{L}$-类，必有 $|E(\mathscr{L}_\alpha)| = 1$.

情形2　当 $|\operatorname{im}(\alpha)| \geqslant 2$ 时，分2种子情形证明：

情形2.1　若对任意的 $i \in [1, k-1]$ 都有 $a_{i+1} - a_i = 1$，令

$$e = \begin{pmatrix} [1, a_1] & \{a_2\} & \cdots & \{a_{i-1}\} & \{a_i\} & \{a_{i+1}\} & \cdots & \{a_{k-1}\} & [a_k, n] \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix}$$

易见 $e \in E(\mathscr{D}_k) \subseteq \mathscr{D}_k$ 且 $\operatorname{im}(\alpha) = \operatorname{im}(e)$. 由 Green -等价关系可知 $\alpha \mathscr{L} e$，即 $|E(\mathscr{L}_\alpha)| = 1$.

情形2.2　若存在 $i \in [1, k-1]$ 使得 $a_{i+1} - a_i \geqslant 2$，令

$$e = \begin{pmatrix} [1, a_1] & (a_1, a_2] & \cdots & (a_{i-2}, a_{i-1}] & (a_{i-1}, a_i] & (a_i, a_{i+1}] & \cdots & (a_{k-2}, a_{k-1}] & (a_{k-1}, n] \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} [1, a_1] & (a_1, a_2] & \cdots & (a_{i-2}, a_{i-1}] & (a_{i-1}, a_i+1] & (a_i+1, a_{i+1}] & \cdots & (a_{k-2}, a_{k-1}] & (a_{k-1}, n] \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix}$$

易见 $e, f \in E(\mathscr{D}_k) \subseteq \mathscr{D}_k$，$e \neq f$ 且 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(e) = \mathrm{im}(f)$. 由 Green -等价关系可知 $\alpha\mathscr{L}e\mathscr{L}f$，即 $|E(\mathscr{L}_\alpha)| \geqslant 2$.

因此，对 $1 \leqslant k \leqslant r \leqslant n-1$，$\alpha \in \mathscr{D}_k$ 必有 $|E(\mathscr{L}_\alpha)| \geqslant 1$.

引理 4　设 $r \in [3, n-1]$，$\alpha \in \mathscr{D}_r \backslash \mathscr{R}_C$，则存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in V(\alpha) \cap \mathscr{D}_r$，使得$(\alpha_1, \alpha_2) \notin \mathscr{R}$ 且$(\alpha_1, \alpha_2) \notin \mathscr{L}$.

证　对任意的 $\alpha \in \mathscr{D}_r \backslash \mathscr{R}_C$，由引理 2 及引理 3 的情形 2.2 可得 $|E(\mathscr{R}_\alpha)| \geqslant 2$ 且 $|E(\mathscr{L}_\alpha)| \geqslant 2$. 于是，任意取 $e_1, e_2 \in E(\mathscr{R}_\alpha)$，$e_1 \neq e_2$，$f_1, f_2 \in E(\mathscr{L}_\alpha)$，$f_1 \neq f_2$，则$(e_1, e_2) \notin \mathscr{L}$且$(f_1, f_2) \notin \mathscr{R}$(否则，由Green -等价关系可知 $e_1\mathscr{H}e_2$ 或 $f_1\mathscr{H}f_2$. 再由文献[7]的推论 2.2.6 可知 $e_1 = e_2$ 或 $f_1 = f_2$，与已知条件 $e_1 \neq e_2$，$f_1 \neq f_2$ 矛盾). 注意到 $e_i\mathscr{R}\alpha\mathscr{L}f_i (i = 1, 2)$. 由文献[7]的定理 2.3.4 可知 $\mathscr{L}_{e_1} \cap \mathscr{R}_{f_1}$ 和 $\mathscr{L}_{e_2} \cap \mathscr{R}_{f_2}$ 都包含 α 的逆元. 不妨分别设为 α_1, α_2，则 $e_i\mathscr{L}\alpha_i\mathscr{R}f_i (i = 1, 2)$. 从而$(\alpha_1, \alpha_2) \notin \mathscr{L}$且$(\alpha_1, \alpha_2) \notin \mathscr{R}$. 此外，由 $\alpha_i\mathscr{L}e_i\mathscr{R}\alpha$，可知 $\alpha_i\mathscr{D}\alpha$ 必有 $|\mathrm{im}(\alpha_i)| = |\mathrm{im}(\alpha)| = r$，即 $\alpha_i \in \mathscr{D}_r$.

由引理 2 及引理 3 可知：在同一个 $\mathscr{R}$-类中取两个不同的幂等元，同一个 $\mathscr{L}$-类中仅取一个幂等元，类似于引理 4 的证明可得引理 5.

引理 5　设 $r \in [2, n-1]$，$\alpha \in \mathscr{D}_r$，则存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in V(\alpha) \cap \mathscr{D}_r$，使得$(\alpha_1, \alpha_2) \notin \mathscr{L}$.

引理 6　设 $r \in [3, n-1]$，$\alpha \in \mathscr{D}_r \backslash \mathscr{R}_C$，则 $A_\alpha = L_D(n, r-1) \cup (\mathscr{D}_r \backslash \mathscr{R}_\alpha)$ 是 $L_D(n, r)$ 的极大正则子半群.

证　第一步：证明 A_α 是 $L_D(n, r)$ 的子半群. 由文献[6]的引理 1 可知，对任意的 $\beta, \gamma \in \mathscr{D}_r$，有 $\beta\gamma\mathscr{R}\beta$ 或 $\beta\gamma \in L_D(n, r-1)$. 因此，$A_\alpha$ 是 $L_D(n, r)$ 的子半群.

第二步：证明 A_α 是正则的. 由引理 1 知 $L_D(n, r-1)$ 是正则的. 对任意的 $\beta \in \mathscr{D}_r \backslash \mathscr{R}_\alpha$(其中，$\alpha \in \mathscr{D}_r \backslash \mathscr{R}_C$)，由引理 4 可知，存在 β 的逆元 $\beta_1, \beta_2 \in \mathscr{D}_r$，使得$(\beta_1, \beta_2) \notin \mathscr{R}$. 于是，$\beta_1, \beta_2$ 中至少有一个属于 $\mathscr{D}_r \backslash \mathscr{R}_\alpha$，即 $\mathscr{D}_r \backslash \mathscr{R}_\alpha$ 中必存在 β 的逆元，从而 β 是正则的. 因此 A_α 是正则半群.

第三步：证明 A_α 是极大正则子半群. 设 T 是 $L_D(n, r)$ 的正则子半群，且 $A_\alpha \subset T$. 任取 $\beta \in T \backslash A_\alpha$，则 $\beta \in \mathscr{R}_\alpha$. 由引理 3 证明中的情形 2.2 可知 $|E(\mathscr{L}_\beta)| \geqslant 2$，不妨设 $e, f \in E(\mathscr{L}_\beta)$ 且 $e \neq f$，则 e, f 中必有一个不属于 $\mathscr{R}_\alpha$(否则，由 Green -等价关系可知 $e\mathscr{H}f$. 再由文献[7]的推论 2.2.6 可知 $e = f$，与已知条件 $e \neq f$ 矛盾). 不妨设 $e \notin \mathscr{R}_\alpha$，于是 $\mathscr{R}_e \subseteq \mathscr{D}_r \backslash \mathscr{R}_\alpha \subseteq T$，再由文献[6]的引理 2 可知 $\mathscr{R}_\alpha = \mathscr{R}_\beta = \beta\mathscr{R}_e \subset T$，即 $T = L_D(n, r)$. 因此，A_α 是 $L_D(n, r)$ 的极大正则子半群.

结合引理 5，类似于引理 6 的证明可得引理 7.

引理 7　设 $r \in [3, n-1]$，$\alpha \in \mathscr{D}_r$，则 $B_\alpha = L_D(n, r-1) \cup (\mathscr{D}_r \backslash \mathscr{L}_\alpha)$ 是 $L_D(n, r)$ 的极大正则子半群.

由文献[3]的引理 1、引理 2 及定理 1 的证明可得如下推论：

推论 1　设 $r \in [1, n-1]$，S 是 $L_D(n, r)$ 的子半群且 $\mathscr{D}_r \subseteq S$，则 $S = L_D(n, r)$.

引理 8　设 $r \in [2, n-1]$，对任意的 $\alpha \in \mathscr{D}_r^D$ 有 $\mathscr{D}_r \subseteq \langle \mathscr{D}_r^O, \alpha \rangle$.

证　由于 $r \in [2, n-1]$，对任意的 $\alpha \in \mathscr{D}_r^D$ 可设 α 的标准表示为

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_{r-1} & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{r-1} & a_r \end{pmatrix}$$

其中，对任意的 $i, j \in [1, r]$ 有 A_i 是$[n]$的凸子集，当 $i < j$ 时，有 $A_i > A_j$ 且 $a_i < a_j$.

对任意的 $\beta \in \mathscr{D}_r^D$ 不妨设 β 的标准表示为

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_{i-1} & B_i & B_{i+1} & \cdots & B_{r-1} & B_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{r-1} & b_r \end{pmatrix}$$

其中，对任意的 $i, j \in [1, r]$ 有 B_i 是$[n]$的凸子集，当 $i < j$ 时，有 $B_i > B_j$ 且 $b_i < b_j$.

对任意的 $i \in [1, r]$，记 $t_i = \min A_i$. 令

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_{i-1} & B_i & B_{i+1} & \cdots & B_{r-1} & B_r \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{i-1} & t_i & t_{i+1} & \cdots & t_{r-1} & t_r \end{pmatrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} [1, a_1] & (a_1, a_2] & \cdots & (a_{i-2}, a_{i-1}] & (a_{i-1}, a_i] & (a_i, a_{i+1}] & \cdots & (a_{r-2}, a_{r-1}] & (a_{r-1}, n] \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{r-1} & b_r \end{pmatrix}$$

易见 $\gamma, \delta \in \mathscr{D}_r^O$ 且 $\beta = \gamma\alpha\delta$，即对任意的 $\alpha \in \mathscr{D}_r^D$ 有 $\mathscr{D}_r \subseteq \langle \mathscr{D}_r^O, \alpha \rangle$.

由推论 1，引理 8，文献[8]的引理 2.5，引理 2.6 及文献[9]的引理 2.1 有如下推论：

推论 2　设 $r\in[2,\ n-1]$，对任意的 $\alpha\in\mathscr{D}_r^D$ 有 $L_D(n,\ r)=\langle\mathscr{D}_r\rangle=\langle\mathscr{D}_r^O,\ \alpha\rangle=\langle E(\mathscr{D}_r^O),\ \alpha\rangle$.

引理 9　设 $r\in[3,\ n-1]$，则 $C_r=L_D(n,\ r-1)\cup\mathscr{D}_r^O$ 是 $L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群.

证　首先，证明 C_r 是 $L_D(n,\ r)$ 的子半群. 注意到两个保序变换的之积是保序变换[8-9]可知，对任意的 $\beta,\ \gamma\in\mathscr{D}_r^O$，有 $\beta\gamma\in\mathscr{D}_r^O$ 或 $\beta\gamma\in L_D(n,\ r-1)$. 因此，$C_r$ 是 $L_D(n,\ r)$ 的子半群.

其次，证明 C_r 是正则的. 由引理 1 知 $L_D(n,\ r-1)$ 是正则的. 对任意的 $\beta\in\mathscr{D}_r^O$，再由引理 1 的证明过程可知，存在 β 的逆元 $\gamma\in\mathscr{D}_r^O$，使得 $\beta=\beta\gamma\beta$. 于是，β 是正则的. 因此 C_r 是正则半群.

最后，证明 C_r 是极大正则子半群. 设 T 是 $L_D(n,\ r)$ 的正则子半群，且 $C_r\subset T$. 任取 $\alpha\in T\backslash C_r$，则 $\alpha\in\mathscr{D}_r^D$. 注意到 $\mathscr{D}_r^O\subseteq T$ 且 $\alpha\in\mathscr{D}_r^D\cap T$，再结合推论 1,2，必有 $T=L_D(n,\ r)=\langle\mathscr{D}_r^O,\ \alpha\rangle$，即 C_r 是 $L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群.

本文的主要结果为：

定理 1　设 $r\in[3,\ n-1]$，则半群 $L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群有且仅有如下三类：

(1) $A_\alpha=L_D(n,\ r-1)\cup(\mathscr{D}_r\backslash\mathscr{R}_\alpha)$，$\alpha\in\mathscr{D}_r\backslash\mathscr{R}_C$；

(2) $B_\alpha=L_D(n,\ r-1)\cup(\mathscr{D}_r\backslash\mathscr{L}_\alpha)$，$\alpha\in\mathscr{D}_r$；

(3) $C_r=L_D(n,\ r-1)\cup\mathscr{D}_r^O$.

证　第一步：由引理 6，7，9 可知，A_α，B_α 和 C_r 是 $L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群.

第二步：设 S 是 $L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群，证明 $L_D(n,\ r-1)\subset S$. 对任意的 $\alpha,\ \beta\in S\cup L_D(n,\ r-1)$，若 $\alpha,\ \beta\in S$，则 $\alpha\beta\in S$；若 $\alpha,\ \beta\in L_D(n,\ r-1)$，则 $\alpha\beta\in L_D(n,\ r-1)$；应用 $|\operatorname{im}(\alpha\beta)|\leqslant\min\{|\operatorname{im}(\alpha)|,\ |\operatorname{im}(\beta)|\}$ 可知 $\alpha\in S,\ \beta\in L_D(n,\ r-1)$ 或 $\alpha\in L_D(n,\ r-1),\ \beta\in S$ 都有 $\alpha\beta\in L_D(n,\ r-1)$. 易见 $S\cup L_D(n,\ r-1)$ 是 $L_D(n,\ r)$ 的子半群. 结合 S 与 $L_D(n,\ r-1)$ 的正则性可知：$S\cup L_D(n,\ r-1)$ 是 $L_D(n,\ r)$ 的正则子半群. 由 S 的极大正则性及 $S\subseteq S\cup L_D(n,\ r-1)\subseteq L_D(n,\ r)$ 可得 $S=S\cup L_D(n,\ r-1)$(否则，由 $S\cup L_D(n,\ r-1)=L_D(n,\ r)$ 和 $L_D(n,\ r-1)\cap\mathscr{D}_r=\varnothing$ 可知 $\mathscr{D}_r\subseteq S$. 由推论 1 可知 $S=L_D(n,\ r)$ 与 S 是 $L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群矛盾). 由此可见，$L_D(n,\ r-1)\subseteq S$. 若 $L_D(n,\ r-1)=S$，由 S 的极大正则性可知 $L_D(n,\ r-1)$ 是 $L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群. 注意到 $L_D(n,\ r-1)\subset A_\alpha(B_\alpha,\ C_r)\subseteq L_D(n,\ r)$ 必有 $A_\alpha=B_\alpha=C_r=L_D(n,\ r)$ 与 A_α，B_α，C_r 是 $L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群且 A_α，B_α，C_r 互不相同矛盾. 因此 $L_D(n,\ r-1)\subset S$.

第三步：用反证法证明 $L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群仅有定理中的形式. 假设 S 是 $L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群且不是定理中的形式，则 $S\cap\mathscr{R}_\alpha\neq\varnothing$，$\alpha\in\mathscr{D}_r\backslash\mathscr{R}_C$；$S\cap\mathscr{L}_\alpha\neq\varnothing$，$\alpha\in\mathscr{D}_r$；$S\cap\mathscr{D}_r^D\neq\varnothing$；否则，存在 $\alpha\in\mathscr{D}_r\backslash\mathscr{R}_C$ 使得 $\mathscr{R}_\alpha\subseteq\mathscr{D}_r\backslash S$ 或存在 $\alpha\in\mathscr{D}_r$ 使得 $\mathscr{L}_\alpha\subseteq\mathscr{D}_r\backslash S$ 或 $\mathscr{D}_r^D\subseteq\mathscr{D}_r\backslash S$，于是 A_α 或 B_α 或 C_r 是 $L_D(n,\ r)$ 的包含 S 的正则子半群. 由 S 的极大正则性可得 $S=A_\alpha$ 或 $S=B_\alpha$ 或 $S=C_r$ 与 S 不是定理中的形式矛盾. 现在断言 $S\cap\mathscr{R}_\alpha\neq\varnothing$ $(\alpha\in\mathscr{R}_C)$；事实上，设 $\alpha\in\mathscr{R}_C$ 使得 $\mathscr{R}_\alpha\subseteq\mathscr{D}_r\backslash S$，则存在 $j\in[1,\ n-r+1]$ 使得 $\ker(\alpha)=\ker(\varepsilon_j)$，易见 $\varepsilon_j\notin S$. 由引理 3 证明过程中的情形 2.1 可知 $|E(\mathscr{L}_{\varepsilon_j})|=1$，从而 $S\cap\mathscr{L}_{\varepsilon_j}=\varnothing$(否则 $S\cap\mathscr{L}_{\varepsilon_j}\neq\varnothing$，由 S 的正则性及文献[7]的命题 2.3.2 可知 $S\cap E(\mathscr{L}_{\varepsilon_j})\neq\varnothing$，注意到 $|E(\mathscr{L}_{\varepsilon_j})|=1$ 必有 $\varepsilon_j\in S$ 与 $\varepsilon_j\notin S$ 矛盾.). 进一步断言 $E(\mathscr{D}_r)\subseteq E(S)$. 假设 $E(\mathscr{D}_r)\backslash E(S)\neq\varnothing$，任意取 $e\in E(\mathscr{D}_r)\backslash E(S)\subseteq\mathscr{D}_r$，由上述可知：对任意的 $\varepsilon\in\mathscr{D}_r$ 有 $S\cap(\mathscr{L}_e)\neq\varnothing$ 且 $S\cap(\mathscr{R}_e)\neq\varnothing$，由 S 的正则性及文献[7]中的命题 2.3.2 可知 $S\cap E(\mathscr{L}_e)\neq\varnothing$ 且 $S\cap E(\mathscr{R}_e)\neq\varnothing$. 任意取 $\beta\in S\cap E(\mathscr{L}_e)$，$\gamma\in S\cap E(\mathscr{R}_e)$，由 S 的正则性及文献[7]的命题 2.3.2 可知 $\mathscr{L}_\beta\cap E(S)\neq\varnothing$，$\mathscr{R}_\gamma\cap E(S)\neq\varnothing$. 进而存在 $f\in E(S)\cap\mathscr{L}_\beta=E(S)\cap\mathscr{L}_e$，$g\in E(S)\cap\mathscr{R}_\gamma=E(S)\cap\mathscr{R}_e$，使得 $f,\ g\notin\mathscr{H}_e$(因为 $e\notin E(S)$). 由文献[6]的引理 1 可得 $fg\in S\cap\mathscr{R}_f\cap\mathscr{L}_g$，再由文献[7]的定理 2.3.4 可知存在 fg 的逆元 δ 使得 $\delta\in S\cap\mathscr{L}_f\cap\mathscr{R}_g=S\cap\mathscr{L}_\beta\cap\mathscr{R}_\gamma$. 利用 Green-等价关系可得 $\delta\mathscr{H}e$. 由文献[7]的推论 2.2.6 可知 δ 是群 $\mathscr{H}_e$ 的一个元素. 另一方面，对任意的 $r\in[2,\ n-1]$ 且 $\alpha\in\mathscr{D}_r$ 都有 $|\mathscr{H}_\alpha|=2$，于是，$e=\delta^2\in E(S)\cap\mathscr{H}_e$ 与 $e\in E(\mathscr{D}_r)\backslash E(S)$ 矛盾，因此 $E(\mathscr{D}_r)\subseteq E(S)$. 由上述可知 $S\cap\mathscr{D}_r^D\neq\varnothing$，任意取 $\gamma\in S\cap\mathscr{D}_r^D$，由引理 8，推论 2 及对任意的 $r\in[2,\ n-1]$ 有 $E(\mathscr{D}_r^O)=E(\mathscr{D}_r)$ 可知 $\mathscr{D}_r\subseteq\langle\mathscr{D}_r^O\cup\{\gamma\}\rangle=\langle E(\mathscr{D}_r^O)\cup\{\gamma\}\rangle=\langle E(\mathscr{D}_r)\cup\{\gamma\}\rangle\subseteq\langle E(S)\cup\{\gamma\}\rangle\subseteq S$. 再由推论 1 可知：$S=L_D(n,\ r)$ 与 S 是 $L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群矛盾. 因此，$L_D(n,\ r)$ 的极大正则子半群仅有定理中的形式.

类似于定理证明过程的讨论有如下两个注记：

注 1　设 $n \geqslant \{3\}$，则半群 $L_D(n，2)$ 的极大正则子半群有且仅有如下两类：

(1) $B_\alpha = L_D(n，1) \cup (\mathscr{D}_2 \backslash L_\alpha)，\alpha \in \mathscr{D}_2$；

(2) $C_2 = L_D(n，1) \cup \mathscr{D}_2^O$.

注 2　设 $n \geqslant \{2\}$，则半群 $L_D(n，1)$ 的极大正则子半群有且仅有：$A_\alpha = L_D(n，1) \backslash \{\alpha\}，\alpha \in \mathscr{D}_1$.

参考文献：

[1] GYUDZHENOV I，DIMITROVA I. On the Maximal Subsemigroups of the Semigroup of All Monotone Transformations [J]. Discussiones Mathematicae，2006，26(1)：199－217.

[2] DIMITROVA I，KOPPITZ J. On the Maximal Subsemigroups of Some Transformation Semigroups [J]. Asian-European Journal of Mathematics，2008，1(2)：189－202.

[3] 罗永贵. 半群 DO_n 中理想的秩和相关秩 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2013，51(1)：69－73.

[4] ZHAO Ping，XU Bo，YANG Mei. A Note on Maximal Properties of Some Subsemigroups of Finite Order-Preserving Transformation Semigroups [J]. Communications in Algebra，2012，40(3)：1116－1121.

[5] ZHAO Ping，YANG Mei. Maximal Properties of Some Subsemigroups of Order-Preserving Full Transformations [J]. Bull Korean Math，2013，50(2)：627－637.

[6] 高荣海，游泰杰. 半群 POD_n 的理想的极大正则子半群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2011，36(5)：8－11.

[7] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory [M]. Oxford：Oxford University Press，1995.

[8] GOMES G M S，HOWIE J M . On the Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations [J]. Semigroup Forum，1992，45(3)：272－282.

[9] GARBA G U，HOWIE J M . On the Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations [J]. Portugatiae Mathematics，1994，51(2)：185－204.

Maximal Regular Subsemigroups of the Semigroup $L_D(n，r)$

LUO Yong-gui

School of Mathematics Science，Guizhou Normal University，Guiyang 550001，China

Abstract：Let DO_n be the semigroup of all order－reversing singular transformations on a finite-chain $[n]$ if $n \geqslant 4$，and let $L_D(n，r) = \{\alpha \in DO_n：|\mathrm{im}(\alpha)| \leqslant r\}$ be the two-sided ideal of the semigroup DO_n if for an arbitrary integer r such that $1 \leqslant r \leqslant n-1$. By analyzing the idempotent of rank r and Green's relations，the classification of the maximal regular subsemigroup of the semigroup $L_D(n，r)$ is completely obtained.

Key words：order-preserving；order-reversing；singular transformation semigroup；maximal regular subsemigroup；complete classification

责任编辑　包　颖
崔玉洁