第 42 卷 第 10 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2017 年 10 月
Vol. 42 No. 10 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Oct. 2017

**DOI**:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.10.002

# 有限 $N^{\mathcal{N}}$-群中的非正规子群①

褚智伟[1], 龚 律[2]

1. 南通师范高等专科学校 数理系,江苏 南通 226006;2. 南通大学 理学院,江苏 南通 226019

**摘要**:有限 $N^{\mathcal{N}}$-群指的是每个子群的幂零剩余都正规的有限群. 利用非正规子群的共轭类类数,给出了判断一个非幂零群是否为 $N^{\mathcal{N}}$-群的充分条件,并且这个非正规子群的共轭类类数的界是最佳的.

**关 键 词**:$N^{\mathcal{N}}$-群;非正规子群;共轭;幂零剩余

**中图分类号**:**O152.1** **文献标志码**:**A** **文章编号**:1000-5471(2017)10-0005-04

著名的 Dedekind 群指的是每个子群都正规的有限群. 幂零剩余 $G^{\mathcal{N}}$ 是群 $G$ 使其商群幂零的最小正规子群,即 $G^{\mathcal{N}}=\bigcap\{N\trianglelefteq G \mid G/N$ 幂零$\}$,且 $G^{\mathcal{N}}$ Char $G$. 文献[1-2]独立的介绍了有限 $N^{\mathcal{N}}$-群,即每个子群的幂零剩余都正规的有限群. 显然 Dedekind 群是 $N^{\mathcal{N}}$-群,反之并不一定成立,自然我们想知道非正规子群是如何来影响 $N^{\mathcal{N}}$-群结构的. 因此我们想探索如下的问题:$N^{\mathcal{N}}$-群中能嵌入多少非正规子群?

因为幂零群都是 $N^{\mathcal{N}}$-群,所以我们的问题只关注非幂零群. 一方面,恰有 1,2,3,4 个非正规子群共轭类的有限群已经在文献[3-7]分类;另一方面,作者在文献[8]中给出了恰有 6 个非正规子群的有限群的结构,我们独立于这样的分类,只根据非正规子群共轭类的类数来判断是否为 $N^{\mathcal{N}}$-群.

本文中涉及的群均为有限群. $P$ 表示群 $G$ 的 Sylow $p$-子群,$\upsilon(G)$ 表示群 $G$ 的非正规子群的共轭类类数,$\mu(G)$ 表示群 $G$ 的子群的个数,$\pi(G)$ 表示群 $G$ 的阶所含全体素因子的集合,$|\pi(G)|$ 表示 $\pi(G)$ 中元素的个数.

为探求上述问题,需要如下一些引理.

**引理 1**[8] 若 $\upsilon(G)\leqslant 6$,则 $G$ 可解.

**引理 2**[9] 令 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$. 若 $N_G(P)\leqslant H<G$,则 $H=N_G(H)$.

**引理 3**[10] 令 $A,B$ 是两个群,则 $\upsilon(A\times B)\geqslant \upsilon(A)\upsilon(B)+\upsilon(A)\mu(B)+\mu(A)\upsilon(B)$,等式成立当且仅当 $(|A|,|B|)=1$.

**引理 4**[11] 若 $G$ 的每个 Sylow 子群都自正规化,则 $G$ 是一个 $p$-群.

**引理 5**[12] 若 $L$ 和 $M$ 是可解群 $G$ 不同的极大子群,则如下任意两个条件都等价:

1) $L$ 与 $M$ 在 $G$ 中共轭.

2) $LM\neq G$.

3) $LM$ 不是 $G$ 的子群.

**引理 6**[13] 若 $G=MN$,$N\trianglelefteq G$ 且 $M\leqslant G$,则 $G^{\mathcal{N}}\leqslant M^{\mathcal{N}}N$. 特别地,$(M\times N)^{\mathcal{N}}=M^{\mathcal{N}}\times N^{\mathcal{N}}$.

**引理 7**[13] 若 $G=A\times B$,$A\leqslant G$ 且 $B\leqslant G$,$(|A|,|B|)=1$,则 $N^{\mathcal{N}}(G)=N^{\mathcal{N}}(A)\times N^{\mathcal{N}}(B)$.

下面我们通过限定非正规子群的共轭类类数来判断是否为 $N^{\mathcal{N}}$-群.

---

① 收稿日期:2016-12-13
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11601245,11401324).
作者简介:褚智伟(1983-),女,江苏南通人,硕士,主要从事代数的研究.
通信作者:龚 律,博士.

**定理 1**　若 $\upsilon(G) \leqslant 3$，则 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

**证**　因为幂零群的幂零剩余等于 1，故幂零群都为 $N^{\mathcal{N}}$-群，所以我们只需考虑满足 $\upsilon(G) \leqslant 3$ 的非幂零群. 而对于非幂零群而言，必有非正规的 Sylow 子群. 不妨令 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 且 $P \ntrianglelefteq G$，显然 $N_G(P) \ntrianglelefteq G$.（若否，$P$ char $N_G(P) \trianglelefteq G$，则 $P \trianglelefteq G$，矛盾.）根据非正规子群的共轭类的个数分如下 3 类情况讨论：

**情形 1**　$\upsilon(G) = 1$.

由引理 1 知 $G$ 可解，故 $G$ 存在正规的 Hall $p'$-子群 $H$ 使得 $G = PH$. 而由引理 6 知 $G^{\mathcal{N}} \leqslant H$. 因此由 $\upsilon(G) = 1$ 可知 $H$ 中的每个子群都在 $G$ 中正规. 由于 $G$ 中非正规子群为 $P$ 且其共轭为幂零，于是 $P^{\mathcal{N}} = 1$ 在 $G$ 中正规，故 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

**情形 2**　$\upsilon(G) = 2$.

i) 首先，给出如下论断：(*) $Q \trianglelefteq G$，对于 $p \neq q$，$Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$.

若上述论断不正确，则存在 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$，$p \neq q$ 使得 $Q \ntrianglelefteq G$. 此时 $\upsilon(G) = 2$，$N_G(P) = P$ 且 $N_G(Q) = Q$. 若 $|\pi(G)| \geqslant 3$，则存在 $R \in \mathrm{Syl}_r(G)$，$r \neq p$，$q$，使得 $R \trianglelefteq G$，因此 $PR \trianglelefteq G$，由 Frattini 论断知，$G = PR$ 矛盾. 若 $|\pi(G)| = 2$，由引理 4 知 $G$ 是 $p$-群，矛盾. 因此论断正确.

ii) 当 $N_G(P) > P$ 时，令 $K$ 是 $N_G(P)$ 的 Hall $p'$-子群，于是 $N_G(P) = P \times K$，而 $(N_G(P))^{\mathcal{N}} \leqslant K$，由 $\upsilon(G) = 2$ 知 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

iii) 当 $N_G(P) = P$ 时，首先说明 $|\pi(G)| = 2$. 假设 $|\pi(G)| \geqslant 3$，由论断(*)知，则至少存在 $Q$ 和 $R \trianglelefteq G$ 使得 $R \in \mathrm{Syl}_r(G)$ 和 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$，$r$，$q \neq p$. 由 $\upsilon(G) = 2$ 知，$PR$ 和 $PQ$ 中至少有一个在 $G$ 中正规，故由 Frattini 论断知 $G = PR$ 或 $PQ$，矛盾.

令 $H$ 是 $G$ 中与 $P$ 不共轭的另一非正规子群，则 $\pi(H) = \{p\}$，$\{q\}$ 或 $\{p, q\}$. 若 $\pi(H) = \{p, q\}$，则 $Q$ 的每个子群在 $G$ 中正规. 由论断(*)知 $H^{\mathcal{N}} \leqslant Q$，所以 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群. 若 $\pi(H) = \{p\}$ 或 $\{q\}$，则 $G$ 的所有非正规子群都是幂零群，故 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

**情形 3**　$\upsilon(G) = 3$.

i) 首先证明 $|\pi(G)| \leqslant 3$.

若 $|\pi(G)| \geqslant 4$，则至少存在 $Q$，$S$ 和 $R$，其中 $R \in \mathrm{Syl}_r(G)$，$R \in \mathrm{Syl}_r(G)$ 及 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$，$s$，$r$，$q \neq p$. 由 $\upsilon(G) = 3$ 及引理 1 知，$G$ 可解，于是存在 $G$ 的 Hall 子群 $PQ$，$PR$，$PS$. 由 $\upsilon(G) = 3$ 及 $P \ntrianglelefteq G$ 可表明 $PR$，$PS$ 和 $PQ$ 至少有一个在 $G$ 中正规. 不妨令 $PS \trianglelefteq G$，利用 Frattini 论断，$G = PSN_G(P) = SN_G(P)$，则 $R \leqslant N_G(P)$，$Q \leqslant N_G(P)$. 因此 $P$，$PQ$，$PR$，$PQR$ 是 $G$ 中的非正规子群，故 $\upsilon(G) \geqslant 4$，矛盾.

ii) $|\pi(G)| = 3$. 不妨设 $G = PQR$，其中 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$，$R \in \mathrm{Syl}_r(G)$ 及 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$，$r$，$q \neq p$. 下面根据 $R$ 和 $Q$ 是否在 $G$ 中正规来进行证明.

a. 当 $R$ 和 $Q$ 在 $G$ 中都不正规时，则由 $\upsilon(G) = 3$ 知 $N_G(P) = P$，$N_G(Q) = Q$ 且 $N_G(R) = R$. 由引理 4 知 $G$ 是 $p$-群，矛盾.

b. 当 $Q$ 在 $G$ 中不正规，$R$ 在 $G$ 中正规时，首先说明 $N_G(P) > P$ 且 $N_G(Q) > Q$.

若 $N_G(P) = P$，$N_G(Q) > Q$ 或者 $N_G(P) > P$，$N_G(Q) = Q$，由引理 2 知 $PR$ 或 $RQ$ 在 $G$ 中非正规，于是 $\upsilon(G) \geqslant 4$，矛盾. 若 $N_G(P) = P$ 且 $N_G(Q) = Q$，由引理 2 知 $PR$ 和 $RQ$ 在 $G$ 中都不正规，故 $\upsilon(G) \geqslant 4$，矛盾.

此时由 $\upsilon(G) = 3$ 知 $N_G(P)$ 与 $N_G(Q)$ 共轭，于是 $N_G(P) \geqslant P \times Q^g$. 若 $N_G(P) > P \times Q^g$，则 $P \times Q^g \ntrianglelefteq G$，故 $\upsilon(G) \geqslant 4$，矛盾. 于是 $N_G(P) = P \times Q^g$ 幂零，故 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

c. 当 $R$ 和 $Q$ 在 $G$ 中都正规时，分两类情况来处理.

c.1　当 $N_G(P) = P$ 时，由引理 2 知 $PR$ 与 $PQ$ 在 $G$ 中都不正规，于是 $Q$ 和 $R$ 的每个子群都在 $G$ 中正规. 因为 $(PR)^{\mathcal{N}} \leqslant R$ 且 $(PQ)^{\mathcal{N}} \leqslant Q$，所以 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

c.2　当 $N_G(P) > P$ 时，首先说明 $PR$ 和 $PQ$ 只有一个在 $G$ 中正规. 若 $PR$ 和 $PQ$ 在 $G$ 中都正规，则 $P \trianglelefteq G$，矛盾. 若 $PR$ 和 $PQ$ 在 $G$ 中都不正规，则 $N_G(P) = P \times Q$ 或 $P \times R$. 令 $N_G(P) = P \times Q$. 因为 $[R, Q] = 1$，所以 $[PR, Q] = 1$，即 $PR$ 在 $G$ 中正规，矛盾.

不妨设 $G = PR \times Q$. 因为 $\upsilon(G) = 3$，所以 $Q$ 的每个子群都在 $G$ 中正规. 因此由引理 3 知 $3 = \upsilon(PR \times$

$Q)=\upsilon(PR)\upsilon(Q)+\upsilon(PR)\mu(Q)+\mu(PR)\upsilon(Q)$，则 $3=0+1\times3+0$，即 $\upsilon(PR)=1$，$Q$ 是 $q^2$ 阶的循环群，由引理 7 和情形 1 知 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

iii) $|\pi(G)|=2$. 不妨设 $G=PQ$，其中 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，$Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$，$q\neq p$. 下面根据 $Q$ 是否在 $G$ 中正规来进行证明.

a. 当 $Q$ 在 $G$ 中正规时，则 $G^{\mathcal{N}}\leqslant Q$.

a. 1　若 $Q$ 的每个子群都在 $G$ 中正规，即 $Q$ 中不含有 $G$ 的非正规子群，则 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

a. 2　若 $Q$ 中包含 $G$ 中两类非共轭的非正规子群，则 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

a. 3　若 $Q$ 包含 $G$ 中一类非正规子群且 $P$ 的某真子群是 $G$ 的非正规子群，则 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

a. 4　若 $Q$ 只包含 $G$ 的非正规子群 $Q_1$ 的共轭类且 $P$ 的每个真子群在 $G$ 中都正规，首先我们说明 $|P|\leqslant p^2$. 若 $|P|\geqslant p^3$，则存在 $p$，$p^2$ 阶的正规子群 $P_1$，$P_2$. 因为 $[P_i,Q]=1$，$i=1,2$，所以 $P_1\times Q_1$，$P_2\times Q_1$ 在 $G$ 中不正规，故 $\upsilon(G)\geqslant 4$，矛盾.

当 $|P|=p^2$ 时，则存在 $p$ 阶正规子群 $P_3$，使得 $P_3\times Q_1\ntrianglelefteq G$，而 $P_3\times Q_1$ 幂零，故 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

当 $|P|=p$ 时，我们首先说明 $q^2\leqslant|Q|\leqslant q^3$. 若 $|Q|\geqslant q^4$，则存在 $q$，$q^2$ 和 $q^3$ 阶子群 $Q_2\leqslant Q_3\leqslant Q_4$. 因为 $Q$ 只包含 $G$ 中一类与 $Q_1$ 共轭的非正规子群，所以 $Q_2$，$Q_3$，$Q_4$ 中至少有两个子群在 $G$ 中正规. 令 $Q_3$，$Q_4\trianglelefteq G$. 下面讨论 $PQ_3$，$PQ_4$ 是否在 $G$ 中正规. 若 $PQ_3$，$PQ_4\trianglelefteq G$，则 $P\trianglelefteq G$；若 $PQ_3$，$PQ_4\ntrianglelefteq G$，则 $\upsilon(G)\geqslant 4$；若 $PQ_3\trianglelefteq G$ 且 $PQ_4\ntrianglelefteq G$，则 $G=PQ_3N_G(P)=PQ_3$，矛盾，因此 $|Q|\leqslant q^3$. 又由于 $Q$ 包含 $Q_1$，故 $q^2\leqslant|Q|$.

若 $|Q|=q^2$，则 $|Q_1|=q$. 假设存在 $q$ 阶正规子群 $N$，则 $PN$ 在 $G$ 中非正规，于是 $(PN)^{\mathcal{N}}=1$ 或 $N$，故 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群. 假设每个 $q$ 阶子群都不正规，故他们都与 $Q_1$ 共轭，从而与 $Q_1$ 共轭的子群的个数等于 $|G:Q|=p$. 然而，由 $|Q|=q^2$ 知与 $Q_1$ 共轭的子群的个数为 $q+1$，于是 $p=q+1$. 由于 $p$，$q$ 均为素数，于是 $p=3$，$q=2$. 因此 $G=A_4$，且 $\upsilon(A_4)=2$，矛盾.

若 $|Q|=q^3$，由于 $Q$ 非循环，则存在两个不同的 $q^2$ 阶子群 $H_1$，$H_2$. 若 $|Q_1|=q$，则 $H_1$，$H_2$ 在 $G$ 中正规，故 $H_1P$，$H_2P\ntrianglelefteq G$，但他们并不共轭，若 $H_1P$，$H_2P$ 共轭，则 $H_1=H_1^g\leqslant(H_1P)^g=H_2P$，于是 $H_2P=G$，矛盾，故 $\upsilon(G)\geqslant 4$，矛盾. 若 $|Q_1|=q^2$，存在 $q$ 阶子群 $N$，则 $PN$ 在 $G$ 中不正规，而 $(PN)^{\mathcal{N}}=1$ 或 $N$，因此 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

b. 当 $Q$ 在 $G$ 中不正规时，我们分 3 种类型来处理.

b. 1　当 $N_G(P)>P$ 时，由 $\upsilon(G)=3$ 知 $N_G(Q)=Q$. 首先说明 $|Q|\neq q$，因为 $G=PQ$，当 $|Q|=q$ 时，$N_G(P)=P$，矛盾. 若 $|Q|\geqslant q^2$，则 $N_G(P)=PQ^*$，其中 $Q^*\trianglelefteq G$. 因为 $Q$ 中每个真子群都在 $G$ 中正规，所以 $(N_G(P))^{\mathcal{N}}\leqslant Q^*$，因此 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群.

b. 2　当 $N_G(Q)>Q$ 时，由 $\upsilon(G)=3$ 知 $N_G(P)=P$，此类情况如上.

b. 3　当 $N_G(P)=P$ 且 $N_G(Q)=Q$ 时，由引理 4 知 $G$ 是 $p$-群，矛盾.

自然人们想知道最大整数 $k$ 使得当 $\upsilon(G)\leqslant k$ 时总有 $G$ 是 $N^{\mathcal{N}}$-群. 下面的例子说明我们证明的结果是最好的.

**注**　非正规子群的共轭类类数为 3 是能嵌入到 $N^{\mathcal{N}}$-群的最大的数字.

**例**　$G=\langle a,b,c\mid a^p=b^q=c^r=[a,c]=1,b^a=b^t,c^b=c^u,t\not\equiv1(q),u\not\equiv1(r),p<q<r\rangle$. 容易验证知 $G$ 不是 $N^{\mathcal{N}}$-群且 $\upsilon(G)=4$.

**参考文献：**


[1]　SHEN Z, SHI J, QIAN G. On the Norm of the Nilpotent Residuals of all Subgroups of a Finite Group [J]. Journal of Algebra, 2012, 352(1): 290－298.

[2]　GONG L, GUO X. On the Intersection of the Normalizers of the Nilpotent Residuals of all Subgroups of a Finite Group [J]. Algebra Colloquium, 2013, 20(2): 349－360.

[3]　BRANDL R. Groups with Few Non-Normal Subgroups [J]. Communications in Algebra, 1995, 23(6): 2091－2098.

[4]　MOUSAVI H. On Finite Groups with Few Non-Normal Subgroups [J]. Communications in Algebra, 1999, 27(7): 3143－3151.

[5] CHEN S. The Flulence of Subgroups with Several Properties Structures of Finite Groups [D]. Shanxi: Shanxi Normal University, 2009.

[6] CHEN S, CHEN G. A Note on Finite Group with 2 Conjugate Classes of Non-Normal Subgroups [J]. Jilin University Journal(Natural Science Edition), 2008, 46(6): 1097-1100.

[7] GONG L, CAO H P, CHEN G Y. Finite Nilpotent Groups Having Exactly Four Conjugacy Classes of Non-Normal Subgroups [J]. Algebra Colloquium, 2013, 20(4): 579-592.

[8] 龚 律，褚智伟. 恰有 6 个非正规子群的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(12): 104-108.

[9] ROBINSON D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1982.

[10] POLAND J, RHEMTULLA A. The Number of Conjugacy Classess of Nonnormal Subgroups in Nilpotent Groups [J]. Communications in Algebra, 2007, 24(10): 3237-3245.

[11] GLAUBERMAN G. Prime-power Factor Groups of Finite Group II [J]. Mathematische Zeitschrift, 1968, 107(3): 159-172.

[12] DOERK K, HAWKES T O. Finite Soluble Groups [M]. New York: Walter de Gruyter & Co, 1992.

[13] GONG L, GUO X. On Normalizers of the Nilpotent Residuals of Subgroups of a Finite Group [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2016, 39(3): 957-970.

# Non-normal Subgroups in finite $N^{\mathcal{N}}$-groups

CHU Zhi-wei[1], GONG LV[2]

1. *Department of Mathematics and Physics, Nantong Higher Normal Institute, Nantong Jiangsu 226006;*
2. *School of Sciences, Nantong University, Nantong Jiangsu 226019*

**Abstract**: A finite group is called $N^{\mathcal{N}}$-group if the nilpotent residual of every subgroup is normal. Using the number of conjugate classes of non-normal subgroups, a sufficient conditions are given for judging that a non-nilpotent group can be a $N^{\mathcal{N}}$-group, and the number of conjugate classes of non-normal subgroups is optimal upper bound.

**Key words**: $N^{\mathcal{N}}$-group; Non-normal subgroup; Conjugacy; Nilpotent residual

**责任编辑** 崔玉洁