第 42 卷　第 11 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2017 年 11 月
Vol. 42　No. 11　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Nov.　2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.11.002

含 Hénon 临界指数的半线性椭圆边值问题解的存在性①

王奇峰，　邓志颖

重庆邮电大学 理学院 400065

摘要：讨论一类具有 Hénon 临界指数的半线性椭圆边值问题，用变分法和一些分析技巧证明了在适当条件下方程解的存在性结果.

关　键　词：正解；Hénon 临界指数；变分法

中图分类号：**O175.25**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000-5471(2017)11-0009-06

考察以下具有 Hénon 临界指数[1] 的半线性椭圆边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^{\alpha}|u|^{2^*(\alpha)-2}u + f(x, u) & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中：Ω 是 $\mathbb{R}^N(N \geqslant 3)$ 中包含原点的有界光滑区域，$\alpha > 0$，$2^*(\alpha) = \dfrac{2N+2\alpha}{N-2}$ 为 Hénon 临界指数，$2^* = 2^*(0)$ 是 Sobolev 临界指数，$f(x, u)$ 是满足适当条件的 Caratheodory 函数.

形如问题(1) 的这类方程是由 Hénon[2] 在研究旋转恒星结构时得到的 Dirichlet 边界方程

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^{\alpha}u^{p-1} & x \in \Omega \\ u > 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

并称之为 Hénon 方程. 近年来关于 Hénon 方程的研究有很多，一方面 Ni[3] 率先证明了在径向对称的函数空间中，当 $p \in (2, 2^*(\alpha))$ 时问题(2) 至少存在一个径向对称的正解，另一方面 Smets 等[4] 证明了当 $p \in (2, 2^*)$ 且 α 充分大时，方程的基态解是非径向解. 此外，通过对 Hénon 方程添加适当扰动，龙薇[5]、朱红波[6] 等得到了相应方程正解及基态解的存在性结果.

然而，当 $p = 2^*(\alpha)$ 时，即含有 Hénon 临界指数的研究却很少，由于 Hénon 临界指数的存在，嵌入 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*(\alpha)}(\Omega, |x|^{\alpha}\mathrm{d}x)$ 失去紧性，其中 $L^{2^*(\alpha)}(\Omega, |x|^{\alpha}\mathrm{d}x)$ 是加权函数空间，但存在连续嵌入，Gladiali，Grossi 和 Neves[7] 通过有效的变量变换，获得全域 $\mathbb{R}^N$ 上的一个嵌入结论并得到相应极值函数的达到函数. 我们主要通过借鉴 Ding 和 Tang[8] 的方法，获得能量泛函满足局部(PS) 条件[9] 的限制，考察问题(1) 满足一定条件下正解的存在性与多解性结论. 本文的主要结果有：

定理 1　假设 $N \geqslant 3$，若 f 满足以下条件

(f_1) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$，当 $t \to 0^+$ 时 $f(x, t) = o(t)$，当 $t \to +\infty$ 时 $f(x, t) = o(t^{2^*-1})$，对 $x \in \overline{\Omega}$ 一致成立，

① 收稿日期：2015-11-12
基金项目：重庆市教委科研基金项目(KJ130503)；国家自然科学基金面上项目(11471235).
作者简介：王奇峰(1991-)，男，湖北黄石人，硕士，主要从事非线性椭圆边值问题研究.
通信作者：邓志颖，副教授，硕士研究生导师.

(f_2) 存在 ρ，$\rho > 2$，使得$\liminf\limits_{t \to 0^+} \dfrac{F(x, t)}{t^\rho} > 0$，$0 < \rho F(x, t) \leqslant f(x, t)t$，对任意 $x \in \overline{\Omega}$，$t \in \mathbb{R}^+ \{0\}$ 成立.

其中 $F(x, u) = \int_0^u f(x, t)\mathrm{d}t$，假定

$$\rho > \max\left\{2, \frac{N}{N-2}, \frac{4}{N-2}\right\} \tag{3}$$

则对给定的 $\alpha > 0$，问题(1) 至少存在一个正解.

定理 2 假设 $N \geqslant 3$，若 f 满足以下条件：

(f_3) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$，当 $|t| \to 0$ 时 $f(x, t) = o(t)$，当 $|t| \to +\infty$ 时 $f(x, t) = o(t^{2^*-1})$，对 $x \in \overline{\Omega}$ 一致成立，

(f_4) 存在 ρ，$\rho > 2$，使得$\liminf\limits_{|t| \to 0} \dfrac{F(x, t)}{t^\rho} > 0$，$0 < \rho F(x, t) \leqslant f(x, t)t$ 对任意 $x \in \overline{\Omega}$，$t \in \mathbb{R}$ 成立.

假定(3) 式成立，则对给定的 $\alpha > 0$，问题(1) 至少有两个非平凡解.

1 预备知识

在下述讨论中，用 $H_0^1(\Omega)$ 表示通常的 Sobolev 函数空间，赋以范数 $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$，$(H_0^1(\Omega))^*$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 的共轭空间，定义 $L^p(\Omega)$ 中范数为 $|u|_p = (\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$. 由文献[7] 可定义嵌入 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*(\alpha)}(\Omega, |x|^\alpha \mathrm{d}x)$ 的最佳常数

$$S(\alpha) = \inf_{0 \neq u \in D^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u|^{\frac{2N+2\alpha}{N-2}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{N-2}{N+\alpha}}}$$

并当 $\Omega = \mathbb{R}^N$ 时，$S(\alpha)$ 由函数

$$\widetilde{U}_\varepsilon = \frac{[(N+\alpha)(N-2)]^{\frac{N-2}{2(2+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{N-2}{2(2+\alpha)}}}{(\varepsilon + |x|^{2+\alpha})^{\frac{N-2}{2+\alpha}}}$$

达到，故定义

$$U_\varepsilon = \frac{\widetilde{U}_\varepsilon}{[(N+\alpha)(N-2)]^{\frac{N-2}{2(2+\alpha)}}} = \frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2(2+\alpha)}}}{(\varepsilon + |x|^{2+\alpha})^{\frac{N-2}{2+\alpha}}}, U(x) = \frac{1}{(1 + |x|^{2+\alpha})^{\frac{N-2}{2+\alpha}}}$$

从而 $U(x)$ 是 $S(\alpha)$ 的达到函数，即

$$S(\alpha) = \frac{\int_\Omega |\nabla U|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |U|^{\frac{2N+2\alpha}{N-2}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{N-2}{N+\alpha}}} \tag{4}$$

定义截断函数 $\eta(x) \in C_0^\infty(\Omega)$，满足条件当 $|x| \leqslant R$ 时，$\eta(x) = 1$；当 $|x| \geqslant 2R$ 时，$\eta(x) = 0$，并有 $B_{2R}(0) \subset \Omega$，$0 \leqslant \eta(0) \leqslant 1$，对任意 $x \in \mathbb{R}^N$ 有 $|\nabla \eta| \leqslant C$，令

$$u_\varepsilon = \eta(x) U_\varepsilon(x), \quad v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon(x)}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u_\varepsilon|^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*(\alpha)}}} \tag{5}$$

则$\int_\Omega |x|^\alpha v_\varepsilon^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x = 1$，类似 Brezis 和 Nirenberg[10] 的方法，得到相应估计：

$$\int_\Omega |x|^\alpha |u_\varepsilon|^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |U|^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x + O(\varepsilon^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}) \tag{6}$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 \mathrm{d}x + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}}) \tag{7}$$

$$\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^{q} \mathrm{d}x = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{q(N-2)}{2(2+\alpha)}}),\ 1 \leqslant q < \dfrac{N}{N-2} \\ O(\varepsilon^{\frac{q(N-2)}{2(2+\alpha)}} |\ln\varepsilon|),\ q = \dfrac{N}{N-2} = \dfrac{2^*}{2} \\ O(\varepsilon^{\frac{2N-q(N-2)}{2(2+\alpha)}}),\ \dfrac{N}{N-2} < q < 2^* \end{cases} \tag{8}$$

若无特别说明 $C, C_1, C_2 \cdots$ 均表示正常数. 用"$\to$"和"$\rightharpoonup$"分别表示相应Banach空间中的强收敛和弱收敛. $o(1)$ 表示当 $n \to \infty$ 时的无穷小量，$O(1)$ 表示当 $n \to \infty$ 时的有界量. $B_r(0)$ 表示以原点为圆心，半径为 r 的开球，$u^{\pm} = \max\{\pm u(x), 0\}$.

2 主要结果的证明

由于定理 1 寻求问题(1) 的正解，因而假定当 $x \in \Omega$，$t \leqslant 0$ 时，$f(x, t) = 0$. 此时问题(1) 所对应的能量泛函记为

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2^*(\alpha)}\int_{\Omega} |x|^{\alpha}(u^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \int_{\Omega} F(x, u) \mathrm{d}x \tag{9}$$

容易验证 $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$，从而问题(1) 的弱解与 $I(u)$ 的临界点一一对应，从而若 $u \in H_0^1(\Omega)$ 是方程的非平凡解，当且仅当对任意的 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$，都有：

$$\langle I'(u), \varphi\rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x - \int_{\Omega} |x|^{\alpha}(u^+)^{2^*(\alpha)-1}\varphi \mathrm{d}x - \int_{\Omega} f(x, u)\varphi \mathrm{d}x = 0 \tag{10}$$

引理 1 对给定的 $\alpha > 0$，若 f 满足(f_1) 和(f_2)，则 $I(u)$ 满足$(\mathrm{PS})_c$ 紧性条件，其中

$$c \in \left(0, \frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)} S(\alpha)^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}\right) \tag{11}$$

证 假定$\{u_n\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的(PS) 序列，即当 $n \to \infty$ 时

$$I(u_n) \to c,\ I'(u_n) \to 0 \tag{12}$$

易知$\{u_n\}$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 中的有界序列，则存在$\{u_n\}$ 的收敛子列仍记作$\{u_n\}$ 和 $u \in H_0^1(\Omega)$. 由嵌入定理知，$u_n \rightharpoonup u$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中，$u_n \to u$ 在 $L^p(\Omega)$ 中 $1 < p < 2^*$. 由连续嵌入知，存在正常数 C_α 满足 $|u_n|_{2^*}^{2^*} \leqslant C_\alpha < \infty$. 根据$(f_1)$，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $C(\varepsilon) > 0$，满足当$(x, t) \in \overline{\Omega} \times (0, +\infty)$ 时

$$|f(x, t)t| \leqslant C(\varepsilon) + \frac{1}{2C_\alpha}\varepsilon t^{2^*}$$

取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2C(\varepsilon)}$，当 $E \subset \Omega$，$\mathrm{mes}E < \delta$ 时，

$$\left|\int_E f(x, u_n)u_n \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x, u_n)u_n| \mathrm{d}x \leqslant \int_E C(\varepsilon)\mathrm{d}x + \frac{1}{2C_\alpha}\varepsilon\int_E |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x \leqslant C(\varepsilon)\mathrm{mes}E + \frac{1}{2C_\alpha}\varepsilon C_\alpha < \varepsilon$$

因此$\left\{\int_E f(x, u_n)u_n \mathrm{d}x,\ n \in N\right\}$是等度绝对连续的，由 Vitali 收敛定理[11] 知，当 $n \to \infty$ 时

$$\int_{\Omega} f(x, u_n)u_n \mathrm{d}x \to \int_{\Omega} f(x, u)u \mathrm{d}x,\ \int_{\Omega} F(x, u_n)\mathrm{d}x \to \int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x \tag{13}$$

令 $v_n = u_n - u$，根据 Brezis-Lieb 引理[9] 知

$$\|v_n\|^2 = \|u_n\|^2 - \|u\|^2 + o(1)$$

$$\int_{\Omega} |x|^{\alpha}(v_n^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x = \int_{\Omega} |x|^{\alpha}(u_n^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \int_{\Omega} |x|^{\alpha}(u^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x + o(1)$$

结合(9),(10) 和(13) 式知

$$\|v_n\|^2 + \|u\|^2 - \int_{\Omega} |x|^{\alpha}(v_n^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \int_{\Omega} |x|^{\alpha}(u^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \int_{\Omega} f(x, u)u \mathrm{d}x = o(1) \tag{14}$$

$$\|v_n\|^2 - \int_{\Omega} |x|^{\alpha}(v_n^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x = o(1) \tag{15}$$

另一方面

$$I(u)-\frac{1}{2}\langle I'(u),\ u\rangle=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(\alpha)}\right)\int_\Omega |x|^\alpha |u|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[\frac{1}{2}f(x,\ u)u-F(x,\ u)\right]\mathrm{d}x$$

结合(f_2)可知

$$I(u)\geqslant 0 \tag{16}$$

又由(12)和(14)式知

$$I(u_n)=I(u)+\frac{1}{2}\|v_n\|^2-\frac{1}{2^*(\alpha)}\int_\Omega |x|^\alpha (v_n^+)^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x+o(1)=c+o(1)$$

以下证明当 $n\to\infty$ 时, $\|v_n\|^2\to 0$. 若存在收敛子列, 仍记作$\{v_n\}$, 由(15)式知

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2=l>0,\ \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |x|^\alpha (v_n^+)^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x=l$$

由最佳常数 $S(\alpha)$ 的定义知 $l\geqslant S(\alpha)l^{\frac{2}{2^*(\alpha)}}$, 从而要么 $l=0$, 要么 $l\geqslant S(\alpha)^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$, 从而

$$I(u)=c-\frac{1}{2}l+\frac{1}{2^*(\alpha)}l\leqslant c-\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S(\alpha)^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}<0$$

这与(16)式相矛盾, 因而当 $n\to\infty$ 时, $u_n\to u$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中.

引理 2 假定(f_1)和(f_2)成立, 并满足(3)式, 则存在 $u_*\in H_0^1(\Omega)$, $u_*\not\equiv 0$ 使得

$$\sup_{t\geqslant 0}I(tu_*)<\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S(\alpha)^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$$

证 结合 v_ε 的定义(5)给出以下定义

$$g(t)=I(tv_\varepsilon)=\frac{t^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2-\frac{t^{2^*(\alpha)}}{2^*(\alpha)}-\int_\Omega F(x,\ tv_\varepsilon)\mathrm{d}x,\ \widetilde{g}(t)=\frac{t^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2-\frac{t^{2^*(\alpha)}}{2^*(\alpha)}$$

由 $g(t)$ 知, $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=-\infty$, $g(0)=0$; 当 $t\to 0^+$ 时, $g(t)>0$, 因此 $g(t)$ 在某个 $t=t_\varepsilon\geqslant 0$ 处达到其上确界$\sup\limits_{t\geqslant 0}I(tv_\varepsilon)=\sup\limits_{t\geqslant 0}g(t)=I(t_\varepsilon v_\varepsilon)$. 若 $t_\varepsilon=0$, 则

$$\sup_{t\geqslant 0}I(tv_\varepsilon)=I(t_\varepsilon v_\varepsilon)=I(0)=0<\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S(\alpha)^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$$

即结论成立. 另一方面设 $t_\varepsilon>0$ 由 $g'(t_\varepsilon)=0$ 知

$$\|v_\varepsilon\|^2=t_\varepsilon^{2^*(\alpha)-2}+\frac{1}{t_\varepsilon}\int_\Omega f(x,\ t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon\mathrm{d}x\geqslant t_\varepsilon^{2^*(\alpha)-2} \tag{17}$$

令 $X_\varepsilon=\|v_\varepsilon\|^2$, 则 $X_\varepsilon\geqslant t_\varepsilon^{2^*(\alpha)-2}$, 即 $t_\varepsilon\leqslant X_\varepsilon^{\frac{1}{2^*(\alpha)-2}}$. 由($f_1$)可知, 对任意 $\mu>0$ 及正常数 $C(\mu)$, 有 $|f(x,\ t)|\leqslant\mu t^{2^*-1}+C(\mu)t$, 结合(17)式知

$$\|v_\varepsilon\|^2\leqslant t_\varepsilon^{2^*(\alpha)-2}+\mu\int_\Omega t_\varepsilon^{2^*-2}|v_\varepsilon|^{2^*}\mathrm{d}x+C(\mu)\int_\Omega |v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x$$

结合(4),(6)和(7)式知

$$X_\varepsilon=|\nabla v_\varepsilon|_2^2=\frac{\|\nabla u_\varepsilon(x)\|_2^2}{\left(\int_\Omega |x|^\alpha |u_\varepsilon|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(\alpha)}}}=S(\alpha)+O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}}) \tag{18}$$

$$t_\varepsilon^{2^*(\alpha)-2}\geqslant\frac{S(\alpha)}{2} \tag{19}$$

考察关于 x 的函数 $h(x)=(a+x)^m-a^m-m(a+1)^{m-1}x$, 其中 $a>0$, $m\geqslant 1$, 容易验证当 $x\in(0,\ 1)$ 时, $h'(x)\leqslant 0$. 由单调性知, 当 $0<b<1$ 时, 存在以下不等式

$$(a+b)^m\leqslant a^m+m(a+1)^{m-1}b$$

取 $a=S(\alpha)$, $b=C_1\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}}$, $m=\dfrac{N+\alpha}{2+\alpha}$, $m(a+1)^{m-1}=C_2$. 则

$$X_\varepsilon^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}=(S(\alpha)+C_1\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}})^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}\leqslant S(\alpha)^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}+C_2\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}}$$

又由于函数 $t\to\dfrac{t^2}{2}X_\varepsilon-\dfrac{t^{2^*}}{2^*}$ 在区间$\left[0,\ X_\varepsilon^{\frac{1}{2^*(\alpha)-2}}\right]$上递增, 根据 $g(t)$ 定义知

$$g(t_\varepsilon)\leqslant\tilde{g}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2^*(\alpha)-2}})-\int_\Omega F(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}X_\varepsilon^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}-\int_\Omega F(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S(\alpha)^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}+C_2\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}}-\int_\Omega F(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x$$

由(f_2)知，$F(x,t)\geqslant C_3|t|^\rho$，由(19)式知

$$F(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)\geqslant C_3t_\varepsilon^\rho|v_\varepsilon|^\rho\geqslant C_3\left(\frac{S(\alpha)}{2}\right)^{\frac{\rho}{2^*(\alpha)-2}}|v_\varepsilon|^\rho\triangleq C_4|v_\varepsilon|^\rho$$

又由(8)式结合 v_ε 的定义可知，当 $\rho>\dfrac{N}{N-2}$ 时$\int_\Omega|v_\varepsilon|^\rho\mathrm{d}x\geqslant C_5\varepsilon^{\frac{2N-\rho(N-2)}{2(2+\alpha)}}$，结合条件(3)知

$$\frac{N-2}{2+\alpha}>\frac{2N-\rho(N-2)}{2(2+\alpha)}$$

故 ε 充分小时有

$$\sup_{t\geqslant 0}I(tv_\varepsilon)=g(t_\varepsilon)<\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S(\alpha)^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$$

定理 1 的证明　根据嵌入不等式，对 $u\in H_0^1(\Omega)$ 有

$$|u|_2^2\leqslant C\|u\|^2,\ |u|_{2^*}^{2^*}\leqslant C\|u\|^{2^*},\ \int_\Omega|x|^\alpha|u|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x\leqslant C\|u\|^{2^*(\alpha)}$$

一方面，由(f_1)知当 $t\in\mathbb{R}^+$ 和 $x\in\overline{\Omega}$ 时，有 $|F(x,t)|\leqslant\dfrac{1}{2}\varepsilon t^2+C|t|^{2^*}$，故

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2^*(\alpha)}\int_\Omega|x|^\alpha|u|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u^+)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{C}{2^*(\alpha)}\|u\|^{2^*(\alpha)}-\frac{C\varepsilon}{2}\|u\|^2-C\|u\|^{2^*}$$

从而存在 $\delta_0,a_0>0$，使得当 δ_0 足够小，有 $\inf\limits_{\|u\|=\delta_0}I(u)\geqslant a_0>0$. 另一方面，由引理 2 知存在 $u_*\in H_0^1(\Omega)$，$u_*\not\equiv 0$，使得

$$\sup_{t\geqslant 0}I(tu_*)<\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S(\alpha)^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$$

由 $F(x,u)$ 非负知

$$I(tu_*)=\frac{1}{2}t^2\|u_*\|^2-\frac{1}{2^*(\alpha)}t^{2^*(\alpha)}\int_\Omega|x|^\alpha|u_*|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,tu_*^+)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{2}t^2\|u_*\|^2-\frac{1}{2^*(\alpha)}t^{2^*(\alpha)}\int_\Omega|x|^\alpha|u_*|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x$$

则 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(tu_*)=-\infty$，故存在 $t_0>0$，满足 $\|t_0u_*\|>\delta_0$，$I(t_0u_*)<0$，由山路定理[9]知，存在临界序列 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$，定义

$$\tau=\{h\in C([0,1],H_0^1(\Omega))\mid h(0)=0,\ h(1)=t_0u_*\},\ c=\inf_{t\in\tau}\max_{t\in[0,1]}I(h(t))$$

其中，$c\geqslant a_0$，τ 是联结 0 与 t_0u_* 的道路的集合，由于

$$0<a_0\leqslant c=\inf_{t\in\tau}\max_{t\in[0,1]}I(h(t))\leqslant\max_{t\in[0,1]}I(tt_0u_*)\leqslant\sup_{t\geqslant 0}I(tu_*)<\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S(\alpha)^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$$

结合引理 1 可知，$\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 存在弱收敛的子列仍记作$\{u_n\}$，假定其收敛到 u_1，则 u_1 是方程的弱解. 由 $[I'(u),u^-]=0$ 知 $u\geqslant 0$，由强极大值原理[9]知，u_1 是问题(1)的正解.

定理 2 的证明　由定理 1 知，问题(1)有一个正解 u_1，令 $h(x,t)=-f(x,-t)$，$t\in\mathbb{R}$. 由定理 1 知方程

$$-\Delta u=|x|^\alpha|u|^{2^*(\alpha)-2}u+h(x,u)$$

至少有一个正解 v. 令 $u_2=-v$，则 u_2 是方程

$$-\Delta u=|x|^\alpha|u|^{2^*(\alpha)-2}u+f(x,u)$$

的解. $u_1 \neq u_2$，则问题(1)至少有两个不同非平凡解.

参考文献：

[1] BARUTELLO V, SECCHI S, SERRA E. A Note on the Radial Solutions for the Supercritical Hénon Equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 341(1): 720-728.

[2] HENON M. Numerical Experiments on the Stability of Spherical Stellar Systems [J]. Astronomy & Astrophysics, 1973, 24(24).

[3] NI W M. A Non-linear Dirichlet Problem on the Unit Ball and Its Applications [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1982, 31(6): 801-807.

[4] SMETS D, WILLEM M, SU J. Non-radial Ground States for the Hénon Equation [J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2002, 4(3): 467-480.

[5] 龙 薇，杨健夫. 临界增长 Hénon 型方程解的存在性 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2010，34(5)：463-466.

[6] 朱红波，王征平，郭渊斌. 带有扰动项的 Henon 方程的多解性研究 [J]. 数学物理学报：A 辑，2012，32(4)：785-796.

[7] GLADIALI F, GROSSI M, NEVES S N. Non-Radial Solutions for the Hénon Equation in R^N [J]. Advance In Mathematics, 2013, 249(5): 1-36.

[8] DING L, TANG C L. Existence and Multiplicity of Solutions for Semilinear Elliptic Equations with Hardy Terms and Hardy-Sobolev Critical Exponents [J]. Applied Mathematics Letters, 2007, 20(12): 1175-1183.

[9] 陆文端. 微分方程中的变分方法 [M]. 北京：科学出版社，2003.

[10] BREZIS H, NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1983, 36(4): 437-477.

[11] RUIZ D, WILLEM M. Elliptic Problems with Critical Exponents and Hardy Potentials [J]. Journal of Differential Equations, 2003, 190(2): 524-538.

[12] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Berlin: Springer, 1996.

Existence of Solutions for Semilinear Elliptic Boundary Value Problems with Critical Hénon Exponent

WANG Qi-feng, DENG Zhi-ying

School of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

Abstract: In this paper, a class of semilinear elliptic boundary value problems with critical Hénon exponent has been studied. Existence of solutions has been studied by variational methods and some analysis techniques under certain appropriate conditions.

Key words: positive solutions; critical Hénon exponent; variational methods

责任编辑 张 枸