第 42 卷　第 10 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2017 年 10 月
Vol. 42　No. 10　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Oct.　2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.10.005

关于不定方程 $6x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ ①

胡邦群[1]，　罗　明[2]

1. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 400047；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要运用 pell 方程、递推序列、同余式及(非)平方剩余等一些初等方法，证明了不定方程 $6x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有正整数解 $(x, y)=(25, 24)$. 沿用该文相同思路和方法得出关于不定方程 $mx(x+1)(x+2)(x+3)=ny(y+1)(y+2)(y+3)$ 其中 $(m, n)=(6, 11)$ 和 $(m, n)=(5, 11)$ 时均无正整数解.

关 键 词： 不定方程；整数解；递归数列

中图分类号：O156.2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2017)10-0017-05

当 $(m, n)=1$，$m, n \in N^*$ 时，对形如 $mx(x+1)(x+2)(x+3)=ny(y+1)(y+2)(y+3)$ 的不定方程已有不少研究工作[1-9]. 1982 年，宣体佐[1] 证明了当 $(m, n)=(1, 5)$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x, y)=(2, 1)$. 1991 年，罗明[2] 证明了当 $(m, n)=(1, 7)$ 时，不定方程仅有正整数解(2). 2009 年罗明，朱德辉，马芙蓉[3] 证明了当 $(m, n)=(3, 5)$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x, y)=(7, 6)$. 2016 年，林昌娜，罗明[4] 证明了当 $(m, n)=(1, 34)$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x, y)=(14, 5)$. 2007 年程瑶，马玉林[5] 证明了当 $(m, n)=(1, 11)$ 时，不定方程无正整数解. 2009 年段辉明，杨春德[6] 证明了当 $(m, n)=(1, 19)$ 时，不定方程无正整数解. 2013 年，郭凤明和罗明[7] 证明了当 $(m, n)=(1, 10)$ 时，不定方程无正整数解. 2015 年张洪和罗明[8] 证明了当 $(m, n)=(1, 21)$ 和 $(m, n)=(1, 23)$ 时不定方程无正整数解. 在此直接给出当 $(m, n)=(5, 11)$ 和 $(m, n)=(6, 11)$ 时不定方程均无正整数解的结论. 本文将运用同余式和递归数列方法证明当 $(m, n)=(6, 7)$ 时，不定方程

$$6x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

仅有正整数解 $(x, y)=(25, 24)$.

先将方程(1) 化为 $6(x^2+3x+1)^2-7(y^2+3y+1)=-1$，即

$$6(x^2+3x+1)]^2-42(y^2+3y+1)=-6 \tag{2}$$

易知方程 $X^2-42Y^2=-6$ 的全部整数解[9]，由以下一个结合类(歧类) 给出：

$$x_n+y_n\sqrt{42}=\pm(6+\sqrt{42})(u_n+v_n\sqrt{42})=\pm(6+\sqrt{42})(13+2\sqrt{42})^n,\ n\in Z$$

其中：$6+\sqrt{42}$ 是 $X^2-42Y^2=-6$ 的最小正整数解；$13+2\sqrt{42}$ 是 Pell 方程 $u^2-42v^2=1$ 的基本解. 容易得出 $\bar{y}_n = y_{-n}$，于是方程(2) 的解应满足

$$(2y+3)^2=4y_n+5 \tag{3}$$

或者

$$(2y+3)^2=-4y_n+5 \tag{4}$$

显然必满足 $y_n \geqslant -1$，从而(3)，(4) 中的 y_n 只需取自

① 收稿日期：2016-11-02
作者简介：胡邦群(1991-)，女，四川资阳人，硕士研究生，主要从事代数数论的研究.

$$x_n + y_n \sqrt{42} = (6 + \sqrt{42})(u_n + v_n \sqrt{42}) = (6 + \sqrt{42})(13 + 2\sqrt{42})^n,\ n \geqslant 0$$

由这两个式子不难推出下列关系式：

$$y_{n+1} = 26y_n - y_{n-1},\ y_0 = 1,\ y_1 = 25 \tag{5}$$

$$u_{n+1} = 26u_n - u_{n-1},\ u_0 = 1,\ u_1 = 13 \tag{6}$$

$$v_{n+1} = 26v_n - v_{n-1},\ v_0 = 0,\ v_1 = 2 \tag{7}$$

$$u_{2n} = 2u_n^2 - 1,\ v_{2n} = 2u_nv_n \tag{8}$$

$$y_n = u_n + 6v_n,\ \overline{y_n} = u_n - 6v_n \tag{9}$$

$$u_{n+2h} \equiv - u_n \pmod{u_h},\ v_{n+2h} \equiv - v_n \pmod{u_h} \tag{10}$$

$$y_{n+2h} \equiv - y_n \pmod{u_h},\ \overline{y_{n+2h}} \equiv - \overline{y_n} \pmod{u_h} \tag{11}$$

$$u_{m+n} + v_{m+n} \sqrt{42} = (u_m + v_m \sqrt{42})(u_n + v_n \sqrt{42})$$

$$u_{m+n} = u_mu_n + 42v_mv_n,\ v_{m+n} = u_mv_n + u_nv_m,\ u_{-n} = u_n,\ v_{-n} = - v_n \tag{12}$$

下面将证明(3)式仅当 $n = 0, 2, -1, -3$ 时成立，(4)式仅当 $n = 0, -1$ 时成立. 由此求得方程(2)的全部整数解，进一步求得(1)的全部正整数解.

1 $(2y+3)^2 = -4y_n+5$

本节考察(4)式的解，即 n 取何值时 $-4y_n+5$ 为完全平方数.

引理 1 $-4y_n+5$ 是平方数仅对 $n=0$ 成立.

证 从(5)式知道 $y_n > 1$ $(n \neq 0, -1)$ 从而 $-4y_n+5$ 是负数不可能为一个平方数. 当 $n=0, -1$ 时，$-4y_n+5=1$，结论成立. 证毕.

2 $(2y+3)^2 = 4y_n+5$

引理 2 若引理 $4y_n+5$ 是平方数，则必须 $n \equiv 0, 2, -1, -3 \pmod{2^2 \times 3^2 \times 5}$

证 采用对序列$\{4y_n+5\}$取模的方法进行证明. mod 701，排除 $n \equiv 1, 3 \pmod 5$，此时 $4y_n+5 \equiv 105, 105 \pmod{701}$. 剩 $n \equiv 0, 2, 4 \pmod 5$. 上面的 mod 701 是对序列$\{4y_n+5\}$取的，mod 5 是指出所得剩余序列周期为 5. 第三句话是指“排除”的理由：105 为 mod 701 的平方非剩余，为了节省篇幅，我们以下均按这种方式叙述. mod 94 349，排除 $n \equiv 4, 9, 10, 12, 17, 19, 20, 25 \pmod{30}$. 此时 $4y_n+5 \equiv$ 51 423，51 419，42 936，91 758，91 758，42 936，51 419，51 423(mod 94 349). 剩 $n \equiv 0, 2, 5, 7, 14, 15, 22, 24, 27, 29 \pmod{30}$. mod61，排除 $n \equiv 15, 22, 24, 27, 32, 35, 37, 44 \pmod{60}$. 此时 $4y_n+5 \equiv 24, 11, 10, 32, 32, 10, 11, 24 \pmod{61}$. 剩 $n \equiv 0, 2, 5, 7, 14, 29, 30, 45, 52, 54, 57, 59 \pmod{60}$. mod 181，排除 $n \equiv 7, 14, 54, 60, 74, 105, 119, 125, 165, 172 \pmod{180}$.

此时 $4y_n+5 \equiv 50, 110, 10, 35, 61, 61, 35, 10, 110, 50 \pmod{181}$. 剩 $n \equiv 0, 2, 5, 29, 30, 45, 52, 57, 59, 62, 65, 67, 89, 90, 112, 114, 117, 120, 122, 127, 134, 149, 150, 174, 177, 179 \pmod{180}$mod 19，排除 $n \equiv 1, 3, 4, 5, 7 \pmod 9$，此时 $4y_n+5 \equiv 10, 8, 14, 8, 10 \pmod{19}$，排除 $n \equiv 5, 30, 52, 57, 59, 67, 112, 120, 122, 127, 149, 174 \pmod{180}$. mod 17497，排除 $n \equiv 6, 11 \pmod{18}$，此时 $4y_n+5 \equiv$ 14 906，14 906(mod 17497)，排除 $n \equiv 29, 65, 114, 150 \pmod{180}$. mod 809，排除 $n \equiv 27 \pmod{45}$，此时 $4y_n+5 \equiv 561 \pmod{809}$，排除 $n \equiv 62, 117 \pmod{180}$. mod 19 571，排除 $n \equiv 17 \pmod{24}$，此时 $4y_n+5 \equiv$ 2 501(mod 19 751). 排除 $n \equiv 89 \pmod{180}$，经上述取模剩 $n \equiv 0, 2, 45, 90, 134, 177, 179 \pmod{180}$. 下面用计算排除 $n \equiv 45, 134 \pmod{180}$. 对于 $n \equiv 45 \pmod{180}$，令 $n = 180_{t_1} + 45$，若 $2 \mid t_1$，则 $n \equiv 5 \pmod{40}$；若 $2 \mid / t_1$，则 $n \equiv 25 \pmod{40}$. 取 mod 41，排除 $n \equiv 5, 25 \pmod{40}$，此时 $4y_n+5 \equiv 7, 3 \pmod{41}$. 对于 $n \equiv 134 \pmod{180}$，令 $n = 180_{t_2} + 134$，若 $2 \mid t_2$，则 $n \equiv 14 \pmod{40}$；若 $2 \mid / t_2$，则 $n \equiv 34 \pmod{40}$. 取 mod 41，排除 $n \equiv 14, 34 \pmod{40}$，此时 $4y_n+5 \equiv 3, 7 \pmod{41}$. 下面排除 $n \equiv 90 \pmod{180}$ 即 $n \equiv 90, 270 \pmod{360}$. mod 41，排除 $n \equiv 10 \pmod{40}$，此时 $4y_n+5 \equiv 35 \pmod{41}$，排除 $n \equiv 90 \pmod{360}$. mod19 751，排除 $n \equiv 6 \pmod{24}$，此时 $4y_n+5 \equiv$ 2 501(mod 19 751)，排除 $n \equiv 270 \pmod{360}$. 综上得剩

$n\equiv 0, 2, 177, 179 \pmod{180}$，即 $n\equiv 0, 2, -1, -3 \pmod{180}$. 引理得证.

引理 3　设 $2\mid n$，$n>0$，则 $\left(\dfrac{\pm 24v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\dfrac{\pm 24v_n+5u_n}{271}\right)$

证　由(8)式知 $2\nmid u_n$，故有 $u_{2n}\equiv 2u_n^2-1\equiv 1 \pmod 8$，$\left(\dfrac{-1}{u_{2n}}\right)=1$，$\left(\dfrac{2}{u_{2n}}\right)=1$，又因 $2\mid n$ 则 $u_n\equiv 1 \pmod 4$，$\pm 24v_n+5u_n\equiv -3 \pmod 8$. $v_n\equiv 1 \pmod 3$，$\forall n\in Z$. $3\nmid n$ 时，$5\nmid v_n$；$3\mid n$ 时，$5\mid v_n$.

$$\left(\frac{\pm 24v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm 48u_nv_n+10u_n^2}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{2}{u_{2n}}\right)\left(\frac{\pm 24v_n+5u_n}{u_{2n}}\right)=$$
$$\left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{\pm 24v_n+5u_n}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{u_n^2+42v_n^2}{\pm 24v_n+5u_n}\right)$$

① 若 $3\nmid n$，则 $5\nmid v_n$.

$$\left(\frac{u_n^2+42v_n^2}{\pm 24v_n+5u_n}\right)=\left(\frac{(5u_n)^2+25\times 42v_n^2}{\pm 24v_{2n}+5u_n}\right)=\left(\frac{42\times 25v_n^2+(24v_n)^2}{\pm 24v_n+5u_n}\right)=\left(\frac{1626}{\pm 24v_n+5u_n}\right)=\left(\frac{2}{\pm 24v_n+5u_n}\right)$$
$$\left(\frac{3}{\pm 24v_n+5u_n}\right)\left(\frac{271}{\pm 24v_n+5u_n}\right)=-\left(\frac{3}{\pm 24v_n+5u_n}\right)\left(\frac{271}{\pm 24v_n+5u_n}\right)=\left(\frac{271}{\pm 24v_n+5u_n}\right)=\left(\frac{\pm 24v_n+5u_n}{271}\right)$$

② 若 $3\mid n$，则 $5\mid v_n$.

$$\left(\frac{u_n^2+42v_n^2}{\pm 24v_n+5u_n}\right)=\left(\frac{u_n^2+42v_n^2}{\pm 24v_n/5+u_n}\right)\left(\frac{u_n^2+42v_n^2}{5}\right)=\left(\frac{u_n^2+42v_n^2}{\pm 24v_n/5+u_n}\right)=\left(\frac{\pm 42v_n^2+(24/5)^2v_n^2}{\pm 24v_n/5+u_n}\right)=$$
$$\left(\frac{1626}{\pm 24v_n/5+u_n}\right)=\left(\frac{3}{\pm 24v_n/5+u_n}\right)\left(\frac{271}{\pm 24v_n/5+u_n}\right)=\left(\frac{u_n}{3}\right)\left(\frac{271}{\pm 24v_n/5+u_n}\right)=$$
$$\left(\frac{\pm 24v_n/5+u_n}{271}\right)=\left(\frac{\pm 24v_n+5u_n}{271}\right)$$

两情形结果相同，证毕.

引理 4　设 $n\equiv 0 \pmod{2^2\times 3^2\times 5}$，则仅当 $n=0$ 时，$4y_n+5$ 为平方数.

证　若 $n\equiv 0 \pmod{2^2\times 3^2\times 5}$ 但 $n\neq 0$，令 $n=0+2\times 2^t\times 3^2\times 5\times k$，其中，$2\nmid k$，$t\geqslant 1$，对序列 $\{5u_n+24v_n\}$ 取模 271 得两个剩余序列周期为 68，而对 $\{2^t\}$ 模 68 的剩余序列周期为 8. 对 k 分两种情况讨论：

1) 当 $k\equiv 1 \pmod 4$ 时，当 $t\equiv 1, 3, 5, 6, 7 \pmod 8$ 时，令 $m=2^t$；当 $t\equiv 4 \pmod 8$ 时，令 $m=5\times 2^t$；当 $t\equiv 2 \pmod 8$ 时，令 $m=3\times 2^t$；当 $t\equiv 0 \pmod 8$ 时，令 $m=3^2\times 2^t$.

则当 $t(\geqslant 1) \pmod 8=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 时，$m \pmod{68}=60, 36, 12, 8, 12, 32, 64, 60$，则 $\{5u_m+24v_m\} \pmod{271}=86, 48, 92, 243, 92, 105, 227, 86$，这些数均为模 271 的平方非剩余. 再由(9)，(11) 和引理 3 知 $4y_n+5\equiv 4y_{2m}+5\equiv 24v_{2m}+5 \pmod{u_{2m}}$，故 $4y_n+5$ 是非平方数.

2) 当 $k\equiv 3 \pmod 4$ 时，当 $t\equiv 1, 2, 3, 5, 7 \pmod 8$ 时，令 $m=2^t$；当 $t\equiv 0 \pmod 8$ 时，令 $m=5\times 2^t$；当 $t\equiv 6 \pmod 8$ 时，令 $m=3\times 2^t$；当 $t\equiv 4 \pmod 8$ 时，令 $m=3^2\times 2^t$. 当 $t(\geqslant 1) \pmod 8=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 时，$m \pmod{68}=56, 36, 4, 8, 8, 32, 56, 60$，对应序列 $\{5u_m-24v_m\} \pmod{271}=92, 105, 227, 86, 227, 48, 92, 243$，这些数均为模 271 的平方非剩余，由(9)，(11) 和引理 3 知 $4y_n+5\equiv -4y_{2m}+5\equiv -24v_{2m}+5 \pmod{u_{2m}}$

$\left(\dfrac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\dfrac{-24v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\dfrac{-24v_m+5u_m}{271}\right)=-1$，故 $4y_n+5$ 是非平方数. 当 $n=0$ 时，$4y_n+5=3^2$，证毕.

引理 5　若 $n\equiv -1 \pmod{2^2\times 3^2\times 5}$，则仅当 $n=-1$ 时 $4y_n+5$ 为平方数.

证　如果 $n\equiv -1 \pmod{2^2\times 3^2\times 5}$ 但 $n\neq -1$，则可令 $n=-1+2\times 2^t\times 3^2\times 5\times k$ 其中 $2\nmid k$，$t\geqslant 1$，取 m 为 2^t，5×2^t，3×2^t，$3^2\times 2^t$ 之一，则由(11)，(12) 知

$$y_n\equiv y_{-1+2m}\equiv u_{-1+2m}+6v_{-1+2m}=u_{-1}u_{\pm 2m}+42v_{-1}v_{\pm 2m}+6(v_{-1}u_{\pm 2m}+u_{-1}v_{\pm 2m})\equiv$$
$$42v_{-1}v_{\pm 2m}+6u_{-1}v_{\pm 2m}\equiv -6v_{\pm 2m} \pmod{u_{2m}}$$

由引理 3 可知 $\left(\dfrac{\mp 24v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\dfrac{\pm 24v_m+5u_m}{271}\right)$，按照引理 4 的证明过程中的方式去 m，可得

$\left(\dfrac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\dfrac{\pm 24v_m+5u_m}{271}\right)=-1$ 矛盾．故 $4y_n+5$ 为非平方数．当 $n=-1$ 时，$4y_n+5=3^2$ 证毕．

引理 6 若 $n\equiv 2(\bmod 2^2\times 3^2)$ 则仅当 $n=2$ 时 $4y_n+5$ 为平方数．

证 若 $n\equiv 2(\bmod\ 2^2\times 3^2)$ 但 $n\neq 2$，则可令 $n=2+2\times 2^t\times 3^2\times k$，其中 $2\nmid k$，$t\geqslant 1$，取 m 为 2^t，3×2^t，$3^2\times 2^t$ 之一，则由(11)知 $4y_n+5\equiv -4y_2+5\equiv -2\,591(\bmod\ u_m)$．由于 $2\mid m$ 时，$u_m\equiv 1(\bmod\ 4)$．故 $\left(\dfrac{4y_n+5}{u_m}\right)=\left(\dfrac{-2\,591}{u_m}\right)=\left(\dfrac{-1}{u_m}\right)\left(\dfrac{2591}{u_m}\right)=\left(\dfrac{u_m}{2591}\right)$

$\{u_m\}$ 对 mod 2 591 的剩余序列周期为 2 592，而 $\{2^t\}$ 对 mod 2 592 的剩余序列周期为 54．

当 $t\equiv 1$，2，4，7，10，12，13，15，22，23，24，25，26，29，30，34，37，40，42，49，50，51，52，53(mod 54) 时，

令 $m\equiv 2^t$；当 $t\equiv 0$，3，5，8，11，14，17，19，20，21，28，32，35，38，39，41，44，46，47，48(mod 45) 时，

令 $m\equiv 3\times 2^t$；当 $t\equiv 6$，9，16，18，27，31，33，36，43，45(mod 54) 时，令 $m\equiv 3^2\times 2^t$．

则当 $t(\geqslant 1)$(mod 54) = 5，6，7，8，9，10，11，12，13，14，15，16，17，18，19，20，21，22，23，24，25，6，27，28，29，30，31，32，33，34，35，36，37，38，39，40，41，42，43，44，45，46，47，48，49，50，51，52，53(mod 54)．

m(mod 2592) = 3，2，4，24，16，96，576，，128，768，2 016，1 024，960，1 504，416，2 496，1 664，1 440，1 824，576，2 112，1 632，672，448，896，1 792，992，1 984，2 016，480，320，640，11 52，2 496，2 016，2 464，1 824，576，1 568，1 632，672，2 176，96，928，1 152，768，2 016，480，960，1 920，2 144，1 696，800，1 600，608 则 $\{u_m\}$(mod 2 591) = 976，337，1 720，1 793，2 427，1 672，2 182，248，645，2 182，1 497，274，1 893，2 559，1 672，1 123，322，645，2 182，497，274，2 464，2 459，1 164，2 196，1 129，2 328，2 128，479，2 303，63，322，1 672，2 182，248，645，2 182，1 497，274，2 464，2 559，1 672，1 123，322，645，2 132，479，274，2 464，2 459，1 164，2 196，1 129，2 328 这些数均为模 2 591 的平方非剩余．故 $4y_n+5$ 不是平方数．当 $n=2$ 时，$4y_n+5=51^2$，证毕．

引理 7 如果 $n\equiv -3(\bmod 2^2\times 3^2)$，则仅当 $n=-3$ 时 $4y_n+5$ 为平方数．

证 若 $n\equiv -3(\bmod 2^2\times 3^2)$ 且 $n\neq -3$ 时，可令 $n=-3+2\times 2^t\times 3^2\times k$ 其中 $2\nmid k$，$t\geqslant 1$．去 m 为 2^t，3×2^t，$3^2\times 2^t$ 之一，由(12)可知 $4y_n+5\equiv -4y_{-3}+5\equiv -2\,591$，同引理 6 的证明过程，得 $\left(\dfrac{4y_n+5}{u_m}\right)=-1$，故 $4y_n+5$ 不是平方数．当 $n=-3$ 时，$4y_n+5=51^2$，证毕．

3 结 果

根据前面的讨论，现在给出本文的主要结果．

结论 1 定理 不定方程 $6x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有一组正整数解 $(x,y)=(25,24)$．

证 由引理 1 有 $(2y+3)^2=-4y_{0,-1}+5=1$，故 $y=-1,-2$．由引理 4 有 $(2y+3)^2=4y_0+5=9$，故 $y=0,-3$．由引理 5 有 $(2y+3)^2=4y_{-1}+5=9$，故 $y=0,-3$．由引理 6 有 $(2y+3)^2=4y_2+5=2\,601$，故 $y=24,-27$．由引理 7 有 $(2y+3)^2=4y_{-3}+5=2\,601$，故 $y=24,-27$．易知方程(1)共有 20 组整数解．其中有 16 组平凡解使得(1)式两端均为零，即(0，0)，(0，−1)，(0，−2)，(0，−3)，(−1，0)，(−1，−1)，(−1，−2)，(−1，−3)，(−2，0)，(−2，−1)，(−2，−2)，(−2，−3)，(−3，0)，(−3，−1)，(−3，−2)，(−3，−3) 另外 4 组非平凡解为(25，24)，(−28，24)，(25，−27)，(−28，−27)．

故不定方程 $6x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有一组正整数解．证毕．

结论 2 $mx(x+1)(x+2)(x+3)=ny(y+1)(y+2)(y+3)$ 其中当 $(m,n)=(5,11)$ 和 $(m,n)=(6,11)$ 时，不定方程仅有上述结论 1 中 16 组平凡解．由于本文篇幅原因在此不作相关证明．

参考文献：

[1] 宣体佐. 关于不定方程 $y(y+1)(y+2)(y+3)=5x(x+1)(x+2)(x+3)$ [J]. 北京师范大学学报(自然科学版)，1982，3(2)：27－34.

[2] 罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1991，8(1)：1－8.

[3] 罗　明，朱德辉，马芙蓉. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2009，34(5)：16－21.

[4] 林昌娜，罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=34y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：10－14.

[5] 程　遥，马玉林. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2007，24(3)：27－30.

[6] 段辉明，杨春德. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2009，32(1)：60－63.

[7] 郭凤明，罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(10)：13－16.

[8] 张　洪，罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=Dy(y+1)(y+2)(y+3)$(其中 $D=21$，23) [J]. 重庆工商大学学院报(自然科学版)，2015，32(7)：56－61.

[9] 柯　召，孙　琦. 谈谈不定方程 [M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.

On the Diophantine Equation $6x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$

HU Bang-qun[1]，　LUO　Ming[2]

1. School of Mathematics and Science，Chongqing Normal University，Chongqing 400047，China；

2. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Such elementary methods as Pell equation，recursive sequence，congruence and quadratic (non－)residue are mainly used to prove that the diophantine equation $6x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ has only the positive integer solution $(x, y)=(25, 24)$. Based on similar ideas and methods，this paper proves that the diophantine equation $mx(x+1)(x+2)(x+3)=ny(y+1)(y+2)(y+3)$ has no positive integer solution when $(m, n)=(6, 11)$ or $(m, n)=(5, 11)$.

Key words：diophantine equation；interger solution；recurrence sequence

责任编辑　崔玉洁　潘春燕