第 42 卷 第 11 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2017 年 11 月
Vol. 42 No. 11 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Nov. 2017

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2017.11.010

有向拓扑图下基于脉冲协议的离散非线性多智能体系统一致性①

韩易言, 张 豪, 徐自强

西南大学 电子信息工程学院,重庆 400715

摘要:本文就有向拓扑图下基于脉冲控制的离散非线性多智能体系统一致性问题进行了研究. 首先给出了一定的数学准备并将该一致性问题转化为了一个误差系统的稳定性问题. 根据递推方法,得出了保证该多智能体系统收敛的充分条件. 该条件揭示了在脉冲协议下,控制增益、脉冲间隔以及有向拓扑图结构之间的复杂关系.

关 键 词:脉冲协议;离散非线性系统;一致性;有向拓扑

中图分类号:**TP13** **文献标志码**:**A** **文章编号**:1000-5471(2017)11-0058-04

随着计算机科学的迅速发展,多智能体系统在控制理论与控制科学中的地位也变得日益重要. 最近,一个基础的问题,即多智能体的一致性问题[1-4]引起了广泛的关注. 一致性控制就是对于每一个智能体,选取基于各自邻接智能体相关信息的控制协议,使得所有智能体的状态渐近一致. 为了与实际情况更贴切,很多研究又围绕着具有非线性动力学的多智能体一致性问题展开[5-8].

事实上,由于自然界中存在着不连续现象,导致某些系统的状态变量会产生突变. 这种现象启发了学者们,他们开始将目光投向脉冲控制方法,领域也开始逐渐升温. 近来,经过各个学者广泛的研究,发现在多智能体上施加脉冲控制,具有高鲁棒性且能耗低的特点,同时其在各种复杂网络上的同步和一致性研究也层出不穷[9-12]. Jiang 等[13]研究了有向切换图的多智能体系统,主要从脉冲控制理论的角度出发,利用狄拉克函数构造脉冲协议,构造了相应的一致性充分条件. 在 Guan 等人[14]的研究中,利用带脉冲的协议,与传统协议相比,提升了多智能体系统一致性收敛速度,同时还研究了在有外部干扰下的一致性问题. Wang 等人[15]进一步简化了脉冲协议算法,在保证一致性的同时,使得二阶多智能体的信息交换仅仅依靠位移信息就能实现一致性,从而降低了控制难度,并且还给出了时滞系统的一致性充分条件.

从前人的研究可以看出,虽然许多文献中都研究了一致性的收敛速度,并且也给出了脉冲条件、拓扑结构和系统本身的复杂关系,但是基于脉冲控制下,对有向拓扑图中离散化系统的一致性问题却鲜有研究. 本文通过数学递推方法,以及离散系统稳定性的基本方法,综合无穷范数的使用来给出了保证系统一致性的充分条件.

1 预备工作

本文中需要用到的数学符合和标记:$\mathbb{R}$代表实数集;对任意方阵$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 分别代表其转置矩阵和逆矩阵;I_N 和 1_N 分别代表 N 维单位矩阵以及所有元素为 1 的 N 维列向量;对于任意方阵 $\boldsymbol{A}$ 和列向量 $\boldsymbol{x}$,$\|\boldsymbol{A}\|$ 和 $\|\boldsymbol{x}\|$ 分别表示其欧几里德范数;$\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ 和 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ 分别表示其无穷范数.

① 收稿日期:2017-07-11

基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(XDJK2017D175).

作者简介:韩易言(1991-),男,重庆人,硕士研究生,主要从事多智能体一致性以及脉冲控制理论等方面研究.

本文中需要用到的图论知识：一个具有 N 个节点的有向图可以表示为 $G=(V, E, \boldsymbol{A})$，其中 V 为节点集；$E=\{(i, j) \mid i, j \in V\}$ 为该图的边集；$\boldsymbol{A}$ 为图的邻接矩阵．对于节点 i，其邻居集表示为 $\mathbb{N}_i=\{j \in V \mid (i, j) \in E, i \neq j\}$，且 $|\mathbb{N}_i|$ 表示其邻居的总数．对于邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $a_{ii}=0$ 以及 $a_{ij} \geqslant 0$，且当且仅当 i 与 j 不构成边时有 $a_{ij}=0$．节点 i 的出度定义为 $deg(i)=\sum_{j=1}^{N} a_{ij}$，将各个出度按节点序号升序排列而成的对角矩阵称为其度矩阵 $\boldsymbol{D}$．图的拉普拉斯矩阵定义为 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$．图的强联通定义为一个有向图中任意两点间 i 与 j 存在 i 到 j 的路径及 j 到 i 的路径．在此给出以下引理：

引理 1　假设有向图 G 是强联通的，则其拉普拉斯矩阵具有如下性质：

1）存在一个对应其零特征值的单位特征向量满足 $\boldsymbol{L}1_N=0$；

2）存在一个对应其零特征值的正特征向量满足 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}=0$，且 $\sum_{i=1}^{N}\omega_i=1$，其中 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \cdots, \omega_N)^{\mathrm{T}}$；

3）存在数个对应其各特征值的单位特征向量满足 $\boldsymbol{\gamma}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}=\lambda_i\boldsymbol{\gamma}_i^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\gamma}_i=(\gamma_{i1}, \cdots, \gamma_{iN})^{\mathrm{T}}$；

4）令矩阵 $\boldsymbol{P}=I_N-1_N\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}$，则有 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{PL}=\boldsymbol{LP}$．

在此声明，后文中所有提到的图均为强联通的有向图．

2　问题构造

考虑一个采用脉冲协议的具有非线性动力学的多智能体系统为：

$$\begin{cases} x_i(n+1)=x_i(n)+sf(x_i, n), & n \neq n_k \\ \Delta x_i(n_k)=u_i(n) \end{cases}$$

式中：$x_i(n) \in \mathbb{R}$ 为每个多智能体的状态；$s>0$ 为系统参数；$f(x_i, n)$ 为非线性函数；$\Delta x_i(n_k)=x_i(n_k+1)-x_i(n_k)$ 表示脉冲时刻的突然变化，其中 k 为正整数，表示脉冲发生的次数．特别地，设 n_0 为初始时刻，同时规定一个脉冲最大间隔 $n_k-n_{k-1} \leqslant \tau_{\max}$，$u_i$ 为多智能体的一致性协议，其具体为：

$$u_i(n)=b\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j(n)-x_i(n))$$

式中：$b>0$ 为待设计的常数，称为控制增益．可以看出，该系统只在脉冲时刻 n_k 时才进行信息交换，与每步都进行系统交换的协议相比，大幅降低了能耗．

令 $y_i(n)=x_i(n)-\sum_{j=1}^{N}\omega_j x_j$，易得到 $Px(n)=y(n)$，其中 $x(n)$ 与 $y(n)$ 均为其对应的向量形式．如上，一个如下的误差系统可以被建立起来：

$$\begin{cases} y(n+1)=y(n)+sPF(x, n) & n \neq n_k \\ y(n_k+1)=y(n_k)-bLy(n_k) \end{cases}$$

式中：$F(x, n)$ 为 $f(x_i, n)$ 对应的向量形式．可以看到，当该系统的零点稳定时，原多智能体系统将达到一致．在此，我们给出几个假设．

假设 1　非线性函数满足利普希茨条件如

$$|f(x, n)-f(z, n)| \leqslant l_f |x-z|, \quad x, z \in \mathbb{R}$$

假设 2　对有向图 G，其拉普拉斯矩阵可对角化为 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\Gamma M \Gamma}^{-1}$，其中可逆矩阵 $\Gamma=(\omega, \gamma_2, \cdots, \gamma_N)^{\mathrm{T}}$，$M$ 为其对应特征值构成的对角矩阵．

令 $\tilde{y}(n)=\boldsymbol{Q\Gamma}y(n)$，其中 $Q=\mathrm{diag}(q_1, \cdots q_N)$ 为待设计的正定对角矩阵，$\tilde{y}_i(n)$ 为其对应的分量．特别地，有 $\tilde{y}_1(n) \equiv 0$．

$$\begin{cases} \tilde{y}_i(n+1)=\tilde{y}_i(n)+sq_i\gamma_i\tilde{F}(x, n) & n \neq n_k \\ \tilde{y}_i(n_k+1)=\tilde{y}_i(n_k)-bq_i\lambda_i(L)\tilde{y}_i(n_k) \end{cases}$$

式中：$\tilde{F}(x, n)=(f(x_1, n)-\sum_{i=1}^{N}\omega_i f(x_i, n), \cdots, f(x_N, n)-\sum_{i=1}^{N}\omega_i f(x_i, n))^{\mathrm{T}}$．容易看出，由于矩阵 $\boldsymbol{Q\Gamma}$ 可逆，$\tilde{y}(n)$ 与 $y(n)$ 具有相同的零点稳定性．

3　主要结果

定理 1　在假设 1 和假设 2 的前提下，当以下条件成立时，原多智能体系统能达到一致

$$\eta^{\tau_{\max}-1}\theta<1$$

$$\theta = \max_{i=2,3,\cdots,N}(|1-bq_i\lambda_i|)$$

$$\eta = \max_{i=2,3,\cdots,N}(1+2sq_il_f\sqrt{N}\|\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\|_\infty)$$

证 先考虑在无信息交流的时间内，有

$$\tilde{y}_i(n+1)=\tilde{y}_i(n)+sq_i\gamma_i\tilde{F}(x,n),\ i=2,3,\cdots,N$$

则容易得到

$$|\tilde{y}_i(n+1)|\leqslant|\tilde{y}_i(n)|+sq_i\sqrt{N}\|\tilde{F}(x,n)\|_\infty$$

又注意到

$$\begin{aligned}|f_i-\sum_{j=1}^N w_if(x_j,n)|\leqslant l_f\sum_{j=1}^N w_j|x_i(n)-x_j(n)|\leqslant\\ l_f|y_i(n)|+\|y(n)\|_\infty\sum_{j=1}^N w_j\leqslant\\ 2l_f\|y(n)\|_\infty\end{aligned}$$

综合以上可得在时有

$$\|\tilde{y}(n+1)\|_\infty\leqslant(1+2q_il_f\|\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\|_\infty)\|\tilde{y}(n)\|_\infty\leqslant\eta\|\tilde{y}(n)\|_\infty$$

考虑在 $n=n_1$ 时，有

$$\|\tilde{y}(n_1+1)\|_\infty\leqslant\theta\|\tilde{y}(n_1)\|_\infty$$

根据以上并递推，对 $n\in[n_k,n_{k+1}]$，容易得到

$$\|\tilde{y}(n)\|_\infty\leqslant\eta^{n-n_0-k}\theta^k\|\tilde{y}(n_0)\|_\infty\leqslant\eta^{\tau_{\max}-1}(\eta^{\tau_{\max}-1}\theta)^k\|\tilde{y}(n_0)\|_\infty$$

若上式满足定理中条件，则易看出对于 $n\to\infty$ 以及 $k\to\infty$，$\|\tilde{y}(n)\|_\infty$ 收敛到零点，进而得出该多智能体系统能达到一致. 由此证毕.

可以看出，对一个既定的非线性动力学来说，θ 的取值是关键因素. 而 θ 取决于控制增益和拓扑图结构. 同时，脉冲间隔的大小对其一致性起到了相反的作用. 所以，如何来设计脉冲间隔，控制增益以及拓扑图的结构是解决其一致性问题的关键.

4 结论与展望

本文研究了有向拓扑图下基于脉冲控制的离散非线性多智能体系统一致性问题. 通过构造误差系统和等价系统，将该一致性问题转化为了一个稳定性问题. 根据非线性离散系统的稳定性方法，得出了保证该系统收敛的充分条件. 然而在现代的应用中，固定脉冲时刻的协议已经不能满足人工智能的发展要求，因为其要求预设每一个控制时间. 我们将在后续的研究中考虑状态相关脉冲协议的情况，这种协议的控制时间是由状态系统本身决定的.

参考文献：

[1] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.

[2] LU X Q, LU R Q, CHEN S H, et al. Finite-Time Distributed Tracking Control for Multi-Agent Systems with a Virtual Leader [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I Regular Papers, 2013, 60(2): 352-362.

[3] 杨洪勇，张嗣瀛. 离散时间系统的多智能体的一致性 [J]. 控制与决策, 2009, 24(3): 413-416.

[4] 谭拂晓，关新平，刘德荣. 非平衡拓扑结构的多智能体网络系统一致性协议 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(10): 1087-1092.

[5] LI H Q, CHEN G, DONG Z Y, et al. Consensus Analysis of Multi-Agent Systems with Second-Order Nonlinear Dynamics and General Directed Topology: An Event-Triggered Scheme [J]. Information Sciences, 2016, 370(C): 598-622.

[6] FAN M C, CHEN Z Y, ZHANG H T. Semi-Global Consensus of Nonlinear Second-Order Multi-Agent Systems With Measurement Output Feedback [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(8): 2222-2227.

[7] 邵浩宇，胡爱花. 基于事件驱动控制的非线性多智能体的一致性 [J]. 信息与控制，2015，44(1)：38－42.

[8] 刘　伟，黄　捷. 一类含任意大不确定参数的非线性多智能体的协同输出调节问题 [J]. 中国科学：数学，2016，46(10)：1473－1486.

[9] LU J Q，HO D W C，CAO J D. A Unified Synchronization Criterion for Impulsive Dynamical Networks [J]. Automatica，2010，46(7)：1215－1221.

[10] LIU B，LU W L，CHEN T P. Pinning Consensus in Networks of Multi-Agents Via a Single Impulsive Controller [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems，2013，24(7)：1141－1149.

[11] 李　美，陈其工，魏利胜. 一类复杂动态网络的脉冲同步研究 [J]. 重庆科技学院学报(自然科学版)，2016，18(1)：121－124.

[12] 蒲　浩，刘衍民，黄建文，等. 具有非线性脉冲效应和反应扩散项的神经网络的指数滞后同步 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(11)：86－94.

[13] JIANG H B，BI Q S. Impulsive Synchronization of Networked Nonlinear Dynamical Systems [J]. Physics Letters A，2010，374(27)：2723－2729.

[14] GUAN Z H，WU Y H，FENG G. Consensus Analysis Based on Impulsive Systems in Multiagent Networks [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I Regular Papers，2012，59(1)：170－178.

[15] WANG Y W，YI J W. Consensus in Second-Order Multi-Agent Systems Via Impulsive Control Using Position-only Information with Heterogeneous Delays [J]. Control Theory and Applications Iet，2014，9(3)：336－345.

Consensus of Discrete-Time Nonlinear Multi-agent Systems via Impulsive Protocols in Directed Networks Topology

HAN Yi-yan，　ZHANG　Hao，　XU Zi-qiang

School of Electronic and Information Engineering，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，the consensus problem of multi-agent systems with discrete-time nonlinear dynamics via impulsive protocols in directed networks topology has been investigated. The mathematical preliminaries are firstly given and then the consensus problem is transformed into a stability problem. The sufficient conditions to guarantee the consensus is obtained by the method of mathematical recursion，which reveals the complex relationship among the impulsive intervals，control gain and the structure of the networks topology.

Key words：Impulsive Protocols；discrete-time nonlinear systems；consensus；directed topology

责任编辑　包　颖　崔玉洁