DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.11.003

非齐次 Schrödinger 方程的整体解与爆破解①

陈　樱，　李晓光，　杨凌燕

四川师范大学 数学与软件科学学院，成都 610066

摘要： 研究如下非齐次 Schrödinger 方程

$$i\partial_t\phi = -\Delta\phi - |x|^{-b}|\phi|^{p-1}\phi \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ t\geqslant 0,\ 0<b<2,\ n\geqslant 3$$

当 $1<p<1+\frac{4-2b}{n}$ 或者 $p=1+\frac{4-2b}{n}$ 且初始质量充分小时，得到其 Cauchy 问题在 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 中整体适定；当 $1+\frac{4-2b}{n}\leqslant p<1+\frac{4-2b}{n-2}$ 时，得到其 Cauchy 问题的解在有限时间爆破的充分条件.

关　键　词： 非齐次 Schrödinger 方程；整体解；爆破解

中图分类号： O175.27　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2017)11-0015-06

本文考虑非齐次 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题：

$$i\partial_t\phi = -\Delta\phi - |x|^{-b}|\phi|^{p-1}\phi \tag{1}$$

$$\phi(0,x)=\phi_0(x) \tag{2}$$

其中：ϕ：$[0,T)\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$，$0<T\leqslant+\infty$，$\phi_0$：$\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}$，$i=\sqrt{-1}$，$n\geqslant 3$ 且 $1<p<1+\frac{4-2b}{n-2}$；Δ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 算子. 方程(1) 用来模拟光束在非均匀介质中传播[1].

非齐次 Schrödinger 方程的一般形式为

$$i\partial_t\phi = -\Delta\phi - K(x)|\phi|^{p-1}\phi \tag{3}$$

文献[2] 和文献[3] 分别研究了方程(3) 驻波的稳定性和不稳定性. 当 $p=1+\frac{4}{n}$ 时，文献[4] 研究了 $K(x)$ 有界时方程(3) 的爆破解的存在性，文献[5] 进一步讨论了方程(3) 的爆破解的 L^2 集中性质. 文献[6] 得到了 $K(x)=|x|^b(b>0)$ 时方程(3) 解整体适定和爆破的门槛条件.

当 $K(x)\equiv 1$ 时，方程(3) 为经典的非线性 Schrödinger 方程. 文献[7] 得到其 Cauchy 问题在 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 中的局部适定性，并进一步研究解的整体适定性与散射理论. 文献[8] 证明了当 $p>1+\frac{4}{n}$ 时，如果初始能量为负，则其解在有限时间爆破. 文献[9] 研究了 Gagliardo-Nirenberg 不等式的最佳常数，并以此为基础得到 $p=1+\frac{4}{n}$ 时其 Cauchy 问题整体适定和爆破的门槛条件. 文献[10] 把这一结果推广到 $1+\frac{4}{n}\leqslant p<1+$

① 收稿日期：2015-12-08

基金项目：国家自然科学基金项目(11371267)；四川省杰出青年基金项目(2012JQ0011).

作者简介：陈　樱(1990-)，女，陕西渭南人，硕士，主要从事非线性偏微分方程的研究.

$\frac{n+2}{n-2}$.

方程(1) 的驻波是一种形为 $u_\omega(t, x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\phi_\omega(x)$ 的特解，其中 $\omega > 0$，$\phi_\omega(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ 满足如下椭圆方程：

$$-\Delta\phi + \omega\phi - |x|^{-b}|\phi|^{p-1}\phi = 0 \tag{4}$$

由文献[11] 知，方程(4) 在 $\omega > 0$ 时存在唯一的径向对称正解 Q_ω.

文献[2] 在研究方程(1) 驻波的稳定性时建立了如下 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-b}|\phi|^{p+1}\mathrm{d}x \leqslant C_{n,p}\|\nabla\phi\|_{L^2}^{\theta}\|\phi\|_{L^2}^{\gamma} \tag{5}$$

其中 $C_{n,p}$,θ 与 γ 分别为

$$C_{n,p} = \frac{p+1}{\gamma^{\frac{4-n(p-1)-2b}{4}}\theta^{\frac{n(p-1)+2b}{4}}\|Q_1\|_{L^2}^{p-1}},\ \theta = \frac{n(p-1)+2b}{2},\ \gamma = \frac{n+2-(n-2)p-2b}{2} \tag{6}$$

令 $Q(x) = \gamma^{\frac{2-b}{2(p-1)}}Q_1(\gamma^{\frac{1}{2}}x)$，则 $Q(x)$ 满足(4) 式且 $\omega = \gamma$. 此时，

$$C_{n,p} = \frac{p+1}{\theta^{\frac{\theta}{2}}\|Q\|_{L^2}^{p-1}} \tag{7}$$

本文利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式(5) 讨论 Cauchy 问题(1) 和(2) 的整体适定性和爆破. 当 $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{n}$ 或 $p = 1 + \frac{4-2b}{n}$ 且 $\|\phi_0\|_{L^2} \leqslant \|Q\|_{L^2}$ 时，得到其 Cauchy 问题在 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 中整体适定；当 $1 + \frac{4-2b}{n} \leqslant p < 1 + \frac{4-2b}{n-2}$ 时，我们给出 Cauchy 问题(1) 和(2) 的解在有限时间爆破的充分条件.

1 预备知识

引理 1[12] 设 $n \geqslant 3$，$1 < p < 1 + \frac{4-2b}{n-2}$ 且 $0 < b < 2$. 任取初值 $\phi_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$，则方程(1) 存在唯一解 $\phi(t, x) \in C([0, T), H^1(\mathbb{R}^n))$ 满足 $\phi(0, x) = \phi_0$ 且 $T > 0$. 进一步，对 $\forall t \in [0, T)$，方程(1) 满足如下守恒律：

$$M[\phi(t)] := \|\phi\|_{L^2}^2 = M[\phi_0] \tag{8}$$

$$E[\phi(t)] := \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-b}|\phi|^{p+1}\mathrm{d}x = E[\phi_0] \tag{9}$$

引理 2 设 $\phi(x)$ 是方程(1) 的一个解，$0 \leqslant t \leqslant T \in [0, +\infty)$，$|x|\phi_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$，$V(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |\phi|^2\mathrm{d}x$，那么

(i) $V'(t) = 4\mathfrak{Z}\int_{\mathbb{R}^n}(x \cdot \nabla\phi)\bar{\phi}\mathrm{d}x$,

(ii) $V''(t) = 8\|\nabla\phi\|_{L^2}^2 - \frac{4(n(p-1)+2b)}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-b}|\phi|^{p+1}\mathrm{d}x$.

证 对方程(1) 两边同乘以 $\bar{\phi}$，取虚部得到

$$\frac{\partial}{\partial t}|\phi|^2 = -2\nabla\mathfrak{Z}(\bar{\phi}\nabla\phi)$$

两边同乘以 $|x|^2$ 再在 $\mathbb{R}^n$ 积分可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial t}|\phi|^2 \cdot |x|^2\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} -2\nabla\mathfrak{Z}(\bar{\phi}\nabla\phi) \cdot |x|^2\mathrm{d}x =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} 2\mathfrak{Z}(\bar{\phi}\nabla\phi) \cdot \nabla(|x|^2)\mathrm{d}x =$$

$$4\Im\int_{\mathbb{R}^n}(x\cdot\nabla\phi)\,\bar{\phi}\mathrm{d}x$$

(i) 得证.

为证(ii)，我们首先对方程(1) 两边同乘以 $r\overline{\phi_r}(r=|x|)$：

$$\mathrm{i}\partial_t\phi\cdot r\overline{\phi_r}+\Delta\phi\cdot r\overline{\phi_r}+|x|^{-b}|\phi|^{p-1}\phi\cdot r\overline{\phi_r}=0$$

取实部，然后在 $\mathbb{R}^n$ 积分，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{i}r(\phi_t\overline{\phi_r}-\overline{\phi_t}\phi_r)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n}r(\Delta\phi\overline{\phi_r}+\Delta\bar{\phi}\phi_r)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n}r|x|^{-b}|\phi|^{p-1}(\phi\overline{\phi_r}+\bar{\phi}\phi_r)\mathrm{d}x=0$$

简记为

$$I+II+III=0 \tag{10}$$

现在分别计算 I,II 和 III.

$$\begin{aligned}I=&\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{i}r(\phi_t\overline{\phi_r}-\overline{\phi_t}\phi_r)\mathrm{d}x=\\&\mathscr{R}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{i}x(\phi_t\nabla\bar{\phi}-\overline{\phi_t}\nabla\phi)\mathrm{d}x=\\&\mathscr{R}\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^n}x\left[\frac{\partial}{\partial t}(\phi\nabla\bar{\phi})-\nabla(\overline{\phi_t}\phi)\right]\mathrm{d}x=\\&\mathscr{R}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^n}x\phi\nabla\bar{\phi}\mathrm{d}x+n\mathscr{R}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{i}\,\overline{\phi_t}\phi\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{11}$$

取方程(1) 的共轭复数，并乘以 ϕ，代入(11) 式得到

$$I=\frac{\partial}{\partial t}\Im\int_{\mathbb{R}^n}x\nabla\phi\bar{\phi}\mathrm{d}x-n\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x+n\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-b}|\phi|^{p+1}\mathrm{d}x \tag{12}$$

由分部积分可得

$$\begin{aligned}II=&\int_{\mathbb{R}^n}r(\Delta\phi\overline{\phi_r}+\Delta\bar{\phi}\phi_r)\mathrm{d}x=\\&2\mathscr{R}\int_{\mathbb{R}^n}r\Delta\phi\overline{\phi_r}\mathrm{d}x=\\&-2\mathscr{R}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\phi\cdot\nabla(r\overline{\phi_r})\mathrm{d}x=\\&-2\mathscr{R}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\phi\cdot\frac{x}{r}\overline{\phi_r}+r\nabla\phi\nabla\overline{\phi_r}\mathrm{d}x=\\&-2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\phi|^2dx-2\mathscr{R}\int_{\mathbb{R}^n}x\phi_r\nabla\overline{\phi_r}\mathrm{d}x=\\&-2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\phi|^2dx-\int_{\mathbb{R}^n}x(\phi_r\nabla\overline{\phi_r}+\overline{\phi_r}\nabla\phi_r)\mathrm{d}x=\\&-2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\phi|^2dx-\int_{\mathbb{R}^n}x\nabla|\phi_r|^2\mathrm{d}x=\\&(n-2)\int_{\mathbb{R}^n}\nabla|\phi|^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{13}$$

同理，

$$\begin{aligned}III=&\int_{\mathbb{R}^n}r|x|^{-b}|\phi|^{p-1}(\phi\overline{\phi_r}+\bar{\phi}\phi_r)\mathrm{d}x=\\&\int_{\mathbb{R}^n}x|x|^{-b}|\phi|^{p-1}(\phi\nabla\bar{\phi}+\bar{\phi}\nabla\phi)\mathrm{d}x=\\&-\frac{2(n-b)}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-b}|\phi|^{p+1}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{14}$$

由(10)式及(12)-(14)式可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\Im\int_{\mathbb{R}^n}x\,\bar{\phi}\,\nabla\phi\mathrm{d}x=2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\phi|^2-\frac{n(p-1)+2b}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-b}|\phi|^{p+1}\mathrm{d}x$$

代入 $V'(t)$,得到 $V''(t)$.

引理 3[9] 设 $|x|\phi\in L^2(\mathbb{R}^n)$,$\phi\in H^1(\mathbb{R}^n)$. 那么

$$\|\phi\|_{L^2}^2\leqslant\frac{2}{n}\|\,|x|\phi\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2}$$

2 解的整体存在和爆破

定理 1 设 $n\geqslant 3$,$0<b<2$,$\phi_0\in H^1(\mathbb{R}^n)$.

(i) 当 $1<p<1+\frac{4-2b}{n}$ 时,Cauchy 问题(1)和(2)的解 $\phi(t,x)$ 整体存在;

(ii) 当 $p=1+\frac{4-2b}{n}$ 时,若 $\|\phi_0\|_{L^2}\leqslant\|Q\|_{L^2}$,则 Cauchy 问题(1)和(2)的解 $\phi(t,x)$ 整体存在.

证 由(8),(9)式以及 Gagliardo-Nirenberg 不等式(5)得

$$\frac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|_{L^2}^2-\frac{C_{n,p}}{p+1}\|\nabla\phi(t)\|_{L^2}^{\theta}\|\phi_0\|_{L^2}^{\gamma}\leqslant E[\phi(t)]=E[\phi_0] \tag{15}$$

其中 θ 与 γ 满足(6)式,$C_{n,p}$ 满足(7)式

(i) 当 $1<p<1+\frac{4-2b}{n}$ 时,$\theta=\frac{n(p-1)+2b}{2}\in(b,2)$,则由(15)式知 $\|\nabla\phi(t)\|_{L^2}^2$ 有界.

(ii) 当 $p=1+\frac{4-2b}{n}$ 时,$\theta=2$,$\gamma=\frac{4-2b}{n}$. 由(15)式得

$$\frac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|_{L^2}^2\left(1-\left(\frac{\|\phi_0\|_{L^2}}{\|Q\|_{L^2}}\right)^{\frac{4-2b}{n}}\right)\leqslant E[\phi_0]$$

若取 $\|\phi_0\|_{L^2}\leqslant\|Q\|_{L^2}$,则 $\|\nabla\phi(t)\|_{L^2}^2$ 有界,定理得证.

定理 2 设 $n\geqslant 3$,$0<b<2$,$1+\frac{4-2b}{n}\leqslant p<1+\frac{4-2b}{n-2}$. 若 $\phi_0\in H^1(\mathbb{R}^n)$ 满足如下条件之一:

(i) $E[\phi_0]<0$,

(ii) $E[\phi_0]=0$,$\Im\int_{\mathbb{R}^n}(x\cdot\nabla\phi_0)\overline{\phi_0}\mathrm{d}x<0$

(iii) $E[\phi_0]>0$,$\Im\int_{\mathbb{R}^n}(x\cdot\nabla\phi_0)\overline{\phi_0}\mathrm{d}x\leqslant-\frac{\sqrt{2(n(p-1)+2b)E[\phi_0]}\|x\phi_0\|_{L^2}}{2}$.

则 Cauchy 问题(1)和(2)的解 $\phi(t,x)$ 在有限时间爆破.

证 由引理 2 及能量守恒(9)式知

$$\begin{aligned}V''(t)=&8\|\nabla\phi\|_{L^2}^2-\frac{4(n(p-1)+2b)}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-b}|\phi|^{p+1}\mathrm{d}x=\\&8\|\nabla\phi\|_{L^2}^2-2(n(p-1)+2b)\|\nabla\phi\|_{L^2}^2+4(n(p-1)+2b)E[\phi_0]=\\&(8-2(n(p-1)+2b))\|\nabla\phi\|_{L^2}^2+4(n(p-1)+2b)E[\phi_0]\end{aligned}$$

由假设 $p\geqslant 1+\frac{4-2b}{n}$ 知 $8-2(n(p-1)+2b)\leqslant 0$,从而

$$V''(t)\leqslant 4(n(p-1)+2b)E[\phi_0] \tag{16}$$

(i) 当 $E[\phi_0]<0$ 时,$V''(t)<-\delta<0$,其中 δ 是一个正数,则存在一个 $T<\infty$ 使得

$$\lim_{t\to T}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|\phi|^2\mathrm{d}x\to 0$$

(ii) 当 $E[\phi_0]=0$，$\Im\int_{\mathbb{R}^n}(x\cdot\nabla\phi_0)\overline{\phi_0}\mathrm{d}x<0$ 时，得到

$$V''(t)\leqslant 0$$

$$V'(t)\leqslant V'(0)<0$$

则存在一个 $T<\infty$ 使得

$$\lim_{t\to T}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|\phi|^2\mathrm{d}x\to 0$$

(iii) 由经典分析知

$$V(t)=V(0)+V'(0)t+\int_0^t(t-s)V''(s)\mathrm{d}s$$

由(16)式得

$$V(t)\leqslant V(0)+V'(0)t+2(n(p-1)+2b)E[\phi_0]t^2$$

$$V(t)\leqslant\left(\sqrt{2(n(p-1)+2b)E[\phi_0]}t+\frac{V'(0)}{2\sqrt{2(n(p-1)+2b)E[\phi_0]}}\right)^2+V(0)-\frac{V'(0)^2}{8(n(p-1)+2b)E[\phi_0]}$$

当 $E[\phi_0]>0$，$\Im\int_{\mathbb{R}^n}(x\cdot\nabla\phi_0)\overline{\phi_0}\mathrm{d}x\leqslant-\frac{\sqrt{2(n(p-1)+2b)E[\phi_0]}\,\|x\phi_0\|_{L^2}}{2}$ 时，存在一个 $T<\infty$ 使得

$$\lim_{t\to T}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|\phi|^2\mathrm{d}x\to 0$$

由引理 3 和(8)式，得到

$$\lim_{t\to T}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x\to\infty$$

参考文献：

[1] LIU C S，TRIPATHI V K. Laser Guiding in an Axially Nonuniform Plasma Channel [J]. Phys Plasmas，1994，1(9)：3100－3103.

[2] BOUARD A D，FUKUIZUMI R. Stability of Standing Waves for Nonlinear Schrödinger Equations with Inhomogeneous Nonlinearities [J]. Ann Henri Poincaré，2005，6(6)：1157－1177.

[3] FUKUIZUMI R，OHTA M. Instability of Standing Waves for Nonlinear Schrödinger Equations with Inhomogeneous Nonlinearities [J]. Journal of Mathematics of Kyoto University，2005，45(1)：145－158.

[4] MERLE F. Nonexistence of Minimal Blow-up Solutions of Equations $iu_t=-\Delta u-k(x)|u|^{\frac{4}{N}}u$ in $\mathbb{R}^n$ [J]. Ann Inst H Poincaré Phys. Théor，1996，64(1)：33－85.

[5] 冷礼辉，张　健. 方程 $iu_t=-\Delta u-k(x)|u|^{\frac{4}{N}}u$ 爆破解的 L^2 集中性质 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2008，31(2)：134－137.

[6] CHEN J，GUO B. Sharp Global Existence and Blowing up Results for Inhomogeneous Schrödinger Equations [J]. Discrete Contin Dyn Syst Ser，2007，B8：357－367.

[7] GINIBRE J，VELO G. On a Class of Nonlinear Schrödinger Equations I，the Cauchy Problem，General Case [J]. J Funct Anal，1979，32(1)：1－71.

[8] GLASSEY R T. On the Blowing up of Solutions to the Cauchy Problem for Nonlinear Schrödinger Equations [J]. J Math Phys，1977，18(9)：1794－1797.

[9] WEINSTEIN M I. Nonlinear Schrödinger Equations and Sharp Interpolation Estimates [J]. Comm Math Phys，1983，87(4)：567－576.

[10] ZHANG J. Sharp Conditions of Global Existence for Nonlinear Schrödinger and Klein－Gordon Equations [J]. Nonlinear Anal，2002，48(2)：191－207.

[11] YANAGIDA E. Uniqueness of Positive Radial Solutions of $\Delta u+g(r)u+h(r)u^p=0$ in $\mathbb{R}^n$ [J]. Arch Rat Mech Anal, 1991, 115(3): 257-274.

[12] CAZENAVE T. Semilinear Schrödinger Equations [M]. New York University: American Mathematical Society, 2003: 83-93.

Global Existence and Blow-up for Inhomogeneous Schrödinger Equation

CHEN Ying, LI Xiao-guang, YANG Ling-yan

College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China

Abstract: The aim of this paper is to study the cauchy problem of the following inhomogeneous Schrödinger equation

$$i\partial_t\phi=-\Delta\phi-|x|^{-b}|\phi|^{p-1}\phi \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ t\geqslant 0,\ 0<b<2,\ n\geqslant 3$$

When $1<p<1+\frac{4-2b}{n}$, the global well-posedness in $H^1(\mathbb{R}^n)$ has been established; when $p=1+\frac{4-2b}{n}$, a mass critical is derived for the global well-posedness in $H^1(\mathbb{R}^n)$; when $1+\frac{4-2b}{n}\leqslant p<1+\frac{4-2b}{n-2}$, we have obtained the finite-time blow-up of solution under certain conditions.

Key words: Inhomogeneous Schrödinger Equation; global existence; blow-up

责任编辑 张 枸