DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.09.005

一类具有脉冲作用与饱和治愈率的SIRS模型的分析[①]

王　杏，　贾建文

山西师范大学 数学与计算机科学学院，山西 临汾 041004

摘要：研究了一类具有出生脉冲，脉冲接种和饱和治愈率的SIRS传染病模型. 首先研究了无病周期解和非平凡周期解的存在性和稳定性，得到了分支存在的条件，其次得到了一个Poincaré映射，运用Poincaré映射和中心流形定理讨论染病周期解的Flip分支.

关　键　词：SIRS传染病模型；出生脉冲；饱和治愈率；周期解；分支

中图分类号：O175.12　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2017)09-0020-07

传染病给人类和动物的生活造成了极大的影响，因而研究疾病传播的动力学行为是至关重要的. SIRS传染病模型是最基本的也是最重要的模型，而且已经被许多研究者研究. 学者们为了更好地刻画传染病数学模型，使之更能反映实际，用脉冲微分方程来建立模型，并且已经获得了许多结果. 自从Agur和他的同事第一次提出脉冲接种策略(PVS)后，这一策略在许多文献中都被考虑[1-2]. 我们知道许多种群仅在一年的特定时间出生，文献[3]中称这种增长模式为出生脉冲. 近几年不少学者研究了各种具有出生脉冲的传染病模型[4-5]，其中出生脉冲的形式是：$\Delta N=(b-cN)N$.

治疗是一种有效阻止和控制疾病传播的方法. 许多经典的模型中都引用线性治愈率[4-5]，但在实际中，由于医疗资源的有限性，饱和治愈率被提出且被广泛研究[6-7].

基于上述考虑，本文建立一个新的具有饱和治愈率的SIRS传染病模型，其中不仅考虑了垂直传播、出生脉冲，而且仅对新生儿进行脉冲接种，模型如下：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&S'=-dS-\beta SI+\delta R,\\&I'=\beta SI-(d+\alpha)I-\frac{aI}{\omega+I},\\&R'=\frac{aI}{\omega+I}-(\delta+d)R,\end{aligned}\right\}t\neq nT,\\ \left.\begin{aligned}&\Delta S=(b-cN)(1-p)(S+R+\mu I),\\&\Delta I=(b-cN)(1-\mu)I,\\&\Delta R=(b-cN)p(S+R+\mu I),\end{aligned}\right\}t=nT,\ n\in\mathbb{N}_+,\end{cases}\tag{1}$$

其中：$N=S+I+R$，d是自然死亡率，α为因病死亡率，δ是移出类中失去免疫力又回到易感类的比例，传染率为βI，$\dfrac{aI}{\omega+I}$是饱和治愈率，$\mu(0\leqslant\mu\leqslant1)$是染病者生出的新生儿中易感者的比率，$p(0<p<1)$是

① 收稿日期：2015-06-01
基金项目：山西省自然科学基金项目(2013011002-2).
作者简介：王　杏(1990-)，女，山西运城人，硕士研究生，主要从事生物数学研究.
通信作者：贾建文，教授，硕士研究生导师.

新生儿成功接种的概率，c 是密度制约系数. 假设出生脉冲和脉冲接种仅在 $t=nT$ 发生，其中 $n\in\mathbb{N}_+$.

1　无病周期解的存在性和稳定性

在本节中，我们讨论无病周期解的存在性和稳定性，此时不考虑染病的个体，即 $I(t)=0$，$t\geqslant 0$，$N=S+R$，系统(1) 变为：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&N'=-dN,\\&R'=-(\delta+d)R,\end{aligned}\right\}t\neq nT,\\\left.\begin{aligned}&\Delta N=(b-cN)N,\\&\Delta R=(b-cN)pN,\end{aligned}\right\}\ t=nT,\ n\in N.\end{cases}\tag{2}$$

定理 1　当 $b=\mathrm{e}^{dT}-1$ 时，系统(1) 出现 Fold 分支. 当 $0<b<\mathrm{e}^{dT}-1$ 时，系统(1) 有稳定的平凡周期解$(0,0,0)$. 对某个 $\epsilon>0$，当 $b\in(\mathrm{e}^{dT}-1,\mathrm{e}^{dT}-1+\epsilon)$ 时，系统(1) 有稳定的无病周期解$(\widetilde{S}(t),\widetilde{I}(t),\widetilde{R}(t))$.

证　令系统(2) 的初始点为(N_k,R_k)，系统的轨线是从初始点经过 T 时刻到达点$(\overline{N}_k,\overline{R}_k)$，然后脉冲，跳到点$(N_{k+1},R_{k+1})$，依据系统(2) 我们有

$$\begin{cases}N(t)=N_k\mathrm{e}^{-dt},\ kT<t\leqslant(k+1)T,\\N_{k+1}=(1+b-cN_k\mathrm{e}^{-dT})N_k\mathrm{e}^{-dT}\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}R(t)=R_k\mathrm{e}^{-(\delta+d)t},\ kT<t\leqslant(k+1)T\\R_{k+1}=R_k\mathrm{e}^{-(\delta+d)T}+p(b-cN_k\mathrm{e}^{-dT})N_k\mathrm{e}^{-dT}\end{cases}$$

因此，我们得到以下的离散映射：

$$\begin{cases}N_{k+1}=(1+b-cN_k\mathrm{e}^{-dT})N_k\mathrm{e}^{-dT}\\R_{k+1}=R_k\mathrm{e}^{-(\delta+d)T}+p(b-cN_k\mathrm{e}^{-dT})N_k\mathrm{e}^{-dT}\end{cases}\tag{3}$$

显然，映射(3) 的不动点的存在性等同于系统(2) 的周期解的存在性. 易得映射(3) 两个不动点：

$$G_1=G(0,0)=(0,0),\ G_2=G(N_0,R_0)=\left(\frac{(1+b-\mathrm{e}^{dT})\mathrm{e}^{dT}}{c},\ \frac{p(\mathrm{e}^{dT}-1)(1+b-\mathrm{e}^{dT})}{c(1-\mathrm{e}^{-(\delta+d)T})}\right)$$

首先考虑 G_1 点的情况，在点 $G_1(0,0)$ 处对应的特征方程是：

$$[\lambda-(1+b)\mathrm{e}^{-dT}](\lambda-\mathrm{e}^{-(\delta+d)T})=0$$

其特征根为 $\lambda_1=(1+b)\mathrm{e}^{-dT}$，$\lambda_2=\mathrm{e}^{-(\delta+d)T}$.

对于 $\forall\, T>0$，显然有 $0<\lambda_2<1$，当 $b<\mathrm{e}^{dT}-1$ 时，$0<\lambda_1<1$. 所以系统(2) 的平凡周期解$(0,0)$ 是稳定的. 从而，系统(1) 有稳定的平凡周期解$(0,0,0)$.

其次考虑 G_2 点的情况，在 $G_2(N_0,R_0)$ 点处对应的特征方程为：

$$[\lambda-2+(1+b)\mathrm{e}^{-dT}](\lambda-\mathrm{e}^{-(\delta+d)T})=0$$

其特征根是 $\lambda_3=2-(1+b)\mathrm{e}^{-dT}$，$\lambda_4=\mathrm{e}^{-(\delta+d)T}$.

易证，对于 $\forall\, T>0$，$0<\lambda_4<1$. 当 $-1<\lambda_3<1$，即 $\dfrac{1}{d}\ln\dfrac{1+b}{3}<T<\dfrac{1}{d}\ln(1+b)$，令 $T^*=\max\left\{0,\dfrac{1}{d}\ln\dfrac{1+b}{3}\right\}$，所以，对于 $T\in\left(T^*,\dfrac{1}{d}\ln(1+b)\right)$，系统(2) 在 G_2 点处是稳定的. 因此对于某个 $\epsilon>0$，当 $b\in(\mathrm{e}^{dT}-1,\mathrm{e}^{dT}-1+\epsilon)$ 时，系统(2) 的周期解$(\widetilde{N}(t),\widetilde{R}(t))$ 是稳定的. 其中

$$\begin{cases}\widetilde{N}(t)=\dfrac{(1+b-\mathrm{e}^{dT})\mathrm{e}^{dT}}{c}\mathrm{e}^{-d(t-nT)},\\[2ex]\widetilde{R}(t)=\dfrac{p(\mathrm{e}^{dT}-1)(1+b-\mathrm{e}^{dT})}{c(1-\mathrm{e}^{-(\delta+d)T})}\mathrm{e}^{-(\delta+d)(t-nT)},\end{cases}\quad 2nT<t\leqslant(2n+1)T$$

所以系统(1) 存在无病周期解$(\widetilde{S}(t),\widetilde{I}(t),\widetilde{R}(t))$，其中

$$\begin{cases}\widetilde{S}(t)=\dfrac{(1+b-e^{dT})e^{dT}}{c}e^{-d(t-nT)}-\widetilde{R}(t),\\ \widetilde{I}(t)=0, \qquad\qquad\qquad\qquad 2nT<t\leqslant(2n+1)T\\ \widetilde{R}(t)=\dfrac{p(e^{dT}-1)(1+b-e^{dT})}{c(1-e^{-(\delta+d)T})}e^{-(\delta+d)(t-nT)},\end{cases}$$

显然，系统(1)无病周期解是稳定的.

对于 $T=\dfrac{1}{d}\ln(1+b)$，即 $b=e^{dT}-1$ 时，$\lambda_3=1$，依据文献[8]知，系统(1)在 $b=e^{dT}-1$ 处出现Fold分支. 定理1得证.

2 非平凡周期解的分支问题

本节我们主要讨论系统(1)的非平凡周期解的分支存在性，其中 b 作为一个参数. 在讨论之前，我们首先给出与分支相关的理论：

引理 1[9] 若 $|1-a'_0|<1$ 且 $d'_0=0$，则

(a) 当 $BC\neq 0$ 时，系统存在一个分支，而且当 $BC<0$ 时，(15)存在非平凡周期解的一个分支，当 $BC>0$ 时，存在一个临界情况.

(b) 当 $BC=0$ 时，是一个不确定的情况.

令 $N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$，系统(1)改写为：

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}N'=-dN,\ I'=\beta(N-I-R)-(d+\alpha)I-\dfrac{aI}{\omega+I},\\ R'=\dfrac{aI}{\omega+I}-(\delta+d)R,\end{array}\right\}t\neq nT,\\ \left.\begin{array}{l}\Delta N=(b-cN)N),\\ \Delta I=(b-cN)(1-\mu)I,\\ \Delta R=(b-cN)p(S+R+\mu I),\end{array}\right\}t=nT,\ n\in\mathbb{N}_+.\end{cases}\tag{4}$$

从(4)式的第一、第四个方程得：

$$\begin{cases}N(t)=N(nT^+)e^{-d(t-nT)},\\ N(nT^+)=(1+b-cN(nT))N(nT),\end{cases}$$

此时，(4)式中 $N(t)$ 为独立的函数，从而(4)式化为：

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}R'=\dfrac{aI}{\omega+I}-(\delta+d)R:=G_1(R,I),\\ I'=\beta(N-I-R)-(d+\alpha)I-\dfrac{aI}{\omega+I}:=G_2(R,I),\end{array}\right\}t\neq nT,\\ \left.\begin{array}{l}R(nT^+)=R(nT)+(b-cN(nT))p[N(nT)-(1-\mu)I(nT)]:=\theta_1(R(nT),I(nT)),\\ I(nT^+)=I(nT)+(b-cN(nT))(1-\mu)I(nT):=\theta_2(R(nT),I(nT)),\end{array}\right\}t=nT\end{cases}\tag{5}$$

且满足：当 $R\neq 0$ 时，$\theta_1\neq 0$；$I\neq 0$ 时，$\theta_2\neq 0$.

定理 2 系统(1)在 $b=b^*$ 处存在一个非平凡周期解的超临界分支，且对某个 $\epsilon>0$，当 $b\in(b^*,b^*+\epsilon)$ 时，系统(1)有一个稳定的地方病周期解，其中 b^* 在证明中给出.

证 设系统(5)的解为 $\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{\Psi}(t,R_0,I_0)(0<t\leqslant T)$，其中 $\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{U}(R_0,I_0)$，$R_0=R(0)$，$I_0=I(0)$ 且 $\boldsymbol{\Psi}=(\boldsymbol{\Psi}_1,\boldsymbol{\Psi}_2)$，令 $\xi(t)=(\widetilde{R}(t),0)=\left(\dfrac{p(e^{dT}-1)(1+b-e^{dT})}{c(1-e^{-(\delta+d)T})}e^{-(\delta+d)t},0\right)$.

计算得：

$$\frac{\partial\Psi_1(T,U_0)}{\partial R}=e^{\int_0^T\frac{\partial G_1(\xi(t))}{\partial R}dt}=e^{-(\delta+d)T},$$

$$\frac{\partial\Psi_2(T,U_0)}{\partial I}=e^{\int_0^T\frac{\partial G_2(\xi(t))}{\partial I}dt}=e^{\beta\int_0^T(\widetilde{N}(t)-\widetilde{R}(t))dt-(d+\alpha+\frac{a}{\omega})T},$$

$$\frac{\partial\Psi_1(T,U_0)}{\partial I}=\int_0^T e^{-(\delta+d)(t-T)}\cdot\frac{a}{\omega}\cdot e^{\int_0^t\frac{\partial G_2(\xi(t))}{\partial I}d\tau}dt,$$

$$d'_0=1-\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial I}\cdot\frac{\partial\Psi_2}{\partial I}\right)(T,U_0)=1-(1+(b-c\widetilde{N}(T))(1-\mu))e^{\beta\int_0^T(\widetilde{N}(t)-\widetilde{R}(t))dt-(d+\alpha+\frac{a}{\omega})T},$$

$$a'_0=1-\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial R}\cdot\frac{\partial\Psi_1}{\partial R}\right)(T,U_0)=1-e^{-(\delta+d)T}>0,$$

$$b'_0=-\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial R}\cdot\frac{\partial\Psi_1}{\partial R}\right)(T,U_0)=-\frac{a}{\omega}\int_0^T e^{-(\delta+d)(t-T)}\cdot e^{\int_0^t\frac{\partial G_2(\xi(t))}{\partial I}d\tau}dt<0,$$

$$\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial R\partial I}=-\beta\int_0^T e^{\int_t^T\frac{\partial G_2(\xi(t))}{\partial I}d\tau}\cdot e^{\int_0^t\frac{\partial G_2(\xi(t))}{\partial I}d\tau}dt<0,$$

$$\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial I^2}=-\beta\int_0^T e^{\int_t^T\frac{\partial G_2(\xi(\tau))}{\partial I}d\tau}\cdot e^{\int_0^t\frac{\partial G_2(\xi(\tau))}{\partial I}d\tau}dt-\frac{a\beta}{\omega}\int_0^T e^{\int_t^T\frac{\partial G_2(\xi(\tau))}{\partial I}d\tau}\cdot\left(\int_0^t e^{\int_v^T\frac{\partial G_1(\xi(\tau))}{\partial R}d\tau}\cdot e^{\int_0^v\frac{\partial G_2(\xi(\tau))}{\partial I}d\tau}dv\right)dt<0,$$

$$\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial I\partial t}=(\beta(\widetilde{N}(t)-\widetilde{R}(t))-(d+\alpha+\frac{a}{\omega}))e^{\beta\int_0^T(\widetilde{N}(t)-\widetilde{R}(t))dt-(d+\alpha+\frac{a}{\omega})T},$$

$$\frac{\partial\Psi_1(T,U_0)}{\partial t}=\bar{R}'(T)=\frac{-(\delta+d)p(e^{dT}-1)(1+b-e^{dT})}{c(1-e^{-(\delta+d)T})}e^{-(\delta+d)T}<0,$$

$$|1-a'_0|=e^{-(\delta+d)T}<1,$$

$$B=-\frac{\partial^2\theta_2}{\partial R\partial I}\left(\frac{\partial\Psi_1(T,U_0)}{\partial t}+\frac{\partial\Psi_1(T,U_0)}{\partial R}\cdot\frac{1}{a'_0}\cdot\frac{\partial\Psi_1(T,U_0)}{\partial t}\right)\frac{\partial\Psi_2(T,U_0)}{\partial I}-$$
$$\frac{\partial\theta_2}{\partial I}\left(\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial I\partial t}+\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial R\partial I}\cdot\frac{1}{a'_0}\cdot\frac{\partial\theta_1}{\partial R}\cdot\frac{\partial\Psi_1(T,U_0)}{\partial t}\right)=$$
$$-\frac{\partial\theta_2}{\partial I}\left(\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial I\partial t}+\frac{\beta}{a'_0}\cdot\bar{R}'(T)\cdot\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial R\partial I}\right)$$

$$C=-2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial R\partial I}\left(-\frac{b'_0}{a'_0}\cdot\frac{\partial\Psi_1(T,U_0)}{\partial R}\cdot\frac{\partial\Psi_1(T,U_0)}{\partial I}\right)\frac{\partial\Psi_2(T,U_0)}{\partial I}-\frac{\partial^2\theta_2}{\partial I^2}\left(\frac{\partial\Psi_2(T,U_0)}{\partial I}\right)^2+$$
$$2\cdot\frac{\partial\theta_2}{\partial I}\cdot\frac{b'_0}{a'_0}\cdot\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial R\partial I}-\frac{\partial\theta_2}{\partial I}\cdot\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial I^2}=$$
$$\frac{\partial\theta_2}{\partial I}\left(2\cdot\frac{b'_0}{a'_0}\cdot\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial R\partial I}-\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial I^2}\right)$$

$$BC=-\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial I}\right)^2\left(\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial I\partial t}+\frac{\beta}{a'_0}\cdot\bar{R}'(T)\cdot\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial R\partial I}\right)\left(2\cdot\frac{b'_0}{a'_0}\cdot\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial R\partial I}-\frac{\partial^2\Psi_2(T,U_0)}{\partial I^2}\right)<0$$

由 $d'_0=0$ 得：$1=(1+b-c\widetilde{N}(T))(1-\mu)e^{\beta\int_0^T(\widetilde{N}(t)-\widetilde{R}(t))dt-(d+\alpha+\frac{a}{\omega})T}$.

解得：$b=c\widetilde{N}(T)+\frac{1}{1-\mu}e^{(d+\alpha+\frac{a}{\omega})T-\beta\int_0^T\widetilde{S}(t)dt}-1:=b^*$. 已证 $BC<0$，依据引理 1，证之.

3　Flip 分支

从前一节，我们知道，当 $b>b^*$ 时，系统(4)有一个稳定的地方病周期解$(N(t),I(t),R(t))$. 接下来我们讨论该周期解的 Flip 分支问题.

假设具有 T 周期的周期解$(N(t),I(t),R(t))$过点 $A_0(N_0,I_0,R_0)$ 和 $B_0(N(T),I(T),R(T))$. 选择一个 Poincaré 曲面 $S_0=\{(N,I,R)\mid I=I_0\}$. 周期解轨线从初始点 A_0 出发，在 T 时刻到达 B_0 点，由于脉冲作用，轨线又跳到 A_0 点，因此我们有：

$$N_0=(1+b-cN(T))N(T)$$
$$I_0=(1+(b-cN(T))(1-\mu))I(T)$$
$$R_0=R(T)+(b-cN(T))p(N(T)+(\mu-1)I(T))$$

由(4)知 $N(T)=N_0e^{-dT}$，$N_0=(1+b-cN_0e^{-dT})N_0e^{-dT}$. 因此 $N(T)=\frac{1+b-e^{dT}}{c}$.

考虑另一个从初始点 $A_k(N_0+x_k,I_0,R_0+y_k)$ 出发的解$(\bar{N}(t),\bar{I}(t),\bar{R}(t))$与 Poincaré 曲面 S_0 相遇，

干扰轨线从 A_k 开始在 T 时刻到点 $B_k(\bar{N}(T), \bar{I}(T), \bar{R}(T))$ 且穿过 Poincaré 曲面 S_0，后跳到点 $A_{k+1}(N_0 + x_{k+1}, I_0, R_0 + y_{k+1})$，则

$$N_0 + x_{k+1} = (1 + b - c\bar{N}(T))\bar{N}(T)$$

$$I_0 = (1 + (b - c\bar{N}(T))(1 - \mu))\bar{I}(T)$$

$$R_0 + y_{k+1} = \bar{R}(T) + (b - c\bar{N}(T))p(\bar{N}(T) + (\mu - 1)\bar{I}(T))$$

令 $x(t) = \bar{N}(t) - N(t)$，$y(t) = \bar{R}(t) - R(t)$ 和 $z(t) = \bar{I}(t) - I(t)$，得 $x_0 = \bar{N}_{(0)} - N_{(0)} = x_k$，$y_0 = \bar{R}_{(0)} - R_{(0)} = y_k$ 和 $z_0 = \bar{I}_{(0)} - I_{(0)} = 0$. 对于 $\forall\, 0 < t \leqslant T$，变量 $x(t), y(t), z(t)$ 通过以下的关系式来表达：

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}(t)\begin{pmatrix} x_k \\ 0 \\ y_k \end{pmatrix} + o(x_k^2 + y_k^2) \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{M}(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) & m_2(t) & m_3(t) \\ n_1(t) & n_2(t) & n_3(t) \\ u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) \end{pmatrix}$$

是方程

$$\boldsymbol{M}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{M}(t)$$

的基解矩阵，且 $\boldsymbol{M}(0) = \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}(t)$ 中元素根据周期轨线$(N(t), I(t), R(t))$计算为：

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} -d & 0 & 0 \\ \beta I & \beta(N - R)I - 2\beta I - \dfrac{a\omega}{(\omega + I)^2} & -\beta I \\ 0 & \dfrac{a\omega}{(\omega + I)^2} & -(\delta + d) \end{pmatrix}$$

令 $\eta(t) = \beta(N - R)I - 2\beta I - \dfrac{a\omega}{(\omega + I)^2}$，$g(t) = \dfrac{a\omega}{(\omega + I)^2}$，则有

$$m'_1(t) = -dm_1(t),\ m_1(0) = 1;$$

$$m'_3(t) = -dm_3(t),\ m_3(0) = 0;$$

$$n'_1(t) = \beta I m_1(t) + \eta(t)n_1(t) - \beta I u_3(t),\ n_1(0) = 0;$$

$$n'_3(t) = \beta I m_3(t) + \eta(t)n_3(t) - \beta I u_3(t),\ n_3(0) = 0;$$

$$u'_1(t) = g(t)n_1(t) - (\delta + d)u_1(t),\ u_1(t) = 0;$$

$$u'_3(t) = g(t)n_3(t) - (\delta + d)u_3(t),\ u_3(t) = 1$$

和

$$m_1(t) = \mathrm{e}^{-dt} \qquad m_3(t) = 0;$$

$$n_1(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t \eta(\tau)\mathrm{d}\tau} \cdot \int_0^t \beta I(m_1(\tau) - u_1(\tau))\mathrm{e}^{-\int_0^\tau \eta(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\tau$$

$$n_3(t) = -\mathrm{e}^{\int_0^t \eta(\tau)\mathrm{d}\tau} \cdot \int_0^t \beta I u_3(t)\mathrm{e}^{-\int_0^\tau \eta(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\tau$$

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{-(\delta+d)t} \cdot \int_o^t \mathrm{e}^{(\delta+d)\tau}g(\tau)n_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$u_3(t) = \mathrm{e}^{-(\delta+d)t} + \mathrm{e}^{-(\delta+d)t} \cdot \int_o^t \mathrm{e}^{(\delta+d)\tau}g(\tau)n_3(\tau)\mathrm{d}\tau$$

从(6)得

$$x(T) = \mathrm{e}^{-dT}x_k$$

$$z(T) = n_1(T)x_k + n_3(T)y_k + o(x_k^2 + y_k^2)$$

$$y(T) = u_1(T)x_k + u_3(T)y_k + o(x_k^2 + y_k^2)$$

$$x(T^+) = (1 + b - c\bar{N}(T))\bar{N}(T) - N_0 = (1 + b - 2cN(T))x(T) - cx^2(T)$$

$$\begin{aligned} y(T^+) = &\bar{R}(T) + (b - c\bar{N}(T))p(\bar{N}(T) + \\ &(\mu-1)\bar{I}(T)) - R(T) - (b - cN(T))p(N(T) + (\mu-1)I(T)) = \\ &p(b - c(\mu-1)I_0 - 2cN(T)x(T) - 2cN(T))x(T) + y(T) - cpx^2(T) \end{aligned}$$

于是得到下面的 Poincaré 映射：

$$\begin{cases} x_{k+1} = a_1(T)x_k + a_2(T)x_k^2 \\ y_{k+1} = a_3(T)x_k + a_4(T)y_k + o(x_k^2 + y_k^2) \end{cases} \tag{7}$$

其中：$a_1(T) = 2-(1+b)\mathrm{e}^{-dT}$，$a_2(T) = -c\mathrm{e}^{-2dT}$，$a_3(T) = *$，$a_4(T) = u_3(T)$. 映射(7) 在不动点(0，0) 处的相应的特征方程为

$$(\lambda - a_1(T))(\lambda - a_4(T)) = 0$$

其特征根为：$\lambda_5 = a_1(T) = 2-(1+b)\mathrm{e}^{-dT}$，$\lambda_6 = a_4(T) = u_3(T)$.

我们已知有特征根为 -1 的系统有一个 Flip 分支[8-9]. 令 $a_1(T) = -1$，则有 $b = 3\mathrm{e}^{dT} - 1 = b_3$. 下面讨论系统(1) 的 Flip 分支.

引理 2[8]　令 f_μ：$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是映射参数，使 f_{μ_0} 在不动点 x_0 处有一个特征根为 -1. 若下面的条件成立：

(F_1) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial \mu}\right) \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \neq 0$ at (x_0, μ_0)；

(F_2) $\bar{a} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) \neq 0$ at (x_0, μ_0).

则一定存在过(x_0, μ_0) 的 f_μ 的不动点的光滑曲线，其稳定性在(x_0, μ_0) 处改变. 还有过(x_0, μ_0) 的光滑曲线 γ 使 $\gamma \backslash (x_0, \mu_0)$ 是一个 2-周期的双曲线轨道的并集. (F_2) 中 $\bar{a}$ 的符号决定周期解的稳定性和分支方向. 若 $\bar{a} > 0$，则解稳定；若 $\bar{a} < 0$，则解不稳定.

定理 3　系统(1) 在 $b = b_3$ 处出现 Flip 分支，其中 $b_3 = 3\mathrm{e}^{dT} - 1$. 且对某个 $\epsilon > 0$，当 $b \in (b_3, b_3 + \epsilon)$ 时，系统(1) 有一个稳定的周期解.

证　当 $b = b_3$ 时，映射(7) 在不动点(0，0) 处有一个特征根 $\lambda_5 = -1$. 因此 $b = b_3$ 是 Flip 分支存在的条件，且映射(7) 被重新写为：

$$F_b:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a_1(T)x + a_2(T)x^2 \\ a_3(T)x + a_4(T)y + o(x^2 + y^2) \end{bmatrix} \tag{8}$$

令 $\tilde{b} = b - b_3$，当 $\tilde{b} = 0$ 时，映射(8) 有一个不动点(0，0)，且(8) 变为：

$$F_b:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x - \mathrm{e}^{-dT} \cdot \tilde{b}x + a_2(T)x^2 \\ a_3(T)x + a_4(T)y + o(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

(8) 存在一个中心流形，可被写为：

$$W^c(0) = \{(x, y, \tilde{b}) \in \mathbb{R}^3 \mid y = h(x, \tilde{b}), h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0\}$$

考虑特殊形式 $x \longmapsto -x - \mathrm{e}^{-dT} \cdot \tilde{b}x + a_2(T)x^2$，其中不包括 y. 因此，在我们考虑的这种情况下不能计算 $y = h(x, \tilde{b})$，映射变为中心流形 f：$x \longmapsto -x - \mathrm{e}^{-dT} \cdot \tilde{b}x + a_2(T)x^2$. 在$(x, \tilde{b}) = (0, 0)$ 处，我们有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{b}}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \tilde{b}} = -2\mathrm{e}^{-dT} \neq 0$$

$$\bar{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) = 2(a(T))^2 = 2c^2\mathrm{e}^{-4dT} > 0$$

于是条件(F_1) 和(F_2) 成立. 根据引理 2，系统(1) 存在一个 Flip 分支. 因为 $\bar{a} > 0$，所以周期解是稳定的，即对某个 $\epsilon > 0$，当 $b \in (3\mathrm{e}^{dT} - 1, 3\mathrm{e}^{dT} - 1 + \epsilon)$ 时，系统(1) 的周期解是稳定的.

4　结　　论

本文建立了具有出生脉冲、脉冲接种和饱和治愈率的 SIRS 传染病模型. 通过建立 Poincaré 映射来讨论无病周期解和地方病周期解的存在性和稳定性. 根据分支理论研究了 Flip 分支问题，得到系统(1) 的无病周期解在 $b = \mathrm{e}^{dT} - 1$ 处出现 Fold 分支，在 $b = b^*$ 处存在非平凡周期解的超临界分支，在 $b = 3\mathrm{e}^{dT} - 1$ 处出现 Flip 分支. 其中最大出生率 b 在疾病传染的过程中起着至关重要的作用：当 $0 < b < \mathrm{e}^{dT} - 1$，系统的平

凡解是稳定的；当 $e^{dT} < b < b^*$，系统的无病周期解是稳定的，即疾病将灭绝；当 $b^* < b < b^* + \epsilon$，则系统存在一个稳定的地方病周期解，即疾病流行.

参考文献：

[1] WANG J J, ZHANG J Z, JIN Z. Analysis of an SIR Model with Bilinear Incidence Rate [J]. Nonlinear Analysis: Real World Application, 2010, 11(4): 2390-2401.

[2] 魏 巍，李 蒙. 具有隔离因素的流行病模型的免疫接种效率分析 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(3): 6-9.

[3] CAUGHLEY G. Analysis of Vertebrate Population [M]. New York: John Wiley and Sons, 1977.

[4] HAO L J, YANG Q G, LIU S Y. Global Dynamics of an SIRS Epidemic Model with Saturation Incidence [J]. BioSystems, 2013, 114(1): 56-63.

[5] JIANG G R, YANG Q G. Bifurcation Analysis in an SIR Epidemic Model with Birth Pulse and Pulse Vaccination [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 215(3): 1035-1046.

[6] ZHOU L H, FAN M. Dynamics of an SIR Epidemic Model with Limited Medical Resources Revisited [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, 13(1): 312-324.

[7] ZHANG X, LIU X N. Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Saturated Treatment Function [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 348(1): 433-443.

[8] GUCKENHEIMER J, HOLMES P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields [M]//Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1983.

[9] GAKKHAR S, NEGI K. Pulse Vaccination in SIRS Epidemic Model with Non Monotonic Incidence Rate [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 35(3): 626-638.

On Analysis of an SIRS Model with Impulsive Effect and Saturated Treatment Rate

WANG Xing, JIA Jian-wen

School of Mathematical and Computer Science, Shanxi Normal University, Linfen Shanxi 041004, China

Abstract: In this paper, the dynamical behavior of an SIR epidemic model with birth pulse, pulse vaccination and limited medical resources has beenstudied. This paper investigates the existence and stability of the infection-free periodic solution and the epidemic periodic solution. The conditions required for the existence of supercritical bifurcation have also been derived. The poincare map and center manifold theorem are used to discuss flip bifurcation of the epidemic periodic solution.

Key words: SIR epidemic model; birth pulse; saturated treatment rate; periodic solution; bifurcation

责任编辑 张 枸