DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.09.006

不可约非负矩阵谱半径的新估算①

董培佩

武昌工学院 信息工程学院,武汉 430065

摘要: 随着计算机科学的发展,不可约非负矩阵理论在研究领域和科技应用领域都得到了广泛的关注. 特别是对不可约非负矩阵谱半径的研究,已经取得很多优秀的成果. 该文在前人研究的基础上,对不可约非负矩阵谱半径的估计方法做了一些改进,提高了估计的精度.

关 键 词: 不可约非负矩阵;谱半径;Collatz—Wielandt 函数

中图分类号: O151.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2017)09-0027-05

矩阵理论在信息技术高度发展的今天越来越体现出其研究的重要意义. 不可约非负矩阵作为一类特殊矩阵,其谱半径理论已经被广泛地应用于科研及众多的经济生活领域,对其进行深入的研究不但具有较高的理论价值,也有巨大的实用价值.

1 预备知识

为了叙述方便,我们对符号进行如下约定. 集合 $Z=\{1,2,\cdots n\}$. 集合 $M^{n\times n}$:表示非负数域上 $n\times n$ 阶矩阵的集合. 对矩阵 $\mathbf{A}=(\alpha_{ij})_{n\times n}$,用 $c_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}$,$i,j\in Z$,分别表示矩阵第 i 行的和,用 $v_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}$,$i,j\in Z$ 表示第 j 列的列和. $\rho(\mathbf{A})$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的谱半径,$\mathbf{E}$ 表示单位矩阵,$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$:表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置.

定义 1[1] 设 A 是 n 阶不可约非负矩阵,对任意 n 维向量 $x\geqslant 0$,且 $x_i\neq 0$,记函数

$$c_A(x)=\min_{x_i>0,\ i\in Z}\frac{(\mathbf{A}x)_i}{x_i}$$

定义 2[2] 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶不可约非负矩阵,对任意 n 维向量 $x\geqslant 0$,且 $x_i\neq 0$,记函数

$$M_A(x)=\max_{x_i>0,\ i\in Z}\frac{(Ax)_i}{x_i}$$

引理 1[1] 设非负矩阵 $\mathbf{A}=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ 有非零的行和 $c_1(\mathbf{A})$,$c_2(\mathbf{A})$,$\cdots$,$c_n(\mathbf{A})$,则有

$$\min c_i(\mathbf{A})\leqslant\rho(\mathbf{A})\leqslant\max_i c_i(\mathbf{A})$$

$$\min_{i\in N}\left\{\frac{1}{c_i(\mathbf{A})}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{is}c_s(\mathbf{A})\right\}\leqslant\rho(\mathbf{A})\leqslant\max_{i\in N}\left\{\frac{1}{c_i(\mathbf{A})}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{is}c_s(\mathbf{A})\right\}$$

引理 2[3] 设 λ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值,$x=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}^T$,$y=\{y_1,y_2,\cdots y_n\}^T$ 分别是矩阵 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{A}$ 对应特征值 λ 的特征向量,由 $\lambda x=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}x$ 和 $\lambda y=\mathbf{A}y$ 得

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_ic_i(\mathbf{A})$$

---

① 收稿日期:2016-12-20
作者简介:董培佩(1984-),女,湖北武汉人,硕士研究生,讲师,主要从事基础数学研究.

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{i=1}^{n} y_j c_j(\boldsymbol{A})$$

引理 3[4] 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶不可约非负矩阵，如果非负向量 $x \neq 0$ ，数 u 满足 $\boldsymbol{A}x \geqslant ux$ 则有

$$c_A(x) \geqslant u$$

引理 4[4] 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶不可约非负矩阵，则 $\rho(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{A}$ 有对应于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的正特征向量.

引理 5[5] 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n \geqslant 2)$ 阶不可约非负矩阵，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{n-1} > 0$.

引理 6[3] 若 m_1，$m_2 \cdots m_n$ 是正数，则对任意实数 l_1，$l_2 \cdots l_n$，$i \in Z$，则

$$\min_i \frac{l_i}{m_i} \leqslant \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \leqslant \max_i \frac{l_i}{m_i}$$

定理 1[5] 设 $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶不可约非负矩阵，$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{n-1}$，则对任意正整数 m 有

$$\min_i \frac{c_i(\boldsymbol{AT}^m)}{c_i(\boldsymbol{T}^m)} \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \max_i \frac{c_i(\boldsymbol{AT}^m)}{c_i(\boldsymbol{T}^m)}$$

$$\min_i \frac{v_i(\boldsymbol{AT}^m)}{v_i(\boldsymbol{T}^m)} \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \max_i \frac{v_i(\boldsymbol{AT}^m)}{v_i(\boldsymbol{T}^m)}$$

定理 2[6] 设 $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶不可约非负矩阵，$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)^{n-1}$，则对任意正整数 m 有

$$\min_i \frac{c_i(\boldsymbol{AT}^m)}{c_i(\boldsymbol{T}^m)} \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \max_i \frac{c_i(\boldsymbol{AT}^m)}{c_i(\boldsymbol{T}^m)}$$

$$\min_i \frac{v_i(\boldsymbol{AT}^m)}{v_i(\boldsymbol{T}^m)} \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \max_i \frac{v_i(\boldsymbol{AT}^m)}{v_i(\boldsymbol{T}^m)}$$

引理 7[6] 设 $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶不可约非负矩阵，对于非负向量 x，$y = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{n-1}x$，有：$c_A(y) \geqslant c_A(x)$，$M_A(x) \geqslant M_A(y)$.

2 主要结果

引理 8 设 $n(n \geqslant 2)$ 阶不可约非负矩阵 $\boldsymbol{A}$，对于任意正整数 k，有

$$(\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{n-1} > 0$$

证 由 $\boldsymbol{A}$ 是不可约非负矩阵，得 $\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 为不可约非负矩阵，由引理 5 可得 $(\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{n-1} > 0$.

引理 9 设 $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶不可约非负矩阵，对于非负向量 x，$y_k = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^k)^{n-1}x$，有 $c_A(y_k) \geqslant c_A(x)$，$M_A(x) \geqslant M_A(y_k)$.

证 因为 $\boldsymbol{A}x - c_A(x)x \geqslant 0$ ，由引理 8 有 $(\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{n-1} > 0$，所以

$$(\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{A}x - c_A(x)(\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{n-1}x =$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{n-1}x - c_A(x)(\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{n-1} = \boldsymbol{A}y_k - c_A(x)y_k \geqslant 0$$

由引理 3 可得，$c_A(y_k) \geqslant c_A(x)$，同理可得 $M_A(x) \geqslant M_A(y_k)$.

引理 10 设 $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶不可约非负矩阵，对于非负向量 x，$y_k^m = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^k)^{m(n-1)}x$，有 $c_A(y_k^m) \geqslant c_A(y_k^{m-1})$，$M_A(y_k^{m-1}) \geqslant M_A(y_k^m)$.

证 因

$$\begin{aligned} y_k^m &= (\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{n-1}(\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{(m-1)(n-1)}x = \\ &(\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{n-1}y_k^{m-1} \end{aligned}$$

由引理 9 得 $c_A(y_k^m) \geqslant c_A(y_k^{m-1})$，同理可得 $M_A(y_k^{m-1}) \geqslant M_A(y_k^m)$.

定理 3 设 $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{n\times n}(n \geqslant 2)$ 为不可约非负矩阵，对于任意的正整数 k 和 m，$\boldsymbol{T}_k = (\boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{n-1}$，$y_k^m = \boldsymbol{T}_k^m \varepsilon$ ，$\varepsilon = \{1, 1, \cdots 1\}^T$，则对任何正整数 m 有 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的估计式

$$c_A(y_k^m)=\min_i\frac{c_i(\boldsymbol{AT}_k^m)}{c_i(\boldsymbol{T}_k^m)}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\max_i\frac{c_i(\boldsymbol{AT}_k^m)}{c_i(\boldsymbol{T}_m^m)}=M_A(y_k^m)$$

证　由引理 8 可知 $\boldsymbol{T}_k>0$，所以 $\boldsymbol{T}_k$ 的行和 $c_i(\boldsymbol{T}_k^m)>0$，由于 $\boldsymbol{A}$ 是不可约非负矩阵，由定义 1、定义 2 可得

$$\min_i\frac{c_i(\boldsymbol{AT}_k^m)}{c_i(\boldsymbol{T}_k^m)}=\min_i\frac{(\boldsymbol{AT}_k^m\varepsilon)_i}{(\boldsymbol{T}_k^m\varepsilon)_i}=\frac{[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}_k^m\varepsilon)]_i}{(\boldsymbol{T}_k^m\varepsilon)_i}=\min_i\frac{(\boldsymbol{A}y_k^m)_i}{(y_k^m)_i}=c_A(y_k^m)$$

$$\max_i\frac{c_i(\boldsymbol{AT}_k^m)}{c_i(\boldsymbol{T}_k^m)}=\max_i\frac{(\boldsymbol{AT}_k^m\varepsilon)_i}{(\boldsymbol{T}_k^m\varepsilon)_i}=\frac{[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}_k^m\varepsilon)]_i}{(\boldsymbol{T}_k^m\varepsilon)_i}=\max_i\frac{(\boldsymbol{A}y_k^m)_i}{(y_k^m)_i}=M_A(y_k^m)$$

由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为不可约非负矩阵，则由引理 4 可知，存在矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 对应于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征向量

$x=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}^T>0$，且

$$(\boldsymbol{T}_k^m)^Tx=(\rho^k(\boldsymbol{A})+\rho^{k-1}(\boldsymbol{A})+\cdots+\rho(\boldsymbol{A})+1)^{m(n-1)}x$$

$$(\boldsymbol{AT}_k^m)^Tx=\rho(\boldsymbol{A})(\rho^k(\boldsymbol{A})+\rho^{k-1}(\boldsymbol{A})+\cdots+\rho(\boldsymbol{A})+1)^{m(n-1)}x$$

由引理 2 得

$$(\rho^k(\boldsymbol{A})+\rho^{k-1}(\boldsymbol{A})+\cdots+\rho(\boldsymbol{A})+1)^{m(n-1)}\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n x_ic_i(\boldsymbol{T}_k^m)$$

$$\rho(\boldsymbol{A})(\rho^k(\boldsymbol{A})+\rho^{k-1}(\boldsymbol{A})+\cdots+\rho(\boldsymbol{A})+1)^{m(n-1)}\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n x_ic_i(\boldsymbol{AT}_k^m)$$

则

$$\rho(\boldsymbol{A})=\frac{\sum_{i=1}^n x_ic_i(\boldsymbol{AT}_k^m)}{\sum_{i=1}^n x_ic_i(\boldsymbol{T}_k^m)}$$

因 $x_i>0$，$c_i(T_k^m)>0$，$i\in Z$，则由引理 6 可得

$$\min_i\frac{x_ic_i(\boldsymbol{AT}_k^m)}{x_ic_i(\boldsymbol{T}_k^m)}\leqslant\rho(A)\leqslant\max_i\frac{x_ic_i(\boldsymbol{AT}_k^m)}{x_ic_i(\boldsymbol{T}_m{}^m)}$$

进而

$$c_A(y_k^m)=\min_i\frac{c_i(\boldsymbol{AT}_k^m)}{c_i(\boldsymbol{T}_k^m)}\leqslant\rho(A)\leqslant\max_i\frac{c_i(\boldsymbol{AT}_k^m)}{c_i(\boldsymbol{T}_m{}^m)}=M_A(y_k^m)$$

定理得证.

说明当 $k=1$ 时，即为定理 1 的结果；当 $k=2$，即为定理 2 的结果.

定理 4　设 $\boldsymbol{A}=(\alpha_{ij})_{n\times n}(n\geqslant 2)$ 为不可约非负矩阵，对于任意的正整数 k 和 m，$\boldsymbol{T}_k=(\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{n-1}$，$y_k^m=\boldsymbol{T}_k^m\varepsilon$，$\varepsilon=\{1,1,\cdots 1\}^T$，则对任何正整数 m 下列不等式成立.

$$c_A(y_k^m)\geqslant c_A(y_{k-1}^m),\ M_A(y_k^m)\leqslant M_A(y_{k-1}^m)$$

且对于任何正整数 k，有下列不等式成立.

$$c_A(y_k^m)\geqslant c_A(y_k^{m-1}),\ M_A(y_k^m)\leqslant M_A(y_k^{m-1})$$

证　$y_k^m=\boldsymbol{T}_k^m\varepsilon$，也就是 $y_k^m=(\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{m(n-1)}\varepsilon$，由于

$$\frac{1}{2^{m(n-1)}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{m(n-1)}(\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^{k-2}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{m(n-1)}\varepsilon=$$

$$\frac{1}{2^{m(n-1)}}(\boldsymbol{A}^k+2\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{m(n-1)}\varepsilon=$$

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\right)^{m(n-1)}\varepsilon\leqslant$$

$$(\boldsymbol{A}^k+2\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{m(n-1)}\varepsilon$$

所以有

$$\frac{1}{2^{m(n-1)}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{m(n-1)}y_{k-1}^{m} \leqslant y_{k}^{m}$$

由引理 9 可得

$$c_A(y_k^m) \geqslant c_A(y_{k-1}^m)$$

同理可得证

$$M_A(y_k^m) \leqslant M_A(y_{k-1}^m)$$

由引理 10 可得，对于任何正整数 k 有下列不等式成立.

$$c_A(y_k^m) \geqslant c_A(y_k^{m-1}),\ M_A(y_k^m) \leqslant M_A(y_k^{m-1})$$

定理得证.

注：定理 4 说明 k 的值和 m 的值增大都会提高不可约非负矩阵谱半径的估计值.

3　数值算例

例 1　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$，估计 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径.

	$m=1$	$m=2$
$k=1$	$6.083\,203\,432\,2 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 6.089\,444\,532\,4$	$6.083\,932\,133\,2 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 6.088\,862\,134$
$k=2$	$6.084\,034\,324\,2 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 6.088\,515\,646\,7$	$6.084\,563\,423\,3 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 6.087\,993\,232$
$k=3$	$6.085\,592\,323\,4 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 6.085\,676\,424\,3$	$6.085\,602\,344\,4 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 6.085\,634\,452\,5$
$k=4$	$6.085\,628\,949\,1 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 6.085\,628\,951\,1$	$6.085\,628\,950\,9 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 6.085\,628\,951\,0$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径估计值为 6.085 628 95.

例 2　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 6 & 2\\ 2 & 6 & 6 & 5\\ 2 & 6 & 8 & 3\\ 6 & 2 & 7 & 4\end{pmatrix}$，估计 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径.

	$m=1$	$m=2$
$k=1$	$18.081\,112\,333\,1 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 18.081\,412\,132\,1$	$18.081\,123\,342\,2 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 18.081\,312\,232\,3$
$k=2$	$18.081\,245\,332\,4 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 18.081\,286\,565\,5$	$18.081\,256\,433\,4 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 18.081\,276\,544\,3$
$k=3$	$18.081\,264\,563\,4 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 18.081\,264\,786\,9$	$18.081\,264\,676\,5 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 18.081\,264\,696\,7$
$k=4$	$18.081\,264\,680\,1 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 18.081\,264\,682\,3$	$18.081\,264\,681\,8 \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant 18.081\,264\,681\,9$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径准确值为 18.081 264 68.

通过以上 2 个算例我们可以得到，当 $k=4$，$m=2$ 时可以得到比较精确的矩阵谱半径估计.

4　总　　结

本文在前人研究的基础上，对于不可约非负矩阵谱半径的估计采用了新的估算式. 该估算式不仅是对前期结果的扩展，而且对于精度的提高可以通过增大 k，m 的值来实现. 数值算例也很好地说明了 k，m 的增大能够较快地缩小收敛区间，对谱半径的估计精度有了很大的提高，充分说明了结论的有效性.

参考文献：

［1］ HUANG Ting-zhu，YANG Chuan-sheng. Special Matrix Analysis and Application［M］. Beijing：Science Press，2007.

［2］ 岳　嵘. 非负矩阵谱半径的新界值［J］. 数学的实践与认识，2009，39(17)：206－209.

［3］ MINE H. Nonnegative Matrices［M］. New York：Wiley，1988.

［4］ 黄廷祝，杨传胜. 特殊矩阵分析及应用［M］. 北京：科学出版社，2009.

［5］ 殷剑宏. 非负矩阵最大特征值的新界值［J］. 数值计算与计算机应用，2002(4)：292－295.

［6］ 孙文静，杨　晋，刘彦芝，等. 非负矩阵谱半径的新界［J］. 中北大学学报(自然科学版)，2011，32(1)：29－31.

No New Estimation of Spectrum Radius of Irreducible Nonnegative Matrices

DONG Pei-pei

School of Information Engineering，Wuchang Institute of Technology，Wuhan 430065，China

Abstract：With the development of computer science，irreducible nonnegative matrix theory has been researched and extensive attention has been paid to application field of science and technology. Especially for irreducible nonnegative matrices，a lot of good results have been achieved. Based on the previous research，some improvements are made on the estimation method of irreducible nonnegative matrix radius，and the precision of estimation is improved.

Key words：irreducible nonnegative matrices；spectrum radius；Collatz-Wieland function

责任编辑　夏　娟