第 42 卷 第 9 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2017 年 9 月
Vol. 42 No. 9 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Sep. 2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.09.003

弱线性双层规划问题的罚分解方法①

洪云飞[1,2], 郑 跃[3], 陈 忠[2]

1. 长江大学期刊社,湖北 荆州 434023;2. 长江大学信息与数学学院,湖北 荆州 434023;
3. 淮北师范大学管理学院,安徽 淮北 235000

摘要: 主要研究弱线性双层规划问题的求解方法. 首先利用线性规划的对偶理论和罚函数方法思想,将弱线性双层规划问题转化为一个单层非线性规划问题. 进一步把该单层优化问题分解为两个含有罚参数的线性规划问题,设计了一个罚分解方法,并用一个简单算例说明了所提出方法的可行性.

关 键 词: 双层规划;对偶理论;罚分解方法

中图分类号: O224 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2017)09-0011-05

双层规划问题[1-3] 是一种具有主从递阶结构的数学规划问题,它包含两层优化问题:上层优化问题和下层优化问题. 目前,对双层规划问题的研究集中于讨论强双层规划[2, 4-7] 和弱双层规划. 相比较而言,对前者的研究要远多于后者. 由于弱双层规划体现着上层决策者如何从最不利的决策中选取一个最有利的决策,因此研究与探讨弱双层规划有着重要的理论意义与实际价值[8-13].

罚函数方法是求解约束优化问题的有效方法之一. Aboussoror 和 Mansouri[14] 针对弱线性双层规划问题,提出了一种精确罚函数方法;Lv, Hu 和 Wan[15] 对弱价格控制问题(该问题类似于弱线性规划问题)提出了一种罚函数方法;Zheng 等[16] 利用罚函数方法的思想与线性规划的对偶理论,将弱线性规划问题转化为含有罚参数的不连接双线性规划问题,提出了一个可以获得局部最优解的算法等. 郑跃[17] 针对弱线性双层规划问题设计了一个全局优化算法,但该算法能够实现的前提条件是必须先计算出该类问题约束域的所有顶点.

1 弱线性双层规划模型与定义

一般弱线性双层规划问题的数学模型可以描述为

$$\min_{x\in X}\ \max_{y\in M(x)}[\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}] \tag{1}$$

其中给定 $\boldsymbol{x}\in X$, $M(\boldsymbol{x})$ 是下层规划问题的最优解集

$$\min_{y\geqslant 0}\ \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{2}$$

$$\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{By}\leqslant \boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}$$

其中:$\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}_1\in\mathbb{R}^n$;$\boldsymbol{y},\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2\in\mathbb{R}^m$;$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{q\times m}$;$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^q$;$X$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个闭子集.

下面介绍弱线性双层规划问题(1) 的相关定义:

1) 弱线性双层规划问题(1) 的约束域:

$$S=\{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{By}\leqslant \boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{y}\geqslant \boldsymbol{0}\}$$

2) 在上层决策者空间的投影:

---

① 收稿日期:2016-08-01
基金项目:国家自然科学基金项目(11501233, 61273179).
作者简介:洪云飞(1979-),男,湖北洪湖人,硕士,讲师,主要从事最优化理论、算法及其应用研究.

$$S(X)=\{x\in X\mid \exists y,(x,y)\in S\}$$

3）弱线性双层规划问题(1)的诱导域或可行域：

$$IR=\{(x,y)\mid (x,y)\in S,y\in M(x)\}$$

4）弱线性双层规划问题(1)的最优解：

$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$称为弱线性双层规划问题(1)的最优解，如果存在$\boldsymbol{y}^*\in M(\boldsymbol{x}^*)$，并且满足

$$\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*\geqslant \boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\ \forall \boldsymbol{y}\in M(\boldsymbol{x}^*)$$

和

$$\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*+v(\boldsymbol{x}^*)\leqslant \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+v(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x}\in S(X)$$

其中$v(\boldsymbol{x})=\max\limits_{\boldsymbol{y}\in M(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

2 罚分解方法

利用线性规划的对偶理论可知，问题(2)的对偶问题为：

$$\begin{aligned}&\max_{z}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\\ &\text{s.t. }-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant \boldsymbol{d}_2\\ &\boldsymbol{z}\geqslant \boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{3}$$

记问题(2)的最优值函数为$\varphi(\boldsymbol{x})$，则存在$\boldsymbol{y}$满足等式$\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})$的充要条件是存在$\boldsymbol{z}$，使得$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$满足下面的系统：

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant \boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\\ -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant \boldsymbol{d}_2\\ \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=0\\ \boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\geqslant 0\end{cases}\tag{4}$$

于是，下面问题：

$$\max_{y\in M(x)}\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

等价于如下问题：

$$\begin{aligned}&\max\ \boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\ &\text{s.t. }\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant \boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\\ &\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqslant \varphi(\boldsymbol{x})\\ &\boldsymbol{y}\geqslant \boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{5}$$

利用线性规划的对偶理论可知，问题(5)的对偶问题为：

$$\begin{aligned}&\min_{v,\boldsymbol{w}}v\varphi(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\\ &\text{s.t. }-\boldsymbol{d}_2v-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\leqslant -\boldsymbol{d}_1\\ &v\geqslant 0,\ \boldsymbol{w}\geqslant \boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{6}$$

对于给定的$\boldsymbol{x}$来说，问题(5)和问题(6)具有相同的最优值. 因此，弱线性双层规划问题(1)可以等价转化为一个单层优化问题：

$$\begin{aligned}&\min_{x,v,\boldsymbol{w}}\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+v\varphi(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\\ &\text{s.t. }-\boldsymbol{d}_2v-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\leqslant -\boldsymbol{d}_1\\ &\boldsymbol{x}\in X\\ &v\geqslant 0,\ \boldsymbol{w}\geqslant \boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{7}$$

进一步，借助于系统(4)，可将问题(7)等价转化为：

$$\begin{aligned}&\min_{x,y,z,v,\boldsymbol{w}}\ \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+v\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\\ &\text{s.t. }-\boldsymbol{d}_2v-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\leqslant -\boldsymbol{d}_1\\ &\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant \boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\\ &-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant \boldsymbol{d}_2\end{aligned}\tag{8}$$

$$\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=0$$
$$\boldsymbol{x}\in X$$
$$v\geqslant 0,\ \boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\geqslant 0$$

为保证弱线性双层规划问题(1)的最优解的存在性和算法的适应性，假设下列条件满足：

(A1) 对于每一个 $\boldsymbol{x}\in X$，$Y(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant \boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\geqslant \boldsymbol{0}\}\neq\Phi$，并且对于任意的 $\boldsymbol{x}\in X$，都存在一个紧子集 $Z\subset\mathbb{R}^m$，使得 $Y(\boldsymbol{x})\subset Z$.

(A2) 集合 X 是一个非空的有界多面体.

由于问题(8)的约束条件中含有问题(2)和问题(3)的对偶间隙 $\pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$，于是一个很自然的想法是惩罚对偶间隙，可以得到弱线性双层规划问题(1)的一个罚问题：

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},v,\boldsymbol{w}}\ & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+v\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}+\rho[\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}]\\ \text{s.t.}\ & -\boldsymbol{d}_2v-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\leqslant-\boldsymbol{d}_1\\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\\ & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant\boldsymbol{d}_2\\ & \boldsymbol{x}\in X\\ & v\geqslant 0,\ \boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{9}$$

其中 $\rho>0$ 是一个罚参数.

关于问题(9)的最优解的存在性以及它与问题(1)的关系，类似于Campelo等[18]中定理7的结论，我们可以得到如下的定理1.

定理 1　在假设条件(A1)－(A2)下，存在 $\rho^*>0$，当 $\rho\geqslant\rho^*$ 时，问题(9)的最优解也是问题(1)的最优解.

注意，关于弱线性双层规划问题(1)的罚问题(9)，我们有下面的结论：

1) 当$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$固定时，问题(9)是关于变量$(v,\boldsymbol{w},\boldsymbol{z})$的线性规划问题；

2) 当$(v,\boldsymbol{w},\boldsymbol{z})$固定时，问题(9)是关于变量$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$的线性规划问题.

基于此，受文献[19－20]的启发，本文尝试使用罚分解方法求解问题(9)，进一步获得问题(1)的次优解. 众所周知，弱线性双层规划问题(1)是NP-难问题[13]，获得该问题的最优解一般是非常困难的. 此外，一是本文提出的罚分解方法易于实现问题(1)的次优解，二是最优解一般是从多个次优解中选取出来的. 因此，提出获得弱线性双层规划问题(1)的次优解的方法具有实际意义.

下面详细介绍问题(9)在固定某些变量时的子问题模型. 令$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})$，问题(9)变成：

$$P_\rho(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\qquad\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{z},v,\boldsymbol{w}}\ & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}}+v\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}+\rho\lfloor\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\rfloor\\ \text{s.t.}\ & -\boldsymbol{d}_2v-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\leqslant-\boldsymbol{d}_1\\ & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant\boldsymbol{d}_2\\ & v\geqslant 0,\ \boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

令$(v,\boldsymbol{w},\boldsymbol{z})=(\bar{v},\bar{\boldsymbol{w}},\bar{\boldsymbol{z}})$，问题(9)变成：

$$P_\rho(\bar{v},\bar{\boldsymbol{w}},\bar{\boldsymbol{z}})\qquad\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\ & \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}x+\bar{v}\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{w}}+\rho\lfloor\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{z}}\rfloor\\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\\ & \boldsymbol{x}\in X\\ & \boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

令 SS 表示问题 $P_\rho(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})$ 的可行域. 本文提出如下的罚分解方法：

Step 1. 选择参数 $\varepsilon>0$，$\rho_0>0$，$\sigma>1$，$k=0$，$(v^0,\boldsymbol{w}^0,\boldsymbol{z}^0)\in SS$；

Step 2. 求解线性规划问题 $P_{\rho_k}(v^k,\boldsymbol{w}^k,\boldsymbol{z}^k)$，记其最优解为$(\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1})$；

Step 3. 求解线性规划问题 $P_{\rho_k}(\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1})$，记其最优解为$(v^{k+1},\boldsymbol{w}^{k+1},\boldsymbol{z}^{k+1})$；

Step 4. 如果 $\pi(\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{z}^{k+1})\leqslant\varepsilon$，停止，令 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^{k+1}$，$\boldsymbol{y}^*$ 是问题(5)的最优解，$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$是一个近似的次优解；否则，转 Step 5；

Step 5. 令 $\rho_{k+1}=\sigma\rho_k$，$k=k+1$，转 Step 2.

3 数值试验

下面利用一个简单算例[16] 说明本文所提出的罚分解方法是可行的.

$$\min_{x\in X}\max_{y\in M(x)} -8x_1-10x_2-2y_1+y_2$$

其中 $X=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}=(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, x_1+x_2\leqslant 10, x_1, x_2\geqslant 0\}$，$M(\boldsymbol{x})$ 是下层优化问题的最优解集

$$\min_y -y_1-y_2$$

$$\text{s.t.}\quad y_1+y_2\leqslant 20+x_1+x_2$$

$$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$$

在数值实验中，选取参数值如下：

$$\varepsilon>10^{-6}, \rho_0=10, \sigma=10.$$

为便于理解，笔者将罚分解方法的求解过程设计成如表 1 所示的形式.

表 1 本文算例的求解

k	$(v^0, \boldsymbol{w}^0, \boldsymbol{z}^0)$	$(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{y}^1)$	$(v^1, \boldsymbol{w}^1, \boldsymbol{z}^1)$	$\pi(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{z}^1)$
0	(1, 2, 2)	(0, 10, 10, 0)	(0, 1, 1)	0

因此，当 $\boldsymbol{x}^*=(0, 10)^{\mathrm{T}}$ 时，问题(5)的最优解为 $\boldsymbol{y}^*=(0, 10)^{\mathrm{T}}$. 该算例的次优解为$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)=(0, 10, 0, 10)^{\mathrm{T}}$，最优值为$-90$. 实际上，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)=(0, 10, 0, 10)^{\mathrm{T}}$ 是该算例的全局最优解，这表明本文设计的算法是可行的.

4 结　　语

即使是弱线性双层规划问题也是 NP-难问题. 因此，获得此类问题的最优解一般是非常困难的. 本文针对弱线性双层规划问题，提出了一个罚分解方法，数值算例结果表明该方法是可行的. 另外，所设计的方法只需要求解若干个线性规划问题，便可以得到弱线性双层规划问题的次优解. 对于某些算例来说，本文所提出的罚分解方法获得的次优解甚至是弱线性双层规划的最优解.

参考文献：

[1] BARD J F. Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998: 301－310.

[2] DEMPE S. Foundations of Bilevel Programming [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002: 21－56.

[3] DEMPE S. Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints [J]. Optimization, 2003, 52(3): 333－359.

[4] 王广民，万仲平，王先甲. 二(双)层规划综述 [J]. 数学进展，2007，36(5)：513－529.

[5] 吴　慧，吕一兵. 一类非线性二层多目标规划问题的主要目标法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(1)：109－115.

[6] 王　思，吕一兵. 一类半向量二层规划问题乐观最优解的求解方法 [J]. 长江大学学报(自科版)，2016，13(1)：1－6.

[7] 周婉娜，霍永亮，胡之英. 二层随机规划逼近解集上半收敛性的一个充分条件 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(9)：17－22.

[8] LUCCHETTI R, MIGNANERGO F, PIERI G. Existence Theorems of Equilibrium Points in Stackelberg [J]. Optimization, 1987, 18(6): 857－866.

[9] ABORSSOROR A , ADLYA S, JALBY V. Weak Nonlinear Bilevel Problems: Existence of Solutions via Reverse Convex and Convex Maximization Problems [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2011, 3(7): 559－571.

[10] LORIDAN P, MORGAN J. Least-Norm Regularization for Weak Two-Level Optimization Problems [C]//Optimization, Optimal Control and Partial Differential Equations, International Series of Numerical Mathematics. Basel: Birkhauser Verlag , 1992: 307－318.

[11] LORIDAN P, MORGAN J. Weak via Strong Stackelberg Problem: New Results [J]. Journal of Global Optimization,

1996，8(8)：263－287.

[12] DEMPE S，MORDUKHOVICH B S，ZEMKOHO A B. Necessary Optimality Conditions in Pessimistic Bilevel Programming [J]. Optimization，2014，63(4)：505－533.

[13] WIESEMANN W，TSOUKALAS A，KLENIATI P，et al. Pessimistic Bi－Level Optimisation [J]. SIAM Journal on Optimization，2013，23(1)：352－380.

[14] ABORSSOROR A，MANSOURI A. Weak Linear Bilevel Programming Problems：Existence of Solutions via a Penalty Method [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2005，304(1)：399－408.

[15] LV Y，HU T，WAN Z. A Penalty Function Method for Solving Weak Price Control Problem [J]. Applied Mathematics and Computations，2007，186(2)：1520－1525.

[16] ZHENG Y，WAN Z，SUN K，et al. An Exact Penalty Method for Weak Linear Bilevel Programming Problem [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing，2013，42(1－2)：41－49.

[17] 郑　跃. 弱线性双层规划问题的全局优化算法 [J]. 长江大学学报(自科版)，2015，12(10)：1－4.

[18] CAMPELO M，DANTAS S，SCHEIMBERG S. A Note on a Penalty Function for Solving Bilevel Linear Programs [J]. Journal of Global Optimization，2000，16(3)：245－255.

[19] LU Z，ZHANG Y. Sparse Approximation via Penalty Decomposition Methods[J]. SIAM Journal on Optimization，2013，23(4)：2448－2478.

[20] JIN Z，WAN Z，ZHAO X，et al. A Penalty Decomposition Method for Rank Minimization Problem with Affine Constraints [J]. Applied Mathematical Modelling，2015，39(16)：4859－4870.

On a Penalty Decomposition Method for Solving Weak Linear Bilevel Programming Problems

HONG Yun-fei[1,2]，ZHENG Yue[3]，CHEN Zhong[2]

1. Periodical of Yangtze University，Jingzhou Hubei 434023，China；

2. School of Information and Mathematics，Yangtze University，Jingzhou Hubei 434023，China；

3. School of Management，Huaibei Normal University，Huaibei Anhui 235000

Abstract：In this paper，a solution method has mainly been discussed to solve the weak linear bilevel programming problems. Using the dual theory of linear programming and the idea of penalty function method，the weak linear bilevel programming problem has firstly been transformed into a single-level nonlinear programming problem. Furthermore，the latter problem has been decomposed into two linear programming problems which involve a penalty parameter. Finally，a penalty decomposition method has been present and a simple numerical example used to illustrate the feasibility of the proposed method.

Key words：bilevel programming；dual theory；penalty decomposition method

责任编辑　张　构