DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.09.001

对数麦克斯韦分布的渐近性质①

赵 扬[1]， 黄建文[2]

1. 遵义师范学院 数学与计算科学学院，贵州 遵义 563000；
2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：作为麦克斯韦分布的推广，提出了对数麦克斯韦分布. 然后研究了它的 Mills 不等式和 Mills 率，得到了该分布的尾部表示和最大值分布的极限分布以及点点收敛速度. 最后，研究了有限混合对数麦克斯韦分布的极限分布，得到了最大值分布的渐近分布和相应的规范化常数.

关 键 词：对数麦克斯韦分布；最大值；极限分布；赋范常数；混合分布

中图分类号：O211.4　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000-5471(2017)09-0001-05

当前，对新的分布函数和分布函数对数化的研究已经变成统计学领域的热点问题[1-3].

麦克斯韦在研究气体分子的速度分布律时提出来了麦克斯韦分布，其密度函数为

$$f_X(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),\ x>0$$

下面给出对数麦克斯韦分布的定义. 令 $F_X(x)$ 表示麦克斯韦分布的分布函数. 设随机变量 $X\sim F_X(x)$ 且随机变量 $\xi=\exp\{X\}$，则随机变量 ξ 服从对数麦克斯韦分布. 容易得到相应的概率密度函数为

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^{-1}(\ln x)^2}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}\right)\qquad x>0 \tag{1}$$

文献[4]研究了麦克斯韦分布的尾部特征包括：Mills 不等式和 Mills 类型率，极值分布以及逐点收敛速度. 文献[5-6]分别研究了麦克斯韦分布最大值的分布和矩的高阶渐近展开. 文献[7]研究了麦克斯韦分布最大值分布趋于极限分布的一致收敛速度.

本文主要研究对数麦克斯韦分布的 Mills 类型不等式、Mills 类型率和分布的尾部表示、同服从对数麦克斯韦样本的最大值的极限分布和相应的收敛速度以及有限混合对数麦克斯韦分布极值的渐近分布和相应的赋范常数.

1 对数麦克斯韦分布的尾部性质

定理 1 设 $F(x)$, $f(x)$ 分别表示对数麦克斯韦分布的累积分布函数和概率密度函数. 对于 $x>1$，有

$$\sigma^2\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{\sigma^2}{(\ln x)^2}\right)^{-1}<\frac{1-F(x)}{f(x)}<\sigma^2\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{\sigma}{\ln x}\right) \tag{2}$$

证 这里仍然使用引言中的有关记号. 设 $F_X(x)$，$f_X(x)$ 分别表示麦克斯韦分布的分布函数和密度函数. 注意到

$$\frac{1-F(x)}{f(x)}=x\frac{1-F_X(\ln x)}{f_X(\ln x)}$$

① 收稿日期：2016-06-08
基金项目：贵州省科技合作计划课题(黔科合 LH 字[2015]7055 号)；中央高校基本科研业务费专项(XDJK2015A007).
作者简介：赵 扬(1971-)，男，贵州习水人，副教授，主要从事概率论与数理统计的研究.

结合文献[4]中的定理1，定理得证．由定理1可得推论1．

推论1 当 $x \to \infty$ 时，有

$$\frac{1-F(x)}{f(x)} \sim \sigma^2 \frac{x}{\ln x} \tag{3}$$

定理2 设 $F(x)$ 表示对数麦克斯韦分布的累积分布函数．对于充分大的 x，则

$$1-F(x) = C(x)\exp\left(-\int_e^x \frac{g(t)}{\widetilde{f}(t)}\mathrm{d}t\right) \tag{4}$$

其中，

$$C(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right),\ x \to \infty$$

$$g(x) = 1 - \frac{\sigma^2}{(\ln x)^2}$$

$$\widetilde{f}(x) = \frac{\sigma^2 x}{\ln x}$$

证 由推论1和(1)式得

$$\begin{aligned}1-F(x) = & \frac{\sigma^2 x}{\ln x}f(x)(1+\theta(x)) = \\ & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\ln x}{\sigma}\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}\right)(1+\theta(x)) = \\ & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\left(\ln\ln x - \frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}\right)(1+\theta(x)) = \\ & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\int_e^x \frac{1-\frac{\sigma^2}{(\ln t)^2}}{\frac{\sigma^2 t}{\ln t}}\mathrm{d}t\right)(1+\theta(x)) = \\ & C(x)\exp\left(-\int_e^x \frac{g(t)}{\widetilde{f}(t)}\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

其中：$\theta(x) \to 0$，$x \to \infty$．$C(x)$，$g(x)$ 和 $\widetilde{f}(x)$ 的定义见定理2．定理证毕．

2 极值的渐近分布和收敛速度

定理3 设$(\xi_n,\ n \geqslant 1)$为独立同服从对数麦克斯韦分布的随机变量序列．令 $M_n = \bigvee_{i=1}^n \xi_i$．对 $x \in \mathbb{R}$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = \exp(-\exp(-x)) \tag{5}$$

其中，

$$a_n = \frac{\sigma}{(2\ln n)^{\frac{1}{2}}}\exp(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}}) \qquad b_n = \exp(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}})\left(1 + \frac{\sigma\left(\ln\frac{4}{\pi} + \ln\ln n\right)}{2(2\ln n)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

证 由定理2及文献[8]中命题1.19得 $F \in D(\Lambda)$，即有(5)式成立．下面确定赋范常数 a_n 和 b_n．令 $v_n(x) = a_n x + b_n =: v_n$．由(5)式知，当 $n \to \infty$ 时，有

$$n(1-F(v_n)) \sim \exp(-x)$$

由推论1和(1)式得

$$1-F(v_n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\ln v_n \exp\left(-\frac{(\ln v_n)^2}{2\sigma^2}\right)$$

从而

$$n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\ln v_n \exp\left(x - \frac{(\ln v_n)^2}{2\sigma^2}\right) \to 1,\ n \to \infty$$

两边取对数得

$$\ln n+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{\pi\sigma^2}+\ln\ln v_n+x-\frac{(\ln v_n)^2}{2\sigma^2}\to 0,\ n\to\infty \tag{6}$$

从而

$$\frac{(\ln v_n)^2}{2\sigma^2\ln n}\to 1,\ n\to\infty$$

两边取对数得

$$\ln\ln v_n=\frac{1}{2}(\ln 2\sigma^2+\ln\ln n)+o(1) \tag{7}$$

把(7)式代入(6)式得，

$$\frac{(\ln v_n)^2}{2\sigma^2}=\ln n+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{\pi}+\frac{1}{2}\ln\ln n+x+o(1)$$

因此

$$\ln v_n=\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\ln\frac{4}{\pi}+\frac{1}{2}\ln\ln n+x}{\ln n}+o((\ln n)^{-1})\right)^{\frac{1}{2}}=$$
$$\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}\sigma(\ln\frac{4}{\pi}+\ln\ln n+2x)}{(2\ln n)^{\frac{1}{2}}}+o((\ln n)^{-\frac{1}{2}})$$

所以

$$v_n=\exp\left(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}\sigma(\ln\frac{4}{\pi}+\ln\ln n+2x)}{(2\ln n)^{\frac{1}{2}}}+o((\ln n)^{-\frac{1}{2}})\right)=$$
$$\exp(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}})\exp\left(\frac{\frac{1}{2}\sigma(\ln\frac{4}{\pi}+\ln\ln n+2x)}{(2\ln n)^{\frac{1}{2}}}+o((\ln n)^{\frac{1}{2}})\right)=$$
$$\frac{\sigma}{(2\ln n)^{\frac{1}{2}}}\exp(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}})x+\exp(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}})\left(1+\frac{\sigma(\ln\frac{4}{\pi}+\ln\ln n)}{2(2\ln n)^{\frac{1}{2}}}\right)+$$
$$o((\ln n)^{\frac{1}{2}}\exp(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}}))=$$
$$a_nx+b_n+o((\ln n)^{\frac{1}{2}}\exp(\sigma(2\ln n)^{\frac{1}{2}}))$$

由文献[9]中 Khintchine 定理知结论成立.

定理 4　设 $F(x)$ 为对数麦克斯韦分布的分布函数. 赋范常数 a_n 和 b_n 由定理 3 给出. 当 $n\to\infty$ 时，则

$$F^n(a_nx+b_n)-\exp(-\exp(-x))\sim\exp(-\exp(-x))\exp(-x)\frac{(\ln\ln n)^2}{16\ln n}$$

证　类似于文献[4]定理 4 的证明.

3　有限混合的极值分布

定理 5　设$(\eta_n,\ n=1,2,\cdots)$为独立同分布的随机变量序列，分布函数的定义见文献[2]中的定理 4.2(这里的分布函数是由 k 个不同的对数麦克斯韦分布混合而成的). 令 $M_n=\vee_{i=1}^{n}\eta_i$. 对于所有的 $x>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{M_n-\beta_n}{\alpha_n}\leqslant x\right)=\lim_{n\to\infty}F^n(\alpha_nx+\beta_n)=\exp(-\exp(-x)) \tag{8}$$

赋范常数

$$\alpha_n=\frac{\sigma_s\exp(\sigma_s(2\ln n)^{\frac{1}{2}})}{(2\ln n)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\beta_n = \exp(\sigma_s(2\ln n)^{\frac{1}{2}})\exp\left(1+\frac{\sigma_s(\ln\frac{c}{\sigma_s^2\sqrt{\pi}}+\sigma_s(2\ln n)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\ln n)}{(2\ln n)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

其中：$\sigma_s = \vee_{i=1}^{k}\sigma_i$，$C = \sigma_{i:\sigma_i=\sigma_s} p_i$.

证 由文献[2]的(4.2)式，可得

$$1-F(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x))$$

其中，$F_i(x)$ 相应的密度函数为

$$f_i(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^{-1}(\ln x)^2}{\sigma_i^3}\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma_i^2}\right),\ x>0$$

从而由(2)式知对于 $x>1$，有

$$\mathscr{I}(x) =: \sum_{i=1}^{k} p_i\sigma_i^2 x(\ln x)^{-1}(1+\sigma_i^2(\ln x)^{-2})^{-1} f_i(x) < 1-F(x) < \sum_{i=1}^{k} p_i\sigma_i^2 x(\ln x)^{-1}(1+\sigma_i(\ln x)^{-1}) f_i(x) =: \mathscr{J}(x) \tag{9}$$

当 $x\to\infty$ 时，则

$$\mathscr{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^3}{\sigma_s}(\ln x)^{-1}\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma_s^2}\right)\left[\sum_{i:\sigma_i=\sigma_s} p_i\frac{\sigma_s}{\sigma_i}(1+\sigma_i(\ln x)^{-1})\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma_i^2}+\frac{(\ln x)^2}{2\sigma_s^2}\right)+\sum_{i:\sigma_i\neq\sigma_s} p_i\frac{\sigma_s}{\sigma_i}(1+\sigma_i(\ln x)^{-1})\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma_i^2}+\frac{(\ln x)^2}{2\sigma_s^2}\right)\right]\sim C\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^3}{\sigma_s}(\ln x)^{-1}\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma_s^2}\right) \tag{10}$$

其中 σ_s 和 C 的定义见定理5. 同理可得，当 $x\to\infty$ 时，有

$$\mathscr{I}(x) \sim C\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^3}{\sigma_s}(\ln x)^{-1}\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma_s^2}\right) \tag{11}$$

由(9),(10)和(11)式，可得

$$1-F(x) \sim C\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^3}{\sigma_s}(\ln x)^{-1}\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma_s^2}\right) \tag{12}$$

类似于定理2的证明，由(12)式可得

$$1-F(x) = \tilde{C}(x)\exp\left(-\int_e^x \frac{\tilde{g}(t)}{\hat{f}(t)}dt\right) \tag{13}$$

其中：

$$\tilde{C}(x) \to \frac{C}{\sigma_s}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(3-\frac{1}{2\sigma_s^2}\right),\ x\to\infty$$

$$\tilde{g}(x) = 1-\frac{3\sigma_s^2\ln x}{\sigma_s^2+\ln x}\hat{f}(x) = \frac{\sigma_s^2 x\ln x}{\sigma_s^2+(\ln x)^2}$$

由(13)式和文献[8]中的命题1.19可得，$F(x)\in D(\Lambda)$，即(8)式成立. 接下来，确定赋范常数 α_n 和 β_n，类似于定理3中赋范常数 a_n 和 b_n 的确定方法，详细的过程省略. 定理证毕.

参考文献：

[1] LIAO X，PENG Z X，NADARAJAH S. Tail Properties and Asymptotic Expansions for the Maximum of the Logarithmic Skew-normal Distribution [J]. Journal of Applied Probability，2013，50(3)：900－907.

[2] LIAO X，PENG Z X，NADARAJAH S. Tail Behavior and Limit Distribution of Maximum of Logarithmic General Error Distribution [J]. Communication in Statistics-Theory and Methods，2014，43(24)：5276－5289.

[3] 杜玲玲，陈守全. 对数伽马分布的尾部性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(1)：85－89.

[4] 刘 豹，付 颖. 麦克斯韦分布的逐点收敛速度 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(5)：80－83.

[5] 黄建文，刘衍民，罗远峰. 麦克斯韦分布最大值的高阶渐近展开 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(9)：

1—4.
[6] 黄建文，张　鹏，刘衍民，等. 麦克斯韦分布极值的矩的渐近展开 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(3)：97—103.
[7] LIU C D，LIU B. Convergence Rate of Extremes from Maxwell Sample [J]. Journal of Inequalities and Applications，2013，2013(1)：1—11.
[8] RESNICK S I. Extreme Value，Regular Variation，and Point Processes [M]. New York：Springer，1987.
[9] LEADBETTER M R，LINDGREN G，ROOTZÉN H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes [M]. New York：Springer，1983.

Asymptotic Properties of Logarithmic Maxwell Distribution

ZHAO　Yang[1]，　HUANG Jian-wen[2]

1. *School of Mathematics and Computational Science，Zunyi Normal College，Zunyi Guizhou 563000，China*；
2. *School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China*

Abstract：In this paper，the logarithmic Maxwell distribution，the extension of Maxwell distribution，has been proposed. Then，its Mills inequality and Mills type have been studied and the tail behavior of the distribution，the limit distribution of maximum and associated rate of convergence been obtained. At last，the limit distribution of finite mixed logarithmic Maxwell distribution is investigated and the asymptotic distribution of maxima distribution and the related normalized constants have been derived.

Key words：logarithmic Maxwell distribution；maxima；limit distribution；normalized constant；mixed distribution

责任编辑　张　枸