DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.10.003

一类广义矩阵环的结构[①]

李小朝，　张秀全，　罗成广

黄淮学院 数学与统计学院，河南 驻马店 463000

摘要：设 F^{mn} 是数域 F 上 $m \times n$ 矩阵的全体，在 F^{mn} 上定义一个新的矩阵乘法 $A \times_P B = APB$，得到一类广义矩阵环 $R_{mn}(P)$. 给出了环 $R_{mn}(P_1)$ 与 $R_{mn}(P_2)$ 同构的一个充要条件. 最后研究了环 $R_{mn}(P)$ 的商环.

关　键　词：广义矩阵环；商环；同构；等价

中图分类号：O153.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2017)10-0009-04

矩阵环是一类非常重要的非交换环，它不仅在环论研究中具有重要意义，而且在图论、编码、信息科学等领域有着广泛的应用. 如文献[1-2]研究了经典矩阵环，分别给出了全矩阵环的局部导子、上三角矩阵环的函数恒等式等，把矩阵环的研究推广为素环和全序环上的矩阵环. 文献[3-4]分别研究了素环上上三角矩阵环的 *Jordan* 同态、全序环上的格序矩阵环等；近年矩阵环的研究进一步推广为广义矩阵环和形式矩阵环的研究等. 如文献[5-6]分别研究了局部环上的广义矩阵环等. 文献[7-8]分别研究了形式矩阵环的模、K 群的计算等. 因此，矩阵环的推广是一个值得研究的课题. 受益于这些研究的启发，本文把经典矩阵环的概念及乘法运算推广到非方阵矩阵空间 F^{mn} 上，也就是在非方阵矩阵空间 F^{mn} 上定义了一个新的矩阵乘法，即 $A \times_P B = APB$(P 是 $n \times m$ 矩阵)，该矩阵乘法是通常矩阵乘法的一种自然推广. 通过对矩阵进行普通加法和上述乘法，得到一类广义矩阵环，进一步给出该矩阵环分类的充要条件，最后研究了该矩阵环的商环及同构定理，得到该广义矩阵环的商环与经典的 k 级全阵环同构. 该广义矩阵环的研究推广了经典矩阵环的研究范畴，丰富了环论等的研究内容. 文中约定，E_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素为 1，其他元素为 0 的矩阵.

1　基本知识

设 F^{mn} 是数域 F 上 $m \times n$ 矩阵的全体，这里不妨假设 $m \geqslant n$. 设 P 是任意给定的 F 上 $n \times m$ 矩阵. 对 $\forall A, B \in F^{mn}$，定义矩阵乘法运算 $(A, B)_P = A \times_P B = APB$，可以得到：

命题 1　对于 $\forall A, B \in F^{mn}$，F^{mn} 关于矩阵的普通加法及矩阵乘法 $(A, B)_P = APB$ 构成一个矩阵环.

证　显然 F^{mn} 关于矩阵的普通加法作成一个加法群.

又对 $\forall A, B, C \in F^{mn}$，有乘法结合律

$$((A, B)_P, C)_P = (APB, C)_P = APBPC = AP(BPC) = (A, (B, C)_P)_P$$

成立，以及乘法对加法的左右分配律

$$(A + B, C)_P = (A + B)PC = APC + BPC = (A, C)_P + (B, C)_P$$

$$(A, B + C)_P = AP(B + C) = APB + APC = (A, B)_P + (A, C)_P$$

也成立. 因此 F^{mn} 关于这两个代数运算作成一个矩阵环.

由于该矩阵环与矩阵 P 有关，是经典矩阵环概念的推广，也称之为广义矩阵环，把它记为 $R_{mn}(P)$. 可以看到环 $R_{mn}(P)$ 是非交换环，除非 P 为零矩阵. 下文考虑的矩阵 P 都是非零矩阵，即 $R_{mn}(P)$ 是非交换环.

---

① 收稿日期：2016-11-07
基金项目：河南省科技厅基础与前沿技术研究项目(142300410449)；河南省高等学校重点科研项目(16A110035).
作者简介：李小朝(1981-)，男，河南驻马店人，博士，副教授，主要从事代数学研究.

命题 2　1) 若矩阵 P 的秩为 n，则广义矩阵环 $R_{mn}(P)$ 有右单位元，不一定有左单位元.

2) 若 P 的秩小于 n，则环 $R_{mn}(P)$ 不存在左(右) 单位元.

证　1) 因为 P 是 $n \times m$ 矩阵且秩为 n，即 P 是行满秩的，则 P 有右逆阵 B，$PB = E_n$. 对任意的 $A \in R_{mn}(P)$，有

$$(A, B)_P = APB = A$$

因此 B 即为环 $R_{mn}(P)$ 的右单位元.

若 $n = m$，则 P 是可逆矩阵，P 的逆阵即为环 $R_{mn}(P)$ 的左(右) 单位元. 若 $n < m$，则 P 没有左逆元，因此环 $R_{mn}(P)$ 无左单位元.

2) 若 P 的秩小于 n，则 P 没有左(右) 逆元，环 $R_{mn}(P)$ 不存在左(右) 单位元.

定义 1　设 $R_{mn}(P_1)$ 与 $R_{mn}(P_2)$ 是两个广义矩阵环. 若有映射 φ: $R_{mn}(P_1) \to R_{mn}(P_2)$ 是双射，且满足对 $\forall A, B \in R_{mn}(P_1)$，都有 $\varphi(A, B)_{P_1} = (\varphi(A), \varphi(B))_{P_2}$，$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ 成立，则称 φ 是一个同构映射，环 $R_{mn}(P_1)$ 与 $R_{mn}(P_2)$ 是同构的.

2　矩阵环的同构定理

环的同构分类是环论研究中最重要的内容之一，本节主要给出广义矩阵环 $R_{mn}(P)$ 同构的充要条件. 文中 $R_{mn}(P_1)$ 与 $R_{mn}(P_2)$ 都指矩阵空间 F^{mn} 上的广义矩阵环，P_1，P_2 是两个 $n \times m$ 级矩阵，且 $m \geqslant n$. 这里显然 P_1，P_2 不属于矩阵空间 F^{mn}. 下文矩阵 P_1 与 P_2 等价是指通常的概念，即 P_2 可由 P_1 经过一系列初等变换得到，也即存在 m 级可逆矩阵 M 和 n 级可逆矩阵 N，使得 $P_2 = NP_1M$.

定理 1　若矩阵 P_1 与 P_2 等价，则广义矩阵环 $R_{mn}(P_1)$ 与 $R_{mn}(P_2)$ 是同构的.

证　如果矩阵 P_1 与 P_2 等价，即存在 m 级可逆矩阵 M_1 和 n 级可逆矩阵 M_2，使得 $P_1 = M_2P_2M_1$. 定义映射

$$\varphi: R_{mn}(P_1) \to R_{mn}(P_2), \ A \mapsto M_1AM_2$$

则 φ 是一个双射. 对任意 $A, B \in R_{mn}(P_1)$，有

$$\varphi(A + B) = M_1(A + B)M_2 = M_1AM_2 + M_1BM_2 = \varphi(A) + \varphi(B)$$

$$\begin{aligned}\varphi((A, B)_{P_1}) = \varphi(AP_1B) = M_1(AP_1B)M_2 = M_1AM_2P_2M_1BM_2 = \\ \varphi(A)P_2\varphi(B) = (\varphi(A), \varphi(B))_{P_2}\end{aligned}$$

因此，φ 是一个同构映射，广义矩阵环 $R_{mn}(P_1)$ 与 $R_{mn}(P_2)$ 是同构的.

定理 2　若广义矩阵环 $R_{mn}(P_1)$ 与 $R_{mn}(P_2)$ 同构，则矩阵 P_1 与 P_2 是等价的.

证　(反证) 假设矩阵 P_1 与 P_2 不是等价的. 设 P_1，P_2 的秩分别为 k，$l(1 \leqslant k < l \leqslant n)$，由定理 1 的证明可知，不妨设 P_1 与 P_2 都是它们标准形的形式，$P_1 = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$P_2 = \begin{pmatrix} E_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 由于广义矩阵环 $R_{mn}(P_1)$ 与 $R_{mn}(P_2)$ 同构，则有双射 φ: $R_{mn}(P_1) \to R_{mn}(P_2)$，满足对任意 $A, B \in R_{mn}(P_1)$，有 $\varphi((A, B)_{P_1}) = (\varphi(A), \varphi(B))_{P_2}$ 和 $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

若取 $B = E_{i,j}(k < i \leqslant m, k < j \leqslant n)$，有 $BP_1 = P_1B = 0$. 对任意 $A \in R_{mn}(P_1)$，可以得到 $(A, B)_{P_1} = AP_1B = 0$. 因而

$$\varphi(A)P_2\varphi(B) = (\varphi(A), \varphi(B))_{P_2} = \varphi((A, B)_{P_1}) = 0 \tag{1}$$

对矩阵 $\varphi(A)$，$\varphi(B)$ 进行分块，设

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad \varphi(B) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中 A_{11}，B_{11} 是 $l \times l$ 级子块，A_{22}，B_{22} 是 $(m - l) \times (n - l)$ 级子块. 代入(1) 式有

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

由于 φ 是双射，矩阵 A 是任意的，则 A_{11} 是任意的 $l \times l$ 级矩阵，进而得到 $B_{11} = B_{12} = 0$. 因此得到

$$\varphi(E_{i,j}) = \varphi(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}(k < i \leqslant m, k < j \leqslant n) \tag{3}$$

类似地，对任意 $C \in R_{mn}(P_1)$，可以得到 $(B, C)_{P_1} = BP_1C = 0$. 因而

$$\varphi(B)P_2\varphi(C)=(\varphi(B),\varphi(C))_{P_2}=\varphi((B,C)_{P_1})=0 \tag{4}$$

对 $\varphi(B)$，$\varphi(C)$ 进行分块，设

$$\varphi(B)=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\qquad \varphi(C)=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}$$

其中 B_{11}，C_{11} 是 $l\times l$ 级子块，B_{22}，C_{22} 是 $(m-l)\times(n-l)$ 级子块．代入(4)式有

$$\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_l & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}C_{11} & B_{11}C_{12}\\ B_{21}C_{11} & B_{21}C_{12}\end{pmatrix}=0 \tag{5}$$

由于 φ 是双射，矩阵 C 是任意的，则 C_{11} 是任意的 $l\times l$ 级矩阵，进而得到 $B_{11}=B_{21}=0$．因此得到

$$\varphi(E_{i,j})=\varphi(B)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}(k<i\leqslant m,\ k<j\leqslant n) \tag{6}$$

若 $l=n$，则 B_{22} 所在的列没有，直接得到 $\varphi(E_{i,j})=0$，与 φ 是双射矛盾．对 $l<n$ 的情形，取矩阵空间 F^{mn} 的一组基：$E_{i,j}(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$．由(6)式知，有 $(m-k)\times(n-k)$ 个基向量 $E_{i,j}(k<i\leqslant m,\ k<j\leqslant n)$ 的像 $\varphi(E_{i,j})$ 可以由 $(m-l)\times(n-l)$ 个基向量 $E_{s,t}(l<s\leqslant m,\ l<t\leqslant n)$ 线性表出．又因为 $k<l$，有 $(m-k)\times(n-k)>(m-l)\times(n-l)$，则作为矩阵空间 F^{mn} 中的向量，$\varphi(E_{i,j})(k<i\leqslant m,$ $k<j\leqslant n)$ 是线性相关的．结合行列式的性质，不难证明 φ 在基 $E_{i,j}(k<i\leqslant m,\ k<j\leqslant n)$ 下的矩阵是退化的，与 φ 是双射矛盾．因此有矩阵 P_1 与 P_2 是等价的．

综合上述 2 个结论，可以得到

定理 3　广义矩阵环 $R_{mn}(P_1)$ 与 $R_{mn}(P_2)$ 是同构的当且仅当矩阵 P_1 与 P_2 是等价的．

由定理 3 可以看到，要研究广义矩阵环 $R_{mn}(P)$ 的结构和性质，只需考虑 P 取其等价标准形即可．

3　矩阵环的商环

本节主要研究广义矩阵环 $R_{mn}(P)$ 的商环，这里矩阵 P 的秩为 k．由定理 3 的结论可知，$R_{mn}(P)$ 与 $R_{mn}(P_1)$ 是同构的，其中 $P_1=\begin{pmatrix}E_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 为 P 的标准形(通常意义下)．因此，我们只需考虑 P 为 $\begin{pmatrix}E_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 的情形．

命题 3　设 N 是由元素 $E_{ij}(k<i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$，$E_{ij}(1\leqslant i\leqslant k,\ k<j\leqslant n)$ 生成的子空间，即 $N=\left\{\begin{pmatrix}0_{k\times k} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\right\}$ 是左上角为 k 级零阵的数域 F 上 $m\times n$ 矩阵的全体，则 N 是环 $R_{mn}(P)$ 的理想．

证　显然，N 是环 $R_{mn}(P)$ 的子加群．又对任意的 $A\in N$，$B\in R_{mn}(P)$，有

$$(A,B)_P=APB=\begin{pmatrix}0_{k\times k} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0_{k\times k} & 0\\ * & *\end{pmatrix}\in N$$

$$(B,A)_P=BPA=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0_{k\times k} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0_{k\times k} & *\\ 0 & *\end{pmatrix}\in N$$

故 N 是环 $R_{mn}(P)$ 的理想．

设 $R_{mn}(P)/N$ 是 $R_{mn}(P)$ 关于 N 的一切陪集 $A+N(\forall A\in R_{mn}(P))$ 作成的集合．定义陪集的加法：$(A+N)+(B+N)=A+B+N$，则 $R_{mn}(P)/N$ 作成一个加群．定义陪集的乘法：$(A+N,B+N)_P=(A,B)_P+N$，下面证明其结果与陪集中代表元的选取无关．

设有 $A+N=C+N$，$B+N=D+N$，则有 $A-C\in N$，$B-D\in N$．由于 N 是 $R_{mn}(P)$ 的理想，得到 $(A-C,B)_P\in N$，$(C,B-D)_P\in N$，进而 $(A,B)_P-(C,D)_P\in N$．因此 $(A,B)_P+N=(C,D)_P+N$，也就是 $(A+N,B+N)_P=(C+N,D+N)_P$．

进而可以得到

命题 4　设 N 是广义矩阵环 $R_{mn}(P)$ 的理想．则 $R_{mn}(P)/N$ 对陪集的加法和乘法作成一个环，称为环 $R_{mn}(P)$ 关于 N 的商环．

定义 2　设 $F^{k\times k}$ 是数域 F 上 k 级方阵的全体．$F^{k\times k}$ 关于矩阵通常的加法与乘法，作成一个环，称为数域 F 上 k 级全阵环，记为 $R_{k\times k}$．

定理 4　设商环 $R_{mn}(P)/N$ 和全阵环 $R_{k\times k}$ 如上定义，则有 $R_{mn}(P)/N\cong R_{k\times k}$．

证 对任意 $A, B \in R_{mn}(P)$，设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$，其中 A_{11}，B_{11} 是 k 级方阵. 定义映射：

$$\varphi: R_{mn}(P)/N \to R_{k\times k},\ A + N \mapsto A_{11}$$

或者 $\varphi(A+N) = A_{11}$. 下面分三步证明 φ 是一个同构映射.

ⅰ）证 φ 是双射. 显然 φ 是满射.

若陪集 $A+N \neq B+N$，即有 $A-B \notin N$，也就是 $A_{11} \neq B_{11}$. 因此，$\varphi(A+N) \neq \varphi(B+N)$，$\varphi$ 是单射.

ⅱ）因为 $(A+N)+(B+N) = (A+B)+N = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix} + N$，所以有

$$\varphi((A+N)+(B+N)) = \varphi((A+B)+N) = A_{11}+B_{11} = \varphi(A+N)+\varphi(B+N)$$

ⅲ）由陪集的乘法

$$(A+N, B+N)_P = (A, B)_P + N = APB + N =$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} + N = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix} + N$$

则可以得到 $\varphi(A+N, B+N)_P = A_{11}B_{11} = \varphi(A+N)\varphi(B+N)$.

因此，φ 是一个同构映射，$R_{mn}(P)/N \cong R_{k\times k}$.

参考文献：

[1] ALIZADEH R, BITARAFAN M J. Local Derivations of Full Matrix Rings [J]. Acta Mathematica Hungarica, 2015, 145(2): 433-439.

[2] EREMITA D. Functional Identities in Upper Triangular Matrix rings [J]. Linear Algebra and its Applications, 2016, 493: 580-605.

[3] DU Y, WANG Y. Jordan Homomorphisms of Upper Triangular Matrix rings Over a Prime Ring [J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 439(12): 4063-4069.

[4] MA J, ZHANG Y. Lattice-Ordered Matrix Rings Over Totally Ordered Rings [J]. Order-a Journal on the Theory of Ordered Sets & Its Applications, 2014, 31(1): 45-54.

[5] TANG G, ZHOU Y. Strong Cleanness of Generalized Matrix rings Over a Local Ring [J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 437(10): 2546-2559.

[6] YIN X, DOU W. Pseudopolarity of Generalized Matrix Rings over a Local Ring [J]. Communications in Mathematical Research, 2015, 31(3): 211-221.

[7] KRYLOV P, TUGANBAEV A. Modules over Formal Matrix Rings [J]. Journal of Mathematical Sciences, 2010, 171(2): 248-295.

[8] FAN Z, YIN Z. On K-group of a Formal Matrix Ring [J]. Acta Mathematica Sinica, 2012, 28(9): 1897-1906.

The Structure of a Class of Generalized Matrix Rings

LI Xiao-chao, ZHANG Xiu-quan, LUO Cheng-guang

School of Mathematics and Statistics, Huanghuai University, Zhumadian Henan 463000, China

Abstract: Let F^{mn} be a set of $m\times n$ matrices on field F. By defining a new matrix multiplication $A\times PB = APB$ on F^{mn}, a class of generalized matrix rings $R_{mn}(P)$ are obtained. A necessary and sufficient condition for the isomorphism of rings $R_{mn}(P_1)$ and $R_{mn}(P_2)$ is given. The quotient rings of matrix ring $R_{mn}(P)$ are researched at the end.

Key words: generalized matrix ring; quotient ring; isomorphic; equivalent

责任编辑 夏 娟 崔玉洁