DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.11.001

两两独立随机变量序列的完全收敛性[①]

张水利，　屈　聪，　孙　帆

平顶山学院 数学与统计学院，河南 平顶山 467000

摘要： 讨论了两两独立随机变量序列的完全收敛性. 利用矩不等式和截尾方法，在更一般的条件下，得到了两两独立随机变量序列完全收敛的一些充分条件，部分结果深化并推广了已有的相关结果.

关 键 词： 两两独立随机变量；完全收敛性；弱随机控制

中图分类号： O211.4　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2017)11-0001-08

完全收敛性的概念是 Hsu 和 Robbins[1] 引入的.

定义 1　设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量序列，C 是常数. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$，都有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - C| > \varepsilon) < \infty$$

则称随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 完全收敛于常数 C.

Hsu 和 Robbins[1] 证明了当方差有限时，独立同分布随机变量序列的样本均值完全收敛到总体均值，Erdös[2] 证明了他们的逆定理.

引理 1[1-2]　设 $\{X, X_n, n \geqslant 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E(X) = 0$，令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$n \geqslant 1$，则下列两个条件等价

1) $E(X^2) < \infty$；

2) 对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| > \varepsilon n) < \infty$$

自从 Hsu 和 Robbins 提出完全收敛性的概念以来，许多学者对非独立同分布的随机变量序列的完全收敛性进行了大量的研究，得到了一些非常深刻的结果[3-12].

本文用 C 表示正常数，在不同的地方可以表示不同的值，$I(A)$ 表示集合 A 的示性函数.

引理 2[11]　设 $1 \leqslant p \leqslant 2$，$\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是两两独立的随机变量序列，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E|X_n|^p < \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \sup_{n \geqslant 1} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E|X_k| I(|X_k| > x) = 0$$

① 收稿日期：2015-10-07
基金项目：国家自然科学基金项目(11471104)；平顶山学院高层次人才科研启动基金项目(PXY-BSQD2016006).
作者简介：张水利(1982-)，男，河南驻马店人，副教授，博士，主要从事极限理论研究.

则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\Big(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\Big|\sum_{k=1}^{m}(X_k-EX_k)\Big|>\varepsilon n\Big)<\infty$$

Gut[13] 给出了弱随机控制的概念.

定义 2 设$\{X, X_n, n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量序列，如果存在常数$C>0$，对任意的$x>0$，$n\geqslant 1$，都有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(|X_k|>x)\leqslant CP(|X|>x)$$

成立，则称随机变量序列$\{X_n, n\geqslant 1\}$被随机变量 X 弱随机控制，记为 $X_n\prec X$.

本文的主要结果为：

定理 1 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是两两独立随机变量序列，且 $X_n\prec X$，$0<p\leqslant 2$，$\{a_n, n\geqslant 1\}$和$\{b_n, n\geqslant 1\}$是两个正的常数序列，且满足

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{nb_n}{a_n^2}=O(a_k^{p-2}) \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{k} nb_n=O(a_k^p) \tag{2}$$

$$nP(|X|>a_n)\to 0 \tag{3}$$

如果 $E|X|^p<\infty$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n P\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_kI(|X_k|\leqslant a_n))\Big|>a_n\varepsilon\Big)<\infty \tag{4}$$

注 1 由定理 1 的证明过程知，可以用$\dfrac{a_n^p}{n}\uparrow$ 替换条件(3).

在 $E|X|^p<\infty$ 的条件下，取 $a_n=n^{\frac{1}{p}}$，$b_n=\dfrac{1}{n}$，则定理 1 中的条件(1)-(3) 均成立. 因此可以得到如下推论.

推论 1 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是两两独立随机变量序列，且 $X_n\prec X$，$0<p\leqslant 2$，如果 $E|X|^p<\infty$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_kI(|X_k|\leqslant n^{\frac{1}{p}}))\Big|>n^{\frac{1}{p}}\varepsilon\Big)<\infty$$

定理 2 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是两两独立的随机变量序列，$1\leqslant p\leqslant 2$，$\{a_n, n\geqslant 1\}$是正的常数序列，且 $a_n\uparrow\infty$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n^{-1-p}(\log n)^2=O(a_n^{-p}),\ \forall k\geqslant 1 \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-p}E|X_n|^p<\infty \tag{6}$$

则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} P\Big(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\Big|\sum_{k=1}^{m}(X_k-EX_k)\Big|>a_n\varepsilon\Big)<\infty \tag{7}$$

在定理 2 中取 $a_n=n$，则(5) 式恒成立. 由定理 2，可以得到下面推论.

推论 2 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是两两独立的随机变量序列，$1\leqslant p\leqslant 2$，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}E|X_n|^p<\infty \tag{8}$$

则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\Big(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\Big|\sum_{k=1}^{m}(X_k-EX_k)\Big|>n\varepsilon\Big)<\infty$$

进一步，有

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)\to 0,\ a.\ s..$$

定理 3　设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是两两独立的随机变量序列，$1\leqslant p\leqslant 2$，$\{a_n,n\geqslant 1\}$是正的常数序列，且$a_n\uparrow\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n^{-3}(\log n)^2<\infty \tag{9}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}a_n^{-p}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|I(|X_k|>x)=0 \tag{10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-p}E|X_n|^p<\infty \tag{11}$$

则对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-EX_k)\right|>a_n\varepsilon\right)<\infty \tag{12}$$

进一步，有

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)\to 0,\ a.\ s.$$

注 2　由于(9)式对$a_n=n$恒成立，因此引理 2 是定理 3 的一个特例(特别取$a_n\equiv n$)，本文的相关结果更具有一般化，是对已有结果的推广.

注 3　本文中的定理 1 是在一般条件下得到了两两独立随机变量序列完全收敛性的充分条件，只需要$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足条件(1)－(3)，由p阶矩可以得到一般形式的完全收敛性.

为了证明主要结果，给出一些引理.

引理 3[13]　设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是一个随机变量序列，且$X_n\prec X$，$p>0$，如果$E|X|^p<\infty$，则对任意的$t>0$和$n\geqslant 1$，都有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^p\leqslant CE|X|^p$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^pI(|X_k|\leqslant t)\leqslant C[E|X|^pI(|X|\leqslant t)+t^pP(|X|>t)]$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^pI(|X_k|>t)\leqslant CE|X|^pI(|X|>t)$$

引理 4[10]　设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是两两独立的随机变量序列，$1\leqslant p\leqslant 2$，如果

$$E|X_n|^p<\infty,\ \forall n\geqslant 1$$

则存在常数c_p，使得

$$E\left[\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}X_k\right|^p\right]\leqslant c_p(\log n)^p\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^p$$

引理 5　设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是两两独立的随机变量序列，$1\leqslant p\leqslant 2$，$\{a_n,n\geqslant 1\}$是一个常数序列，$a_n\uparrow\infty$，且满足

$$\sum_{n=k}^{\infty}a_n^{-1-p}=O(a_k^{-p})\qquad\forall k\geqslant 1 \tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-p}E|X_n|^p<\infty \tag{14}$$

则对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)\right|>a_n\varepsilon\right)<\infty$$

证 由 Kronecker 引理以及(14)式,可知

$$a_n^{-p}\sum_{k=1}^{n}E\mid X_k\mid^p\to 0$$

因此对任意固定的 $\varepsilon>0$,足够大的 n,有

$$\begin{aligned}&a_n^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n}EX_kI(\mid X_k\mid>a_n)\right|\leqslant\\&a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}E\mid X_k\mid I(\mid X_k\mid>a_n)\leqslant\\&a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_n^{1-p}E\mid X_k\mid^pI(\mid X_k\mid>a_n)\leqslant\\&a_n^{-p}\sum_{k=1}^{n}E\mid X_k\mid^p\leqslant\\&\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\tag{15}$$

由(13),(15)式以及 Markov 不等式

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)\right|>a_n\varepsilon\right)\leqslant\\&\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}P(\mid X_k\mid>a_n)+\\&\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(X_kI(\mid X_k\mid\leqslant a_n)-EX_kI(\mid X_k\mid\leqslant a_n))\right|>\frac{a_n\varepsilon}{2}\right)\leqslant\\&\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_n^{-p}E\mid X_k\mid^p+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}a_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}E(X_kI(\mid X_k\mid\leqslant a_n)-EX_kI(\mid X_k\mid\leqslant a_n))^2\leqslant\\&\sum_{k=1}^{\infty}E\mid X_k\mid^p\sum_{n=k}^{\infty}a_n^{-1-p}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-3}\sum_{k=1}^{n}EX_k^2I(\mid X_k\mid\leqslant a_n)\leqslant\\&C\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{-p}E\mid X_k\mid^p+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-3}\sum_{k=1}^{n}a_n^{2-p}E\mid X_k\mid^pI(\mid X_k\mid\leqslant a_n)\leqslant\\&C\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{-p}E\mid X_k\mid^p+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1-p}\sum_{k=1}^{n}E\mid X_k\mid^pI(\mid X_k\mid\leqslant a_n)\leqslant\\&C\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{-p}E\mid X_k\mid^p<\infty\end{aligned}$$

定理 1 的证明 对任意的 $n\geqslant 1$,$1\leqslant i\leqslant n$,令

$$Y_{in}=-a_nI(X_i\leqslant -a_n)+X_iI(\mid X_i\mid\leqslant a_n)+a_nI(X_i>a_n)$$
$$Z_{in}=X_i-EX_iI(\mid X_i\mid\leqslant a_n)$$
$$Z'_{in}=X_iI(\mid X_i\mid\leqslant a_n)-EX_iI(\mid X_i\mid\leqslant a_n)$$

由 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(\mid X_k\mid>x)\leqslant CP(\mid X\mid>x)$,知

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}b_nP\left(\left|\sum_{k=1}^{n}[X_k-EX_kI(\mid X_k\mid\leqslant a_n)]\right|>a_n\varepsilon\right)\leqslant\\&\sum_{n=1}^{\infty}b_nP\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{\mid X_k\mid>a_n\}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_nP\left(\left|\sum_{k=1}^{n}Z_{kn}\right|>a_n\varepsilon,\ \bigcap_{k=1}^{n}\{\mid X_k\mid\leqslant a_n\}\right)\leqslant\\&\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sum_{k=1}^{n}P(\mid X_k\mid>a_n)+\sum_{n=1}^{\infty}b_nP\left(\left|\sum_{k=1}^{n}Z'_{kn}\right|>a_n\varepsilon,\ \bigcap_{k=1}^{n}\{\mid X_k\mid\leqslant a_n\}\right)\leqslant\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n n P(|X| > a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}[Y_{kn} - E X_k I(|X_k| \leqslant a_n)]\right| > a_n \varepsilon\right) \triangleq$$
$$I_1 + I_2$$

下面分别证明 $I_1 < \infty$ 和 $I_2 < \infty$.

由条件(2) 以及 $E|X|^p < \infty$

$$\begin{aligned} I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\ P(|X| > a_n) \leqslant \\ C\sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sum_{k=n}^{\infty} P(a_k < |X| \leqslant a_{k+1}) \leqslant \\ C\sum_{k=1}^{\infty} P(a_k < |X| \leqslant a_{k+1}) \sum_{n=1}^{k} n b_n \leqslant \\ C\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p P(a_k < |X| \leqslant a_{k+1}) \leqslant \\ CE|X|^p < \infty \end{aligned} \tag{16}$$

注意到，当 $n \to \infty$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(P(X_k > a_n) - P(X_k < -a_n))\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > a_n) \leqslant CnP(|X| > a_n) \to 0$$

因此对所有足够大的 n，有

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}[Y_{kn} - E X_k I(|X_k| \leqslant a_n)]\right| > a_n\varepsilon\right) \leqslant P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}[Y_{kn} - E Y_{kn}]\right| > \frac{a_n\varepsilon}{2}\right)$$

由 Markov 不等式

$$\begin{aligned} I_2 \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} b_n P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}[Y_{in} - EY_{in}]\right| > \frac{a_n\varepsilon}{2}\right) \leqslant \\ C\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^{-2} E\left(\sum_{i=1}^{n} |Y_{in} - E Y_{in}|\right)^2 \leqslant \\ C\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^{-2} \sum_{i=1}^{n} E(Y_{in} - E Y_{in})^2 \leqslant \\ C\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^{-2} \sum_{i=1}^{n} EY_{in}^2 = \\ C\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^{-2} \sum_{i=1}^{n} [EX_i^2 I(|X_i| \leqslant a_n) + a_n^2 P(|X_i| > a_n)] = \\ C\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^{-2} \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 I(|X_i| \leqslant a_n) + C\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > a_n) \triangleq \\ I_{21} + I_{22} \end{aligned}$$

类似于(16) 式，可以证明 $I_{22} < \infty$. 由(1),(16) 式以及引理 3

$$\begin{aligned} I_{21} = C\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^{-2} \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 I(|X_i| \leqslant a_n) \leqslant \\ C\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^{-2}(nE X^2 I(|X| \leqslant a_n) + n a_n^2 P(|X| > a_n)) = \\ C\sum_{n=1}^{\infty} n b_n a_n^{-2} EX^2 I(|X| \leqslant a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n P(|X| > a_n) \leqslant \\ C\sum_{n=1}^{\infty} n b_n a_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} EX^2 I(a_{k-1} < |X| \leqslant a_k) + C_1 \leqslant \end{aligned}$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}EX^2I(a_{k-1}<|X|\leqslant a_k)\sum_{n=k}^{\infty}nb_na_n^{-2}+C_1\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{2-p}E|X|^pI(a_{k-1}<|X|\leqslant a_k)\sum_{n=k}^{\infty}nb_na_n^{-2}+C_1\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}E|X|^pI(a_{k-1}<|X|\leqslant a_k)+C_1\leqslant$$

$$CE|X|^p+C_1<\infty$$

定理证毕.

定理 2 的证明 由条件$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-p}E|X_n|^p<\infty$，类似于(15)式，我们有

$$a_n^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n}EX_kI(|X_k|>a_n)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4} \tag{17}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-EX_k)\right|>a_n\varepsilon\right)\leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_kI(|X_k|\leqslant a_n)-EX_kI(|X_k|\leqslant a_n))\right|>\frac{a_n\varepsilon}{4}\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_kI(|X_k|>a_n)-EX_kI(|X_k|>a_n))\right|>\frac{3a_n\varepsilon}{4}\right)\triangleq$$

$$J_1+J_2$$

为了证明定理 2 的结论，只需要证明 $J_1<\infty$ 和 $J_2<\infty$.

由 Markov 不等式以及引理 4

$$J_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_kI(|X_k|\leqslant a_n)-EX_kI(|X_k\leqslant a_n))\right|>\frac{a_n\varepsilon}{4}\right)\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}a_n^{-2}E\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_kI(|X_k|\leqslant a_n)-EX_kI(|X_k|\leqslant a_n))\right|\right)^2\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-3}(\log n)^2\sum_{k=1}^{n}EX_k^2I(|X_k|\leqslant a_n)\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-3}(\log n)^2\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^pa_n^{2-p}I(|X_k|\leqslant a_n)=$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1-p}(\log n)^2\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^pI(|X_k|\leqslant a_n)\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}E|X_k|^p\sum_{n=k}^{\infty}a_n^{-1-p}(\log n)^2\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{-p}E|X_k|^p<\infty$$

由(17)式及引理 5 可知，

$$J_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_kI(|X_k|>a_n)-EX_kI(|X_k|>a_n))\right|>\frac{3a_n\varepsilon}{4}\right)\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}X_kI(|X_k|>a_n)\right|>\frac{a_n\varepsilon}{2}\right)\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\sum_{k=1}^{n}|X_k|I(|X_k|>a_n)>\frac{a_n\varepsilon}{2}\right)\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(|X_k|I(|X_k|>a_n)-E|X_k|I(|X_k|>a_n))\right|>\frac{a_n\varepsilon}{4}\right)<\infty$$

定理证毕.

定理 3 的证明 由条件$\lim\limits_{x\to\infty}\sup\limits_{n\geqslant 1}a_n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}E|X_k|I(|X_k|>x)=0$，则对任意的$\varepsilon>0$，存在$x=x(\varepsilon)>0$，使得

$$a_n^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n}EX_kI(|X_k|>x)\right|\leqslant a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|I(|X_k|>x)\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\qquad\forall n\geqslant 1\tag{18}$$

而

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-EX_k)\right|>a_n\varepsilon\right)\leqslant\\&\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_kI(|X_k|\leqslant x)-EX_kI(|X_k|\leqslant x))\right|>\frac{a_n\varepsilon}{4}\right)+\\&\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_kI(|X_k|>x)-EX_kI(|X_k|>x))\right|>\frac{3a_n\varepsilon}{4}\right)\triangleq\\&H_1+H_2\end{aligned}$$

为了证明定理 3 的结论，只需要证明 $H_1<\infty$ 和 $H_2<\infty$.

由(9) 式 Markov 不等式以及引理 4

$$\begin{aligned}H_1=&\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}X_kI(|X_k|\leqslant x)-EX_kI(|X_k|\leqslant x))\right|>\frac{a_n\varepsilon}{4}\right)\leqslant\\&C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}a_n^{-2}E\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_kI(|X_k|\leqslant x)-EX_kI(|X_k|\leqslant x))\right|\right)^2\leqslant\\&C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-3}(\log n)^2\sum_{k=1}^{n}EX_k^2I(|X_k|\leqslant x)\leqslant\\&C\sum_{n=1}^{\infty}na_n^{-3}(\log n)^2<\infty\end{aligned}$$

由(18) 式及引理 5 可知，

$$\begin{aligned}H_2=&\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_kI(|X_k|>x)-EX_kI(|X_k|>x))\right|>\frac{3a_n\varepsilon}{4}\right)\leqslant\\&C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}X_kI(|X_k|>x)\right|>\frac{a_n\varepsilon}{2}\right)\leqslant\\&C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\sum_{k=1}^{n}|X_k|I(|X_k|>x)>\frac{a_n\varepsilon}{2}\right)\leqslant\\&C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(|X_k|I(|X_k|>x)-E|X_k|I(|X_k|>x))\right|>\frac{a_n\varepsilon}{4}\right)<\infty\end{aligned}$$

定理证毕.

参考文献：

[1] HSU P L，ROBBINS H. Complete Convergence and the Law of Large Number [J]. Proc Natl Acad Sci USA，1947，33(2)：25－31.

[2] ERDÖS P. On a Theorem of Hsu and Robbins [J]. Ann Math Statist，1949，20：286－291.

[3] 邱德华，陈平炎，段振华. $\tilde{\rho}$ 混合随机变量序列加权和的完全收敛性 [J]. 应用数学学报，2015，38(1)：150－165.

[4] 邱德华. $\tilde{\rho}$ 混合随机变量阵列加权和的完全收敛性 [J]. 数学学报，2014，57(1)：151－162.

[5] 李 炜，陈平炎. NA 序列 Stout 型加权和的完全收敛性 [J]. 应用数学，2015，28(2)：260－264.

[6] 兰冲锋，吴群英. NA序列部分之和的完全收敛性探讨[J]. 统计与决策，2013，14：9－11.
[7] 郭明乐，祝东进. NOD随机变量序列加权和的矩完全收敛性的等价条件[J]. 系统科学与数学，2013，33(9)：1093－1104.
[8] 郭明乐，祝东进，吴永锋. 行为负相依随机变量阵列加权和的 q 阶矩完全收敛性[J]. 系统科学与数学，2014，34(8)：969－984.
[9] 吴永锋. 两两NQD列的 L_p 收敛性和矩完全收敛性[J]. 数学物理学报，2013，33A(5)：850－859.
[10] CHEN P Y，BAI P，SUNG S H. The Von Bahr-Esseen Moment Inequality for Pairwise Independent Random Variables and Applications [J]. Jour Math Ana Appl，2014，419：1290－1302.
[11] BAI P，CHEN PY，SUNG S H. On Complete Convergence and the Strong Laws of Large Numbers for Pairwise Independent Random [J]. Acta Math Hunger，2014，142(2)：502－518.
[12] 陈平炎. 两两独立同分布序列Cesàro强大数定律的收敛速度[J]. 数学学报，2006，49(5)：1061－1066.
[13] GUT A. Complete Convergence for Arrays [J]. Period Math Hungar，1992，25：51－75.

On Complete Convergence for Pairwise Independent Random Variables

ZHANG Shui-li， QU Cong， SUN Fan

Department of Mathematics and Statistics，Pingdingshan University，Pingdingshan，Henan 467000，China

Abstract：In this paper，the complete convergence has been studied for pairwise independent random variables，under more general conditions，obtained some sufficient conditions of complete convergence for pairwise independent random variables，by using the moment inequality and truncated method，part of those results generalize and extend well-known results.

Key words：pairwise independent random variables；complete convergence；weak stochastically dominate

责任编辑 张 枸