DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.08.007

某些具有完全素图的有限单群的分类①

包　奕[1]，　张良才[2]

1. 重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331；
2. 重庆邮电大学 移通学院，重庆 合川 401520

摘要：有限单群 G 称为完全素图群，当且仅当所有连通分支的素图都是完全图，即是说若 $r, s \in \pi_i (i = 1, 2, \cdots)$，则 $r \sim s$. 利用有限单群素图的连接准则对所有满足 $5 \in \pi(G)$ 且 $d_G(5) = 1$ 的完全素图群 G 进行了分类.

关　键　词：有限单群；素图；完全素图；顶点度数

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2017)08-0038-04

给定一个群 G，用 $|G|$ 表示群 G 的阶. 记 $\pi_e(G)$ 为群 G 中所有元素的阶的集合，定义 $\pi(G) = \{r \mid r \mid |G|$ 且 r 是素数$\}$. 与群 G 相关的素图记作 $\Gamma(G)$，其构造如下：素图的顶点集为 $\pi(G)$，$\pi(G)$ 中任意两个顶点 p，q 由一条边相连当且仅当 $p \cdot q = \pi_e(G)$，记 $p \sim q$. 其中，与顶点 p 相连的边数称作 p 的度数，记作 $d_G(p)$. 设 $s(G)$ 为素图 $\Gamma(G)$ 的连通分支数，则其连通分支为 $\pi_i = \pi_i(G) (i = 1, 2, \cdots, s(G))$. 若群 G 的阶数为偶数，则令 $2 \in \pi_1(G)$.

给定一个自然数 q 和奇素数 r，且 $(r, q) = 1$，k 为满足 $q^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$ 的最小自然数，记作 $k = e(r, q)$. A_n 表示维数为 n 的交错群，其他未说明的记号均可见文献[1].

1　预备引理

定理 1[2]　令 G 是一个有限单群，则 G 为完全素图群当且仅当 G 为下列群之一：A_5，A_6，A_7，A_9，A_{12}，A_{13}，M_{11}，M_{22}，J_1，J_2，J_3，HS；$A_1(q) (q > 2)$；$Sz(q) (q = 2^{2m+1})$；$A_2(4)$；${}^2A_2(9)$；$C_3(2)$；${}^2A_3(3)$；${}^2A_5(2)$；${}^3D_4(2)$；$D_4(2)$；$C_2(q)$；$G_2(3^k)$；$A_2(q)$(q 是梅森素数)；${}^2A_2(q)$(q 是费马素数).

定理 2[3]　令 $G = A_n$，则

(1) $r, s \in \pi(G)$ 且 r, s 为奇素数，则 r 和 s 不相连当且仅当 $r + s > n$.

(2) $r \in \pi(G)$ 且 r 为奇素数，2 与 r 不相连当且仅当 $r + 4 > n$.

定理 3　令 G 为完全素图群，若 $5 \in \pi(G)$ 且 $d_G(5) = 1$，则 G 为下列群：

$A_1(q)$，$q = p^k (p \geqslant 5)$，$4 \mid q - 1$，$\pi(q - 1) = \{2, 5\}$；

$A_1(q)$，$q = p^k (p \geqslant 5)$，$4 \mid q - 1$，$\pi\left\{\dfrac{(q+1)}{2}\right\} = \{5, r\}$，$r \neq 2, 5$；

$A_1(q)$，$q = p^k (p \geqslant 5)$，$4 \mid q + 1$，$\pi(q + 1) = \{2, 5\}$；

---

① 收稿日期：2016-09-24
基金项目：国家自然科学基金项目(11401324，11271301，11471266)；教育部第 47 批留学回国人员科研启动基金项目；重庆市自然科学基金项目(cstc2014jcyjA0148).
作者简介：包　奕(1992-)，女，四川广安人，硕士研究生，主要从事代数(群论)研究.
通信作者：张良才，博士，教授.

$A_1(q)$，$q=p^k(p\geqslant 5)$，$4\mid q+1$，$\pi\left\{\dfrac{(q-1)}{2}\right\}=\{5,r\}$，$r\neq 2,5$；

$A_1(q)$，$q=2^k$，k 为偶数，$\pi(q+1)=\{5,r\}$，$r\neq 2,5$；

$Sz(q)$，$q=2^{2m+1}$，$\pi(q-\sqrt{2q}+1)=\{5,r\}$，$r\neq 2,5$；

$Sz(q)$，$q=2^{2m+1}$，$\pi(q+\sqrt{2q}+1)=\{5,r\}$，$r\neq 2,5$；

$C_2(q)$，$q=2^{2m}$，$\pi(q^2+1)=\{5,r\}$，$r\neq 2,5$.

证　下面进行分类讨论：

情形 Ⅰ　若 $G=A_n$，则 $G=A_8$.

当 $G=A_5,A_6,A_7$ 时，由定理 2，有 $d_G(5)=0$.

当 $G=A_n$，$n\geqslant 9$ 时，设 $x=(123)(45678)$，$y=(12)(34)(56789)$，即 x，y 为 G 中的两个元素，则有 $|x|=15$，$|y|=10$，从而有 $2\sim 5\sim 3$，所以 $d_G(5)\geqslant 2$.

当 $G=A_8$ 时，有 $d_G(5)=1$ 成立，但 A_8 不是完全素图群.

情形 Ⅱ　若 G 为散在单群，则 $G=M_{12}$.

根据文献[4]中的表一可知，当 $G=M_{12}$ 时，有 $d_G(5)=1$，但 M_{12} 不是完全素图有限单群.

情形 Ⅲ　对于李型群，根据定理 1，我们将依次进行证明.

因为对于任意素数 $p\neq 5$，有 $5\mid p^4-1$，所以，对于任意的素数$p\neq 5$，有 $5\mid p^2-1$ 或 $5\mid p^2+1$.

(1) 若 $G=A_2(4)$，此时 $|G|=2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$，简单计算得 $e(3,4)=1$，$e(5,4)=2$，$e(7,4)=3$. 由文献[3]中的命题 2.1，3.1，4.1 得，$2\sim 3$，$2\nsim 5$，$2\nsim 7$，$3\nsim 5$，$3\sim 7$，$5\nsim 7$，即 $d_G(5)=0$，所以 $G\neq A_2(4)$.

(2)若$G={}^2A_2(9)$，此时$|G|=2^5\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 73$. 根据文献[5]中的表 Ⅰ，有$\pi_1=\{2,3,5\}$，$\pi_2=\{73\}$，又因为 G 为完全素图群，所以有 $d_G(5)=2$，则 $G\neq {}^2A_2(9)$.

(3) 若 $G=C_3(2)$，此时 $|G|=2^9\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$. 根据文献[5]中的表 Ⅰ，有 $\pi_1=\{2,3,5\}$，$\pi_2=\{7\}$. 又因为 G 为完全素图群，所以有 $d_G(5)=2$，则 $G\neq C_3(2)$.

(4) 若 $G={}^2A_2(3)$，此时 $|G|=2^7\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7$. 根据文献[5]中的表 Ⅰ，有 $\pi_1=\{2,3,5\}$，$\pi_2=\{7\}$. 又因为 G 为完全素图群，所以有 $d_G(5)=2$，则 $G\neq {}^2A_2(3)$.

(5) 若 $G={}^2A_5(2)$，此时 $|G|=2^{15}\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7\cdot 11$. 简单计算得 $e(5,2)=4$，$e(3,2)=2$，$e(7,2)=3$，$e(11,2)=10$. 根据文献[3]命题 2.2，3.1，4.2，得 $2\sim 3$，$2\sim 5$，$2\nsim 7$，$3\sim 5$，$3\nsim 7$，$3\nsim 11$，$5\nsim 7$，$5\nsim 11$，$7\nsim 11$，即得 $d_G(5)=2$，所以 $G\neq {}^2A_5(2)$.

(6) 若 $G={}^3D_4(2)$，此时有 $|G|=2^{12}\cdot 3^4\cdot 7^2\cdot 13$，则 $5\notin\pi(G)$，所以 $G\neq {}^3D_4(2)$.

(7) 若 $G=D_4(2)$，此时有 $|G|=2^{12}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$. 简单计算有 $e(3,2)=2$，$e(5,2)=4$，$e(7,2)=3$. 根据文献[3]中的命题 2.4，3.1，4.4，可得 $2\sim 3$，$2\sim 5$，$2\nsim 7$，$3\sim 5$，$3\nsim 7$，$5\nsim 7$，所以有 $d_G(5)=2$，即是说 $G\neq D_4(2)$.

(8) 若 $G=G_2(3^k)$，k 为自然数. 根据文献[5]中的表 Ⅰ，可知 $\pi_1=\{q,q^2-1\}$，$\pi_2=\pi(q^2+q+1)$，$\pi_3=\pi(q^2-q+1)$，这里的 $q=3^k$. 若 $5\in\pi(G)$，且 $d_G(5)=1$，则 $5\in\pi_1$，又因为 G 为完全素图群，所以有 $2,3,5\in\pi_1(G)$，即 $d_G(5)=2$. 所以上述等式不成立，即 $G\neq G_2(3^k)$.

(9) 若 $G=A_2(q)$，q 为梅森素数，即 $q=2^p-1$ 且 q，p 均为素数. 根据文献[5]中的表 Ⅰ 可得 $\pi_1=\{q,q-1\}$，$\pi_2=\pi\{(q^2+q+1),gcd(3,q-1)\}$. 若要 $5\in\pi(G)$，且 $d_G(5)=1$，则 $5\in\pi_1$. 即 $5\mid q$ 或 $5\mid q-1$. 若 $5\mid q$，且又因为 q 为素数，则 $q=2^p-1=5$，显然不存在这样的 p，所以 $5\nmid q$；若 $5\mid q-1$，即是说 $q-1=5^t\cdot q^s$，t，s 均为自然数，显然等式不成立. 所以 $G\neq A_2(q)$，q 为梅森素数.

(10) 若 $G={}^2A_2(q)$，q 为费马素数，即 $q=2^{2^n}+1$ 且为素数. 目前只证实了当 $n=0,1,2,3,4$ 时，q 才为素数，所以我们分情况讨论：

a. 当 $n=0$ 时，$q=3$，此时 $|G|=2^5\cdot 3^3\cdot 7$，则有 $5\notin\pi(G)$；

b. 当 $n=1$ 时，$q=5$，根据文献[5]中的表Ⅰ，有 $\pi_1=\{2,3,5\}$，$\pi_2=\{7\}$，所以 $d_G(5)=2$；

c. 当 $n=2$ 时，$q=17$，此时 $|G|=2^6\cdot 3^3\cdot 7\cdot 13\cdot 17^3$，则有 $5\notin\pi(G)$；

d. 当 $n=3$ 时，$q=257$，此时 $|G|=2^{10}\cdot 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 43^2\cdot 241\cdot 257^3$，则有 $5\notin\pi(G)$；

e. 当 $n=4$ 时，$q=65537$，此时有 $5\notin\pi(G)$.

所以有 $G\neq {}^2A_2(q)$，q 为费马素数.

(11) 若 $G=A_1(q)$，且 $q>2$. 对于 q 我们分情况讨论：

a. $q\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$，此时根据文献[5]中的表Ⅰ有 $\pi_1=\pi(q-1)$，$\pi_2=\pi(q)$，$\pi_3=\pi\{(q+1)/2\}$，若要 $5\in\pi(G)$，且 $d_G(5)=1$，则有

① $5\in\pi_1$，即 $q-1=2^t\cdot 5^s$，$t\geqslant 2$，$s\geqslant 1$，此时 $\pi(q-1)=\{2,5\}$.

② $5\in\pi_2$，即 $(q+1)/2=r^t\cdot 5^s(t\geqslant 2,s\geqslant 1$，$r$ 是素数，且 $r\neq 2,5)$，此时 $\pi\{(q+1)/2\}=\{r,5\}$.

b. $q\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 4)$，根据文献[5]中的表Ⅰ有 $\pi_1=\pi(q+1)$，$\pi_2=\pi(q)$，$\pi_3=\pi\{(q-1)/2\}$，若要 $5\in\pi(G)$，且 $d_G(5)=1$，则有

① $5\in\pi_1$，即 $q+1=2^t\cdot 5^s$，$t\geqslant 2$，$s\geqslant 1$，此时 $\pi(q+1)=\{2,5\}$.

② $5\in\pi_2$，即 $(q-1)/2=2^t\cdot 5^s(t\geqslant 2,s\geqslant 1$，$r$ 是素数，且 $r\neq 2,5)$，此时 $\pi\{(q-1)/2\}=\{r,5\}$.

c. $q\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$，即 $q=4m=2^n$，根据文献[4]中的表Ⅰ有 $\pi_1=\pi(q,q-1)$，$\pi_2=\pi(q+1)$，若要 $5\in\pi(G)$，且 $d_G(5)=1$，则

① 若 $5\in\pi_1$，则需令 $q-1=2^t\cdot 5^s$，$t\geqslant 0$，$s\geqslant 1$，即 $2^n-1=2^t\cdot 5^s$. 因为 2^n-1 为奇数，$2^t\cdot 5^s$ 为偶数，则 $t=0$，即有 $2^n-1=5^s$，根据文献[6]中的引理1可知，该等式无解.

② 若 $5\in\pi_2$，则需令 $q+1=2^n+1=5^s\cdot r^t(r$ 是素数且 $r\neq 2,5$；s，t 均为自然数)，即是说有 $\pi(q+1)=\{5,r\}$，$r\neq 2,5$

d. $q\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$，即 $q=4m+2=2(2m+1)$. 因为 q 是素数幂，所以此情况不存在.

(12) 若 $G=Sz(q)$，$q=2^{2m+1}$.

① 当 $q=2$ 时，此时 $|G|=2^2\cdot 5$. 根据文献[3]中引理1.5及命题3.3可得 $d_G(5)=0$.

② 当 $q>2$ 时，根据文献[5]中的表Ⅰ可知，有 $\pi_1=\{2\}$，$\pi_2=\{q-1\}$，$\pi_3=\{q-\sqrt{2q}+1\}$，$\pi_4=\{q+\sqrt{2q}+1\}$，分情况讨论：

ⅰ 若 $5\in\pi_2$ 且 $d_G(5)=1$，则有 $q-1=5^s\cdot r^t(r$ 是素数且 $r\neq 2,5$，s，t 均为自然数)，即是有 $2^{2m+1}-1=5^s\cdot r^t$. 因为 $5^s\cdot r^t$ 是尾数为5的数，若要等式成立，则需 $2^{2m+1}=2\cdot 4^m$ 是尾数为6的数，即 4^m 是尾数为3或者8的数，显然不成立，所以此情况不存在.

ⅱ 若 $5\in\pi_3$ 且满足 $d_G(5)=1$. 此时有 $q-\sqrt{2q}+1=5^s\cdot r^t$ 成立，即 $2^{2m+1}-2^{m+1}+1=5^s\cdot r^t(r$ 是素数且 $r\neq 2,5$，s，t 均为自然数)，则 $\pi(q-\sqrt{2q}+1)=\{5,r\}$，$r\neq 2,5$.

ⅲ 若 $5\in\pi_4$ 且满足 $d_G(5)=1$. 此时有 $q+\sqrt{2q}+1=5^s\cdot r^t$ 成立，即 $2^{2m+1}+2^{m+1}+1=5^s\cdot r^t(r$ 是素数且 $r\neq 2,5$，s，t 均为自然数)，则 $\pi(q+\sqrt{2q}+1)=\{5,r\}$，$r\neq 2,5$.

(13) 若 $G=C_2(q)$，根据文献[5]中的表Ⅰ可知，$\pi_1=\pi(2(q^2-1))$，$\pi_2=\pi(q^2+1)$. 显然 $2\in\pi_1$，则 q^2+1 为奇数，也就是说 q 为偶数，又因为 q 为素数幂，则 $q=2^m$，m 为自然数.

① 若 $5\in\pi_1$ 且 $d_G(5)=1$，则需 $q^2-1=2^{2m}-1=5^k(k$ 为自然数)，即 $(2^m+1)(2^m-1)=5^k$(无解).

② 若 $5\in\pi_2$ 且 $d_G(5)=1$，则需 $q^2+1=2^{2m}+1=5^k\cdot r^t(k,t$ 为自然数，$r\neq 2,5$ 且为素数)，此时有 $\pi(q^2+1)=\{5,r\}$，$r\neq 2,5$.

参考文献：

[1] CONWAY J H, CURTIS R T, NORTON S P. Atlas of Finite Groups [M]. Oxford: Clarendon Press(Oxford), 1985.

[2] LUCIDO M S, MOGHADDAMFAR A R. Groups with Complete Prime Graph Connected Components [J]. J Group Theory, 2004, 7(3): 373－384.

[3] VASILEV A V, VDOVIN E P. Cocliques of Maximal Size in the Prime Graph of Finite Simple Group [J]. Algebra and Logic, 2011, 50(4): 291－322.

[4] 陈重穆，施武杰. 关于 C_{pp} 单群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1993，18(3)：249－256.

[5] WILLIAMS J S. Prime Graph Components of Finite Group [J]. Journal of Algebra, 1981, 69(2): 487－513.

[6] 孙　琦. 有限单群中一个未解的丢番图方程 [J]. 数学研究与评论，1986，6(2)：6－20.

[7] 柯　召，孙　琦. 数论讲义(下) [M]. 北京：高等教育出版社，1987.

[8] DERZIOTIS D I, MICHLER G O. Character Table and Blocks of Finite Simple Triality Group $^3D_4(q)$ [J]. Trans Amer Math Soc, 1987, 303(1): 39－70.

[9] GORENSTEIN D. The Classification of Finite Groups Ⅰ. Simple Groups and Local Analysis [J]. Bull Amer Math Soc I, 1979, 1(1979): 43－199.

The Classificatong of Some Finite Simple Groups with Complete Graphs

BAO　Yi[1]，　ZHANG Liang-cai[2]

1. *College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China;*

2. *College of Mobile Telecommunications, Chongqing University of Posts and Telecom, Hechuan Chongqing 401520, China*

Abstract: A finite simple group G is called a group with complete prime graph, if and only if all the connected components of its prime graph are cliques. That is to say if r, $s\in\pi_i(i=1, 2, \cdots)$. In this paper, we clssify the complete prime graph group G satisfying $5\in\pi(G)$ and $d_G(5)=1$ by using an adjacency for a finite simple group.

Key words: finite simple groups; prime graph; complete prime graph; the degree of the vertex

责任编辑　夏　娟