第 42 卷 第 10 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2017 年 10 月
Vol. 42 No. 10 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Oct. 2017

DOI:10. 13718/j. cnki. xsxb. 2017. 10. 006

de Sitter 空间中全脐超曲面与高斯映照像①

文 海 燕

西北师范大学 数学与统计学院,兰州 730070

摘要: 研究 de Sitter 空间 S_1^{n+1} 中的紧致类空超曲面 M^n. 利用 Minkowski 型积分公式,证明了如果存在某个整数 $r(1 \leqslant r \leqslant n-1)$,使得高阶平均曲率 H_r 在 M^n 上是非零常数,且 M^n 的高斯映照像包含在一个开半球面内,则超曲面 M^n 全脐.

关 键 词: de Sitter 空间;全脐超曲面;高斯映照像;高阶平均曲率

中图分类号:O186. 12 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2017)10-0022-04

1977 年,A. J. Goddard[1] 提出猜想:de Sitter 空间中具有常平均曲率的类空超曲面 M^n 必须是全脐的. 随后,Akutagawa[2] 证明了当平均曲率 H 满足适当条件时,Goddard 的猜想是正确的. Montiel[3] 利用积分法证明了如果 M^n 是紧致的,则 Goddard 猜想是成立的. 关于 de Sitter 空间中具有常数量曲率的紧致类空超曲面 M^n,Zheng[4] 证明了如果 M^n 的截面曲率非负并且标准数量曲率 $R<1$,则 M^n 是全脐的. 这些使得当平均曲率或数量曲率满足适当条件时的研究引起了学者们的广泛关注[5-7]. 文献[8-10]针对 de Sitter 空间 S_1^{n+1} 中的紧致类空超曲面,建立了相应高阶平均曲率的 Minkowski 型积分公式,利用该积分公式讨论了紧致类空超曲面的全脐性,得到以下结果:

定理 1[8] 设 M^n 是 de Sitter 空间 S_1^{n+1} 中的紧致类空浸入超曲面. 若高阶平均曲率 H_r 和 H_{r+1} $(0 \leqslant r \leqslant n-2)$ 均为常数,则 M^n 是全脐超曲面.

定理 2[10] 设 M^n 是 de Sitter 空间 S_1^{n+1} 中紧致类空超曲面. 如果存在两个整数 r,s,使得

$$1 \leqslant r,\ s \leqslant n,\ r \neq s$$

且 H_r 在 M^n 上处处非零,$\dfrac{H_s}{H_r}$ 在 M^n 上为常数,则 M^n 必是全脐的.

注意到,定理 1 和定理 2 的曲率条件同时涉及两个高阶平均曲率. 类似地,文献[11,12]研究了单位球空间 S^{n+1} 和双曲空间 H^{n+1} 中定向的紧致无边超曲面,得到下面定理:

定理 3[11] 设 M^n 是 S^{n+1} 中定向的紧致无边超曲面,存在某个整数 $r(0 \leqslant r \leqslant n-2)$,使得$(r+1)$阶平均曲率 H_{r+1} 是正常数. 如果 M^n 的高斯映照像包含在一个闭的半球面内,而且下列不等式成立:

$$H_r \geqslant 0,\ H_1 H_r \geqslant H_{r+1}$$

则 M^n 是全脐的.

定理 4[12] 设 M^n 是 H^{n+1} 中定向的紧致无边超曲面. 若存在某个整数 $r(1 \leqslant r \leqslant n-1)$,使得高阶平均曲率 $H_i > 0$,$i=1, 2, \cdots, r$,且 H_r 是常数. 如果 M^n 的高斯映照像包含在一个开的半球面内,则 M^n 是

① 收稿日期:2016-11-23
作者简介:文海燕(1992-),女,甘肃庆阳人,硕士研究生. 主要从事微分几何的研究.

全脐超曲面.

本文讨论 de Sitter 空间 S_1^{n+1} 中定向的紧致类空超曲面，获得了定理 5，其中涉及一个高阶平均曲率的条件，并且与超曲面的高斯映照像相关.

定理 5　设 M^n 是 de Sitter 空间 S_1^{n+1} 中的紧致类空超曲面. 假设存在某个整数 $r(1 \leqslant r \leqslant n-1)$，使得高阶平均曲率 H_r 在 M^n 上是非零常数. 如果 M^n 的高斯映照像包含在 H^{n+1} 中的一个开半球面内，则 M^n 是全脐超曲面.

1　预备知识

设 $\mathbb{R}^{n+2}$ 为$(n+2)$维实向量空间，给 $\mathbb{R}^{n+2}$ 赋予如下 Lorentz 度量：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n+2}$$

则得到$(n+2)$维 Lorentz 空间 L_1^{n+2}，其负指标为 1.

$(n+1)$维单位 de Sitter 空间 $S_1^{n+1} \subset L_1^{n+2}$ 定义为 $S_1^{n+1} = \{\boldsymbol{x} \in L_1^{n+2} : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1\}$. de Sitter 空间 S_1^{n+1} 是单连通的具有常截曲率为 1 的 Lorentz 空间形式. 设 M^n 是 S_1^{n+1} 的 n 维浸入超曲面，如果 M^n 的诱导度量是黎曼度量，则称 M^n 是 S_1^{n+1} 的一个类空超曲面.

设 ψ: $M^n \to S_1^{n+1} \subset L_1^{n+2}$ 是 de Sitter 空间 S_1^{n+1} 中紧致类空超曲面，M^n 的 Gauss 映照可以看做是映射 N: $M^n \to H^{n+1}$，其中 $H^{n+1} \subset L_1^{n+2}$ 是$(n+1)$维双曲空间，即 $H^{n+1} = \{\boldsymbol{x} \in L_1^{n+2} : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -1, x_0 \geqslant 1\}$. 像集 $N(M^n)$ 称为超曲面的双曲像. 特别地，de Sitter 空间中的紧致类空超曲面 M^n 是可定向的，M^n 有一个整体的类时单位法向量场 $\boldsymbol{N}$，并且我们说 M^n 的定向由 $\boldsymbol{N}$ 决定.

记 M^n 的主曲率为 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，则 M^n 的第 r 阶平均曲率 H_r 定义为

$$C_n^r H_r = (-1)^r \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_r} \qquad r = 1, 2, \cdots, n$$

其中 C_n^r 是通常的组合数，即 $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$. 这个定义与通常的定义相差一个因子$(-1)^r$，其目的是使得平均曲率向量 $\boldsymbol{H} = H_1 \boldsymbol{N}$. 我们规定

$$H_0 \equiv 1, \ H_{n+1} \equiv 0$$

因为高阶平均曲率是主曲率的基本对称函数的平均值，根据文献[10，引理 2]将有下列不等式：

$$H_i^2 \geqslant H_{i-1} H_{i+1} \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{1}$$

进一步，当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ 时，(1) 式中等号成立.

为了完成主要定理的证明，我们需要以下几个引理.

引理 1[9]　(Minkowski 积分公式)　设 M^n 是 de Sitter 空间 S_1^{n+1} 中的紧致类空超曲面，则有

$$\int_{M^n} (H_{k-1} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \rangle + H_k \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{p} \rangle) \mathrm{d}v = 0 \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{x} \in M^n$ 表示 M^n 上点在 L_1^{n+2} 中位置向量，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 L_1^{n+2} 的 Lorentz 内积，$\boldsymbol{p} \in L_1^{n+2}$ 是任意一个固定向量，$\mathrm{d}v$ 是 M^n 的 n 维黎曼体积元，$\boldsymbol{N}$ 表示 M^n 上任意选定的一个光滑单位法向量场.

引理 2[10]　设 M^n 是 de Sitter 空间 S_1^{n+1} 中的紧致类空超曲面，若对某个整数 $r(1 \leqslant r \leqslant n)$，高阶平均曲率 $H_r > 0$ 在 M^n 上处处成立，则可以适当选择 M^n 上的光滑法向量场，使得对一切 $k = 0, 1, \cdots, r$，必有 $H_k > 0$ 在 M^n 上也处处成立.

2　主要结果的证明

定理 5 的证明　任意选定一个类空向量 $\boldsymbol{a} \in L_1^{n+2}$，定义 M^n 关于 $\boldsymbol{a} \in L_1^{n+2}$ 的高度函数

$$h(x) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle, \ \boldsymbol{x} \in M^n$$

该函数在 M^n 上连续. 因为 M^n 是紧致的，故必有一点 $x_0 \in M^n$，使得 $h(x_0)$ 达到最大值，而在该点 $x_0 \in M^n$ 处，M^n 的全部主曲率都非负(适当选定单位法向量场 $\boldsymbol{N}$). 因此，在点 $x_0 \in M^n$ 处，有

$$H_r \geqslant 0$$

又由假设条件知 H_r 在 M^n 上处处非零，且 H_r 是连续的，可以适当选择 M^n 的单位法向量场 $\boldsymbol{N}$，使得

$$H_r > 0, \ \forall \boldsymbol{x} \in M^n$$

结合引理 2 可知，对 $k = 0, 1, \cdots, r$，有 $H_k > 0$ 在 M^n 上处处成立.

根据(1) 式有 $H_i^2 - H_{i-1} H_{i+1} \geqslant 0$，$i = 1, 2, \cdots, n-1$. 即有

$$\frac{H_1}{H_0} \geqslant \frac{H_2}{H_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{H_r}{H_{r-1}} \geqslant \frac{H_{r+1}}{H_r} \tag{3}$$

利用引理 1 的积分公式(2) 式有

$$\int_{M^n} (H_0 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \rangle + H_1 \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{p} \rangle) \mathrm{d}v = 0 \tag{4}$$

$$\int_{M^n} (H_r \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \rangle + H_{r+1} \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{p} \rangle) \mathrm{d}v = 0 \tag{5}$$

因为 H_r 是常数，给(4) 式等号两边同乘以 H_r 可得

$$\int_{M^n} (H_r \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \rangle + H_1 H_r \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{p} \rangle) \mathrm{d}v = 0 \tag{6}$$

用(6) 式减去(5) 式，立即得到

$$\int_{M^n} (H_1 H_r - H_{r+1}) \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{p} \rangle) \mathrm{d}v = 0 \tag{7}$$

从(3) 式可以得到 $H_1 H_r \geqslant H_{r+1}$，即

$$H_1 H_r - H_{r+1} \geqslant 0 \tag{8}$$

因为假设 M^n 的高斯映照像包含在 H^{n+1} 中的一个开半球面内，而且引理1的积分公式中的向量 $\boldsymbol{p} \in L_1^{n+2}$ 是可以任意取定的. 故可适当选定类时向量 $\boldsymbol{p} \in L_1^{n+2}$ 使得下式成立

$$\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{p} \rangle \leqslant -1 < 0 \tag{9}$$

至此，由(7)－(9) 式可得，在 M^n 上恒有

$$H_1 H_r - H_{r+1} \equiv 0$$

于是(3) 式中等号全部成立. 由(1) 式中等号成立的条件，证得 M^n 是全脐的.

参考文献：

[1] GODDARD A J. Some Remarks on the Existence of Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1977, 82(3): 489－495.

[2] AKUTAGAWA K. On Spacelike Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in the de Sitter Space [J]. Mathematische Zeitschrift, 1987, 196(1): 13－19.

[3] MONTIEL S. An Integral Inequality for Compact Space-Like Hypersurfaces in de Sitter Space and Applications to the Case of Constant Mean Curvature [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1988, 37(4): 909－917.

[4] ZHENG Yongfan. On Space-Like Hypersurfaces in the de Sitter Space [J]. Annals of Global Analysis and Geometry, 1995, 13(4): 317－321.

[5] LI Haizhong. Global Rigidity Theorems of Hypersurfaces [J]. Arkiv för Matematik, 1997, 35(2): 327－351.

[6] 沈学文. de Sitter 空间中的类空子流形的整体拼挤定理 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2004, 29(2): 186－188.

[7] CAMARGO F E C, CHAVES R M B, JR R M B. Rigidity Theorems for Complete Spacelike Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in de Sitter Space [J]. Differential Geometry and its Applications, 2008, 26(6): 592－599.

[8] ALEDO J A，ALÍAS L J，ROMERO A. Integral Formulas for Compact Space-Like Hypersurfaces in de Sitter Space: Applications to the Case of Constant Higher Order Mean Curvature [J]. Journal of Geometry and Physics，1999，31(2－3)：195－208.

[9] 李海中，陈维桓. de Sitter 空间中紧致类空超曲面的积分公式及其 Goddard 猜想的应用 [J]. 数学学报，1998，41(4)：807－810.

[10] 王　琪. de Sitter 空间中紧致类空超曲面的全脐性与高阶平均曲率 [J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2016，40(1)：7－10.

[11] ALENCAR H，ROSENBERG H，SANTOS W. On the Gauss Map of Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in Spheres [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，2004，132(12)：3731－3739.

[12] 王　琪. 双曲空间中全脐超曲面与高斯映照像 [J]. 浙江大学学报(理学版)，2016，43(5)：537－549.

On Totally Umbilical Hypersurfaces of the de Sitter Space and the Gauss Image

WEN Hai-yan

College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract: The totally umbilical property of compact space-like hypersurface M^n in de Sitter space has been studied. By using a known Minkowski integral formula，under the condition that there exists an integer $r(1\leqslant r\leqslant n-1)$ such that the higher order mean curvature H_r is nonzero constant everywhere，it is proved that M^n is totally umbilical if the Gauss image of M^n is contained in an open hemisphere.

Key words: de Sitter space; totally umbilical hypersurfaces; the Gauss image; higher order mean curvature

责任编辑　胡　杨