第 42 卷　第 8 期　　西南师范大学学报（自然科学版）　　2017 年 8 月
Vol. 42　No. 8　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Aug. 2017

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2017.08.008

最终严格对角占优矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界序列①

赵建兴

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025

摘要： 针对逆矩阵的无穷大范数的上界估计问题，利用已有严格对角占优矩阵的逆矩阵的无穷大范数的上界，给出最终严格对角占优矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界序列，改进了某些已有结果．数值算例显示所得上界序列是单调递减的，且在某些情况下能达到真值．

关　键　词： 对角占优；逆矩阵；范数；上界；序列

中图分类号： O151.21　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2017)08-0042-04

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数 $\mathrm{Cond}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_\infty \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 对线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的迭代解法的稳定性有重要影响．在求解线性方程组之前，若能对 $\mathrm{Cond}(\boldsymbol{A})$ 进行计算或估计，将对选择应用什么算法有重要意义[1-2]．确定 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ 是容易的，但是确定 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 往往很困难．自文献[3]给出 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的第一个上界估计式以来，关于严格（双）对角占优矩阵[3-6]、弱链对角占优矩阵[7-8]、严格 α-对角占优矩阵[9-10]及 Nekrasov 矩阵[11-12]等非奇异 H-矩阵类的逆的无穷大范数的估计已有很多结果，但在实际问题中，有时需要计算或估计的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 往往不是非奇异 H-矩阵．就目前资料看，对该类矩阵逆的无穷大范数估计的研究才刚刚开始，仅有文献[13]对此问题进行了初步的探索，这些不足造成了矩阵理论的不完备，从而使其应用受到了限制．本文研究最终严格对角占优矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的估计问题，并给出其新的上界估计式．

1　预备知识

用 $\mathbb{C}^{n\times n}$（$\mathbb{R}^{n\times n}$）表示 n 阶复（实）矩阵集（$n\geqslant 2$），令 $N=\{1,2,\cdots,n\}$．设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$r_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，$i\in N$；$h_1(\boldsymbol{A})=r_1(\boldsymbol{A})$，$h_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j=1}^{i-1}\dfrac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|}h_j(\boldsymbol{A})+\sum\limits_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|$，$i=2,\cdots,n$．

定义 1[12]　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$，如果对任意 $i\in N$，均有 $|a_{ii}|>r_i(\boldsymbol{A})$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵；如果对任意 $i\in N$，均有 $|a_{ii}|>h_i(\boldsymbol{A})$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 Nekrasov 矩阵；如果存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{AX}$ 为严格对角占优矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵．

定义 2[13]　设 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，其中 s 为复数，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为复矩阵．如果存在正整数 k 使得 $s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k$ 为严格对角占优矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 称为最终严格对角占优矩阵（$SDD_\exists$），简记为 $\boldsymbol{A}\in SDD_\exists$．

注 1　由文献[13]知，严格对角占优矩阵为 Nekrasov 矩阵，Nekrasov 矩阵为非奇异 H-矩阵；最终严格对角占优矩阵不属于非奇异 H-矩阵．

对于严格对角占优矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界估计，文献[3]给出如下结果：设 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵，则

---

① 收稿日期：2016-09-25

基金项目：国家自然科学基金项目(11501141)；贵州省科学技术基金项目(黔科合 J 字[2015]2073 号)；贵州省教育厅科技拔尖人才支持项目(黔教合 KY 字[2016]066 号)．

作者简介：赵建兴(1981-)，男，山东济宁人，副教授，博士，主要从事数值代数的研究．

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min\limits_{i\in N}\{|a_{ii}|-r_i(\boldsymbol{A})\}} \tag{1}$$

对于 Nekrasov 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界估计，文献[12] 给出如下结果：设 $\boldsymbol{A}$ 为 Nekrasov 矩阵，则

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in N}\frac{z_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|-h_i(\boldsymbol{A})} \tag{2}$$

其中 $z_1(\boldsymbol{A})=1$，$z_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j=1}^{i-1}\frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|}z_j(\boldsymbol{A})+1$，$i=2,\cdots,n$.

对于(1) 式和(2) 式，文献[12] 给出如下比较定理：

定理 1[12]　设 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵，则$\max\limits_{i\in N}\frac{z_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|-h_i(\boldsymbol{A})}\leqslant\frac{1}{\min\limits_{i\in N}\{|a_{ii}|-r_i(\boldsymbol{A})\}}$.

对于最终严格对角占优矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界估计，文献[13] 给出如下结果：

定理 2[13]　如果存在正整数 k 使得 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\in SDD_\exists$，则 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\frac{\|s^{k-1}\boldsymbol{I}+s^{k-2}\boldsymbol{B}+\cdots+\boldsymbol{B}^{k-1}\|_\infty}{\min\limits_{i\in N}\{|s^k-(\boldsymbol{B}^k)_{ii}|-r_i(\boldsymbol{B}^k)\}}$.

2　主要结果

下面利用严格对角占优矩阵逆的无穷大范数的上界，给出最终严格对角占优矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界序列.

定理 3　如果存在正整数 k 使得 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\in SDD_\exists$，则

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\|s^{k-1}\boldsymbol{I}+s^{k-2}\boldsymbol{B}+\cdots+\boldsymbol{B}^{k-1}\|_\infty\max_{i\in N}\frac{z_i(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)}{|s^k-(\boldsymbol{B}^k)_{ii}|-h_i(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)} \tag{3}$$

证　由 $\boldsymbol{A}\in SDD_\exists$ 知存在正整数 k 使得 $s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k$ 为严格对角占优矩阵，因此 $s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k$ 非奇异. 又因为

$$s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(s^{k-1}\boldsymbol{I}+s^{k-2}\boldsymbol{B}+\cdots+s\boldsymbol{B}^{k-2}+\boldsymbol{B}^{k-1})$$

所以

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}=(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)^{-1}(s^{k-1}\boldsymbol{I}+s^{k-2}\boldsymbol{B}+\cdots+s\boldsymbol{B}^{k-2}+\boldsymbol{B}^{k-1})$$

此时

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty&\leqslant\|(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)^{-1}(s^{k-1}\boldsymbol{I}+s^{k-2}\boldsymbol{B}+\cdots+s\boldsymbol{B}^{k-2}+\boldsymbol{B}^{k-1})\|_\infty\leqslant\\&\|(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)^{-1}\|_\infty\|s^{k-1}\boldsymbol{I}+s^{k-2}\boldsymbol{B}+\cdots+s\boldsymbol{B}^{k-2}+\boldsymbol{B}^{k-1}\|_\infty\end{aligned} \tag{4}$$

对 $s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k$ 应用(2) 式得

$$\|(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)^{-1}\|_\infty\leqslant\max_{i\in N}\frac{z_i(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)}{|s^k-(\boldsymbol{B}^k)_{ii}|-h_i(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)} \tag{5}$$

由(4) 式和(5) 式可得(3) 式成立.

下面给出定理 2 与定理 3 的比较定理：

定理 4　若存在正整数 k 使得 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\in SDD_\exists$，则

$$\|s^{k-1}\boldsymbol{I}+s^{k-2}\boldsymbol{B}+\cdots+\boldsymbol{B}^{k-1}\|_\infty\max_{i\in N}\frac{z_i(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)}{|s^k-(\boldsymbol{B}^k)_{ii}|-h_i(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)}\leqslant\frac{\|s^{k-1}\boldsymbol{I}+s^{k-2}\boldsymbol{B}+\cdots+\boldsymbol{B}^{k-1}\|_\infty}{\min\limits_{i\in N}\{|s^k-(\boldsymbol{B}^k)_{ii}|-r_i(\boldsymbol{B}^k)\}}$$

证　由 $\boldsymbol{A}\in SDD_\exists$ 知存在某个正整数 k 使得 $s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k$ 为严格对角占优矩阵. 对 $s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k$ 应用定理 1 得

$$\max_{i\in N}\frac{z_i(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)}{|s^k-(\boldsymbol{B}^k)_{ii}|-h_i(s^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^k)}\leqslant\frac{1}{\min\limits_{i\in N}\{|s^k-(\boldsymbol{B}^k)_{ii}|-r_i(\boldsymbol{B}^k)\}}$$

又 $\|s^{k-1}\boldsymbol{I}+s^{k-2}\boldsymbol{B}+\cdots+\boldsymbol{B}^{k-1}\|_\infty\geqslant0$，显然结论成立.

注 2　由定理 4 知，当 $\boldsymbol{A}\in SDD_\exists$ 时，由定理 3 得到的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界优于由定理 2 得到的上界.

3　数值算例

下面给出两个数值算例来验证第二部分的结果.

例1 设

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}3&-1&-1&-1&1\\1&5&1&1&-1\\-1&-1&3&-1&1\\1&1&1&5&-1\\-1&-1&-1&-1&3\end{bmatrix}$$

易知 $\boldsymbol{A}_1$ 不是严格(双)对角占优矩阵、弱链对角占优矩阵、严格 α-对角占优矩阵及Nekrasov矩阵，故不能用文献[3-12]的相关结果估计 $\|\boldsymbol{A}_1^{-1}\|_\infty$. 令 $\boldsymbol{A}_1=5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_1$，取 $k=1,\cdots,15$，利用MATLAB(R2009a)软件计算知对任意 $k=2,\cdots,15$，$5^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_1^k$ 均是严格对角占优矩阵，故 $\boldsymbol{A}_1\in SDD_{\exists}$. 由定理3得到的数值结果见表1. 事实上，$\|\boldsymbol{A}_1^{-1}\|_\infty=0.666\ 7$.

表1 $\|\boldsymbol{A}_1^{-1}\|_\infty$ 的上界序列

k	$\|\boldsymbol{A}_1^{-1}\|_\infty\leqslant$	k	$\|\boldsymbol{A}_1^{-1}\|_\infty\leqslant$
$k=2$	0.908 5	$k=8$	0.667 8
$k=3$	0.758 1	$k=9$	0.667 1
$k=4$	0.707 7	$k=10$	0.666 8
$k=5$	0.683 5	$k=11$	0.666 7
$k=6$	0.673 5	$k=15$	0.666 7
$k=7$	0.669 4		

例2 设

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}3.9&-1&-1&-1&1\\1&5.9&1&1&-1\\-1&-1&3.9&-1&1\\1&1&1&5.9&-1\\-1&-1&-1&-1&3.9\end{bmatrix}$$

易知 $\boldsymbol{A}_2$ 不是严格(双)对角占优矩阵、弱链对角占优矩阵、严格 α-对角占优矩阵及Nekrasov矩阵，故不能用文献[3-12]的相关结果估计 $\|\boldsymbol{A}_2^{-1}\|_\infty$. 令 $\boldsymbol{A}_2=5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_2$，取 $k=1,\cdots,10$，利用MATLAB(R2009a)软件计算知对任意 $k=2,\cdots,10$，$5^k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_2{}^k$ 均是严格对角占优矩阵. 由定理3得到的数值结果见表2. 事实上，$\|\boldsymbol{A}_2^{-1}\|_\infty=0.465\ 7$.

表2 $\|\boldsymbol{A}_2^{-1}\|_\infty$ 的上界序列

k	$\|\boldsymbol{A}_2^{-1}\|_\infty\leqslant$	k	$\|\boldsymbol{A}_2^{-1}\|_\infty\leqslant$
$k=2$	0.520 9	$k=7$	0.465 8
$k=3$	0.477 2	$k=8$	0.465 7
$k=4$	0.468 2	$k=9$	0.465 7
$k=5$	0.466 3	$k=10$	0.465 7
$k=6$	0.465 8		

注3 由表1和表2知

(i) 由定理3分别得到的 $\|\boldsymbol{A}_i^{-1}\|_\infty$，$i=1,2$ 的上界序列是单调递减的，且在某些情况下可以达到真值.

(ii) 由文献[13]知 $\boldsymbol{A}_1$ 不是 H-矩阵，故由例1知定理3可以对某些非 H-矩阵的逆矩阵的无穷大范数进行估计，因此定理3的适用范围更广.

参考文献：

[1] VARGA R S. Matrix Iterative Analysis [M]. Second Edition. Berlin: Springer, 2009.

[2] 吴 珊，张明望，黄正伟. 一种单调线性互补问题的Full-Newton步不可行内点算法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(5)：106-113.

[3] VARAH J M. A Lower Bound for the Smallest Singular Value of a Matrix [J]. Linear Algebra and its Applications, 1975, 11(1): 3−5.

[4] 王　峰. 严格对角占优 M -矩阵的逆矩阵的无穷大范数的新上界 [J]. 高等学校计算数学学报, 2015, 37(2): 131−140.

[5] WANG F, SUN D S, ZHAO J X. New Upper Bounds for $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ of Strictly Diagonally Dominant M-Matrices [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2015, 172: 1−8.

[6] 潘淑珍, 陈神灿. 严格双对角占优矩阵 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界估计 [J]. 福州大学学报 (自然科学版), 2008, 36(5): 639−642.

[7] HUANG T Z, ZHU Y. Estimations of $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ for Weakly Chained Diagonally Dominant M-Matrices [J]. Linear Algebra and its Applications, 2010, 432(2/3): 670−677.

[8] 刘　新, 杨晓英. 弱链对角占优 M -矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 上界估计 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2014, 27(4): 414−417.

[9] 赵建兴, 桑彩丽. 严格 α -对角占优 M -矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界估计 [J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(19): 280−284.

[10] 赵建兴, 桑彩丽. 严格 α_2 -对角占优 M -矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界序列 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(2): 1−6.

[11] GAO L, LI C Q, LI Y T. A New Upper Bound on the Infinity Norm of the Inverse of Nekrasov Matrices [J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 2014: 1−8.

[12] KOLOTILINA L Y. On Bounding Inverses to Nekrasov Matrices in the Infinity Norm [J]. Journal of Mathematical Sciences, 2014, 199(4): 432−437.

[13] CVETKOVIC L J, ERIC M, PENA J M. Eventually SDD Matrices and Eigenvalue Localization [J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 252: 535−540.

On Sequence of Upper Bounds for $\|A^{-1}\|_\infty$ of Eventually Strictly Diagonally Dominant Matrices

ZHAO Jian-xing

College of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China

Abstract: A sequence of upper bounds for of an eventually strictly diagonally dominant matrix $\boldsymbol{A}$ has been given by means of some existing upper bounds of the infinity norm of the inverse of strictly diagonally dominant matrices. Numerical examples show that the sequence is monotone decreasing and could reach the true value of $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ in some cases. These bounds in this paper improve some existing results.

Key words: diagonally dominant; inverse matrix; infinity norm; upper bound; sequence

责任编辑　崔玉洁