DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.11.004

交错群图 AGn 的 5 类子图可靠性研究①

谭秋月

武夷学院 数学与计算机学院，福建 武夷山 354300

摘要： 交错群图 AGn 具有多种优良性能. 该文对其 5 类子图进行界定和分类，进而以一个具体的案例分析这 5 类子图的可靠性. 分析结果表明，交错群图 AGn 的 5 类子图具有非常理想的可靠性，适用于拓扑网络的故障诊断.

关 键 词： 交错群图；子图；故障诊断；拓扑网络

中图分类号： O157.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2017)11-0021-04

随着领域任务规模和数据信息量的不断扩大，大规模处理任务或者是复杂大系统的体系结构都是依托互联网的拓扑结构来构建的[1-2]. 因此，对互联网拓扑结构进行数学建模和合理地抽象表达具有重要的理论价值和实践意义[3]. 按照图论的理论，互联网的拓扑结构可以按照图的方式进行表达，网络中每一台主机都可以看成图中的节点，2 个主机之间的通信信道可以看成图中的边，这样整个网络可以刻画成 G(V，E)的图形式[4-5]. 对于网络安全而言，如果图中有一个节点或者与节点相连的边出现了问题，那么网络中这条通信信道就是有故障的、不安全的[6]. 为了更加准确地描述多主机构成的网络系统，交错群图的概念被构建出来[7]. 交错群图的理论基础是交错群，交错群一般用 An 来表达，而交错群图是 An 的 Cayley 图，它具有多种优良的性能(同时具备点和边的传递性、拓扑结构直径小、网络连通度大等等)[8-9]. 同已知的其他图结构(如超立方体图结构、星图结构)相比，交错群图还具有彼此独立的哈密顿连通性，以及低阶次限制属性的点连通性[10-11]. 在各种属性中，交错群图的容错性和可靠性使其特别适用于网络的故障诊断[12]. 据此，本文将探寻交错群图 AGn 中 5 类子图的可靠性，并将交错群图运用于网络故障诊断.

1　AGn 图及 5 类子图

1.1　AGn 图的定义

如果一个集合{1，2，…，n}可以用⟨n⟩来描述，同时⟨n⟩中各元素的一个排列可以用 $q=q_1q_2\cdots q_n$ 来表达，那么存在 $q_i\in\langle n\rangle$ 同时 $q_i\neq q_j$. 这时，如果 i 大于 j，但 $q_i<q_j$，则将 q_i，q_j 称之为 q 的一个逆序表达. 如果一个排列中含有了偶数个逆序表达，那么这个排列就称之为偶排列.

现在，建立一个新的集合 A_n，这个集合包含了⟨n⟩上全部的偶排列. 对于 i 大于 3 以后的情况，在 A_n 上定义 2 个换位运算，如公式(1) 和公式(2) 所示.

$$h_i^+=(12i) \tag{1}$$

$$h_i^-=(1i2) \tag{2}$$

在上述 2 种换位运算的支持下，qh_i^+ 可以实现 q 上排序 1、排序 2、排序 i 的 3 个位置上的数据从左到右的换位，qh_i^- 可以实现 q 上排序 1、排序 2、排序 i 的 3 个位置上的数据从右到左的换位.

对于 AG_6 的一个具体表达 $q=123456$，那么 $h_4^+=(124)$，$h_4^-=(142)$ 对应的换位运算为 $qh_4^+=243156$，

---

① 收稿日期：2017-02-02

基金项目：福建省教育厅科技项目(JA15513)；福建省大学生创新项目(201510397029)；武夷学院科技项目(xl201409).

作者简介：谭秋月(1980-)，女，陕西杨凌人，硕士，副教授，主要从事图论及离散数学研究.

$qh_4^- = 413256$.

在此基础上，进一步界定交错群图的概念.

设定存在 $AG_n = (V_n, E_n)$，其下的点集合 $V_n = A_n$，其下的边集合 $E_n = \{(p, q) \mid q = ph_i^+\}$ 或 $q = ph_i^-\}$，当且仅当 $p = qh_i^-$ 时，E_n 中的边(p, q) 要么为(p, ph_i^+)、要么为(q, qh_i^-). 此时，AG_n 表达的是交错群图.

1.2 AGn 图可靠性的相关定义

如果用 q 表示 AGn 交错群图中的节点，那么此节点 q 的可靠性表达的就是 q 在 t 时间点可以运行的概率.

如果节点坐标在其第 j 个维度之上的符号可以用 b_i 来表达，并且此位以外其他位置之上的构成元素的随机一组排列为偶排列，那么可以定义出 AGn 上存在 1 个$(n-1)$ 维的交错群图，如公式(3) 所示.

$$AG_{n-1}(b_i) = Y^{j-1} b_i Y^{n-j} \tag{3}$$

$AG_{n-1}(b_i)$ 交错群图的维度为$(n-1)$，那么其可靠性可以用 $S_{n-1}(b_i)$ 来表达.

AG_n 表达一个交错群图，其中无故障发生的 AG_{n-m} 的几率可以用 $S_{n,\,n-m}(q)$ 来表达.

AG_{n-1} 表达一个维度为$(n-1)$ 的交错群图，沿着第 i 维执行分解处理后，图中至少存在一个没有故障的几率可以用 $S_{n,\,n-1}(q, i)$ 来表达.

AG_n 表达一个交错群图，其中存在故障的节点数量可以用 g 来表达.

$\binom{n}{m}$表达了排列组合操作，即从 n 个数据中选定 m 个数据的组合数$\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$.

2 AGn 图 5 类子图的可靠性分析

2.1 AGn 图 5 类子图

AGn 交错群图中的第 1 类子图：如果对应于 AGn 图下的 2 个不同子图 AG_{n-1}，其维度相同但标志码不同，这样的 2 个子图就称为第一类子图. 例如，AG_6 之下的 $YYYYY6$ 和 $YYYYY5$ 就表达了第 1 类子图. 可见，第 1 类子图是不相交的.

AGn 交错群图中的第 2 类子图：如果对应于 AGn 图下的 2 个不同子图 AG_{n-1}，其维度不同但标志码相同，这样的 2 个子图就称为第 2 类子图. 例如，AG_6 之下的 $YYYYY6$ 和 $YYYY6Y$ 就表达了第 2 类子图. 可见，第 2 类子图也是不相交的.

AGn 交错群图中的第 3 类子图：如果对应于 AGn 图下的 2 个不同子图 AG_{n-1}，其维度不同且标志码也不同，这样的 2 个子图就称为第 3 类子图. 例如，AG_6 之下的 $YYYYY6$ 和 $YYYY5Y$ 就表达了第 3 类子图. 可见，第 3 类子图是相交的. 例子中子图相交结果为 $YYYY56$.

AGn 交错群图中的第 4 类子图：以 AG_5 为例，如果可以通过组合数$\binom{3}{2}\times\binom{5}{2}\times 2! = 60$ 来生成 2 个子图 AG_{5-1}，使其相交子图结果为 AG_{5-2}. 此时，可以通过另外的 2 种方式生成第 3 个子图 AG_{5-1}，与前面的 2 个子图都不相交，那么这样的子图就称之为第 4 类子图.

AGn 交错群图中的第 5 类子图：以 AG_5 为例，如果可以通过组合数$\binom{3}{2}\times\binom{5}{2}\times 2! = 60$ 来生成 2 个子图 AG_{5-1}，使其相交子图结果为 AG_{5-2}. 此时，可以通过另外的 2 种方式生成第 3 个子图 AG_{5-1}，与前面的 2 个子图都恰好相交，那么这样的子图就称之为第 5 类子图.

2.2 具体案例的可靠性分析

下面，以一个具体的案例对 AGn 交错群图的 5 类子图可靠性进行分析. 在案例中，设定 $n=4$，AG_4 所对应的无故障发生几率 $S_{n,\,n-m}(q)$ 表达为

$$S_{4,\,4-1}(q) = -3q^{12} + 12q^{11} - 6q^{10} + 24q^9 + 18q^8 + 24q^7 - 16q^6 - 12q^5 + 10q^3 \tag{4}$$

对于公式(4) 的表达，可以将其按照下面的方法进行重整.

$$S_{4,\,4-1}(q) = -3q^{12} + 12q^{11} - 6q^{10} + 24q^9 + 18q^8 + 24q^7 - 16q^6 - 12q^5 + 10q^3 =$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{7} D_i - \sum_{i,\,j\in\varphi_4}^{i\neq j} D_i D_j + \sum_{i,\,j,\,k\in\varphi_4}^{i\neq j\neq k} D_i D_j D_k - \sum_{i,\,j,\,k,\,l\in\varphi_4}^{i\neq j\neq k\neq l} D_i D_j D_k D_l + \cdots - \sum_{i=0}^{7} D_i = \\ &10q^3 - (16q^6 + 12q^5) + (8q^9 + 24q^8 + 24q^7) - (2q^{12} + 30q^{10} + 36q^9 + 6q^8) + \\ &(8q^{12} + 24q^{11} + 24q^{10}) - (12q^{12} + 4q^{12} + 12q^{11}) + 8q^{12} - q^{12}\end{aligned} \tag{5}$$

公式(5)中，对各项进行 5 类子图的可靠性分析如下：

1）公式(5)中第 1 项，表达的是 AG_4 各个独立子图 AG_{4-1} 可以运行的几率.

2）公式(5)中第 2 项，表达的是 AG_4 中任意两相异子图 AG_{4-1} 可以运行的几率，此时需要分为 3 种情况考虑：

对于第 2 项的第 1 个因子所含有的子图对，如果两子图 AG_{4-1} 的交集为空，可能出现 16 种不同的状态，其可靠性为 $16q^6$；

对于第 2 项的第 2 个因子所含有的子图对，如果两子图 AG_{4-1} 的交集为 AG_{4-2}，可能出现 12 种不同的状态，其可靠性为 $12q^5$；

3）公式(5)中第 3 项，表达的是 AG_4 中任意 3 个相异子图 AG_{4-1} 可以运行的几率，此时需要分为 3 种情况考虑：

对于第 3 项的第 1 个因子所含有的子图对，如果 3 个子图 AG_{4-1} 的交集为空，可能出现 8 种不同的状态，其可靠性为 $8q^9$；

对于第 3 项的第 2 个因子所含有的子图对，如果 3 个子图 AG_{4-1} 恰有 2 个子图相交，其交集为 AG_{4-2}，可能出现 24 种不同的状态，其可靠性为 $24q^8$；

对于第 3 项的第 3 个因子所含有的子图对，如果 1 个子图 AG_{4-1} 和另外 2 个子图相交，可能出现 24 种不同的状态，其可靠性为 $24q^7$.

4）公式(5)中第 4 项，表达的是 AG_4 中任意 4 个相异子图 AG_{4-1} 可以运行的几率，此时需要分为 4 种情况考虑：

对于第 4 项的第 1 个因子所含有的子图对，4 个 AG_{4-1} 中任意 2 个交集为空，可能出现 2 种不同的状态，其可靠性为 $2q^{12}$；

对于第 4 项的第 2 个因子所含有的子图对，可能出现 6 种不同的状态，可靠性为 $6q^{10}$；

对于第 4 项的第 3 个因子所含有的子图对，可能出现 24 种不同的状态，可靠性为 $24q^9$；

对于第 4 项的第 4 个因子所含有的子图对，可能出现 6 种不同的状态，可靠性为 $6q^8$；

5）公式(5)中第 5 项，表达的是 AG_4 中任意 5 个相异子图 AG_{4-1} 可以运行的几率，此时需要分为 3 种情况考虑：

对于第 5 项的第 1 个因子所含有的子图对，可能出现 8 种不同的状态，可靠性为 $8q^{12}$；

对于第 5 项的第 2 个因子所含有的子图对，可能出现 24 种不同的状态，可靠性为 $12q^{11}$；

对于第 5 项的第 3 个因子所含有的子图对，可能出现 24 种不同的状态，可靠性为 $24q^{10}$.

6）公式(5)中第 6 项，表达的是 AG_4 中任意 6 个相异子图 AG_{4-1} 可以运行的几率，此时需要分为 3 种情况考虑：

对于第 6 项的第 1 个因子所含有的子图对，可能出现 12 种不同的状态，可靠性为 $12q^{12}$；

对于第 6 项的第 2 个因子所含有的子图对，可能出现 4 种不同的状态，可靠性为 $4q^{12}$；

对于第 6 项的第 3 个因子所含有的子图对，可能出现 12 种不同的状态，可靠性为 $12q^{11}$.

7）公式(5)中第 7 项，表达的是 AG_4 中任意 7 个相异子图 AG_{4-1} 可以运行的几率，此时需要如下考虑：

对于第 7 项的第 1 个因子所含有的子图对，可能出现 8 种不同的状态，可靠性为 $8q^{12}$.

8）公式(5)中第 8 项，表达的是 AG_4 中任意 8 个相异子图 AG_{4-1} 可以运行的几率，此时需要如下考虑：

对于第 8 项的第 1 个因子所含有的子图对，可能出现 8 种不同的状态，可靠性为 $8q^9$.

参考文献：

[1] ESFAHANIAN A H. Generalized Measures of Fault Tolerance with Application to n-cube Networks [J]. IEEE Com-

puters Society, 1989, 38(11): 1586-1591.

[2] HAMIDOUNE Y, LIADO A, LOPEZ S C. Vertex Transitive Graphs That Remain Connected After Failure of a Vertex and Its Neighbors [J]. Journal of Graph Theory, 2011, 67(5): 124-138.

[3] SOMANI A K, PELEG O. On Diagnosability of Large Fault Sets in Regular Topology-Based Computer Systems [J]. Computers IEEE Transaction on, 1996, 45(8): 892-903.

[4] SENGUPTA A, DAHBURA A. On Self-Diagnosable Multiprocessor Systems: Diagnosis by Comparison Approach [J]. IEEE Trans, Computers, 2012, 41(11): 1386-1396.

[5] 翟 婷，冯爱芳，段泽勇. 非交换图的一些有趣的性质 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2007, 29(2): 8-10.

[6] YANG E, YANG X, DONG Q. Conditional Diagnosability of DCCLC Graphs Under the Comparison Model [J]. International Journal of Parallel Emergent and Distributed Systems, 2011, 26(3): 239-248.

[7] SZEPIETOWSKI A. Fault Tolerance of Vertex Pancyclicity in Alternating Group Graphs [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(12): 6785-6791.

[8] WANG D. Diagnosability of Hypercubes and Enhanced Hypercubes Under the Comparison Diagnosis Model [J]. IEEE Computer Society, 1999, 48(12): 1369-1374.

[9] CHANG C P, LAI P L. Diagnosability of t-Connected Networks and Product Networks Under the Comparison Diagnosis Model [J]. IEEE H-ansactioxis on Computers, 2014, 53(12): 1582-1590.

[10] TSAI P Y. A Note on an Optimal Result on Fault-Tolerant Cycle-Embedding in Alternating Group Graphs [J]. Information Processing Letters, 2011, 11(2): 375-378.

[11] 王玲丽. S_(10)的非交换图刻画 [J]. 中北大学学报(自然科学版), 2015, 36(3): 282-284.

[12] JWO J S, LAKSHMIVARAHAN S, DHALL S K. A New Class of Interconnection Networks Based on Alternating Group [J]. Networks, 2013, 23(4): 315-326.

On Reliability of Five Kinds of Subgraphs of Alternating Group Graph AGn

TAN Qiu-yue

Department of Mathematics and Computer, Wuyi University, Wuyishan 354300, China

Abstract: The alternating group graph AGn has many excellent properties, such as the transitivity of the point and the edge, the small diameter of the topological structure and the large network connectivity. In this paper, we have defined andclassified the following five kinds of subgraphs, and then analyze the reliability of these five kinds of subgraphs with a specific case. The results show that the five kinds of subgraphs of the AGn of the alternating group graphs have very good reliability and can be applied to the fault diagnosis of topological networks. The research of this paper lays a theoretical foundation for network fault diagnosis.

Key words: Alternating group graph; subgraph; fault diagnosis; topological network

责任编辑 夏 娟 崔玉洁