DOI：10. 13718/j. cnki. xsxb. 2018. 05. 001

具有隐性感染的登革热模型稳定性分析[①]

李　艳，　王稳地，　周爱蓉，　何　楠

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 建立了一类具有隐性感染和垂直传播的登革热模型. 首先通过构造 Lyapunov 函数得到了无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的；进一步利用第二加性复合矩阵等理论得到了地方性平衡点 E^* 是全局渐近稳定的条件.

关　键　词： 隐性感染；Lyapunov 函数；复合矩阵；全局渐近稳定

中图分类号： O175. 13　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000 - 5471(2018)05 - 0001 - 05

登革热(DF) 是一种最常见媒介传播的疾病，它是由登革病毒引起的急性传染病. 根据文献[1] 可知人体感染 DF 病毒后，部分为隐性感染，部分为显性感染. 目前为止，已有许多数学模型用来研究 DF 病毒传播机制，但在这些模型中，往往关注发病人群(显性感染者) 而忽视隐性感染人群. 在带有潜伏者 DF 模型中，被感染的蚊子叮咬后的易感者全部进入潜伏期. 然而本文建立的带有隐性感染者 DF 模型中，被感染的蚊子叮咬后的易感者部分转化成隐性感染者另一部分转化成显性感染者，被感染的蚊子叮咬后的隐性感染者部分转化成显性感染者. 根据文献[2] 可知感染的蚊子可将 DF 病毒传给其后代. 本文参照文献[3] 建立了带有隐性感染和垂直传播的登革热(DF) 型并研究其动力学性态.

我们设 $S_h(t),C_h(t),I_h(t)$ 分别表示 t 时刻人类中易感染者、隐性感染者、显性感染者的数量，同样地设 $M_S(t),M_I(t)$ 分别表示 t 时刻易感染的蚊子、感染的蚊子的数量. 建立如下模型：

$$
\begin{aligned}
S'_h(t) &= \lambda N(t) - \beta_h S_h(t) M_I(t)/N(t) - d_h S_h(t) + \mu I_h(t)\\
C'_h(t) &= p\beta_h S_h(t) M_I(t)/N(t) - d_h C_h(t) - (1-p)\beta_h C_h(t) M_I(t)/N(t)\\
I'_h(t) &= (1-p)\beta_h (C_h(t) + S_h(t)) M_I(t)/N(t) - \mu I_h(t) - d_h I_h(t)\\
M'_S(t) &= \gamma M_S(t) + \gamma(1-q) M_I(t) - \beta_m(\alpha C_h(t) + I_h(t)) M_S(t)/N(t) - d_m M_S(t)\\
M'_I(t) &= \gamma q M_I(t) + \beta_m(\alpha C_h(t) + I_h(t)) M_S(t)/N(t) - d_m M_I(t)
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中：系统(1) 中的 λ,d_h 分别表示人口出生率和死亡率；μ 表示显性感染者(人类) 转化为易感染者速率；β_h 表示 DF 病毒从感染的蚊子传染给人类的速率；p 是隐性感染的比例($0<p<1$)，$1-p$ 是显性感染的比例；α 表示隐性感染者体内毒性强弱程度($0<\alpha<1$)；γ,d_m 分别表示蚊子出生率和死亡率；β_m 表示 DF 病毒从感染人类传染给蚊子的速率；q 表示病毒由蚊子垂直传给其后代比例($0<q<1$). 假设

(H1) 人口出生率等于死亡率. 令 $S(t)S_h(t)/N$，$C(t)=C_h(t)/N$，$I(t)=I_h(t)/N$.

(H2) 蚊子出生率和死亡率平衡. 令 $M_s(t)=M_S(t)/M$，$M_i(t)=M_I(t)/M$，$k=M/N$.

基于以上假设，可以将模型(1) 简化为以下形式：

$$C'(t) = kp\beta_h(1-C(t)-I(t))M_I(t) - \lambda C - k(1-p)\beta_h C(t) M_i(t)$$

---

① 收稿日期：2017 - 09 - 01

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11571284).

作者简介：李　艳 (1992 -)，女，安徽阜阳人，硕士研究生，主要从事生物数学研究.

通信作者：王稳地，教授，博士研究生导师.

$$I'(t)=k(1-p)\beta_h(1-I(t))M_i(t)-\mu I(t)-\lambda I(t)$$
$$M'_i(t)=\gamma q M_i(t)+\beta_m(\alpha C(t)+I(t))(1-M_i(t))-\gamma M_i(t)$$

我们在 $\Omega=\{(C, I, M_i)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leqslant C(t)+I(t)\leqslant 1, 0\leqslant M_i(t)\leqslant 1\}$ 区域中讨论系统(2)解的性态. 易证 Ω 是系统(2)的正向不变集.

1 基本再生数和平衡点

根据下一代矩阵[4]可求得基本再生数

$$R_0=\sqrt{k(1-p)\beta_m\beta_h/[\gamma(1-q)(\lambda+\mu)]+kp\alpha\beta_m\beta_h/[\gamma(1-q)\lambda]}$$

系统(2)存在无病平衡点 $E_0(0, 0, 0)$. 当 $R_0>1$ 时，系统(2)存在唯一的感染平衡点 $E^*(C^*, I^*, M_i^*)$，其中

$$C^*=p(\mu+\lambda)I^*(1-I^*)/[\lambda(1-p)+(p\lambda+\mu)I^*]$$
$$M_i^*=(\lambda+\mu)I^*/k(1-p)\beta_h(1-I^*)$$
$$I^*=(-B+\sqrt{B^2-4AD})/2A$$
$$A=\beta_h[(p\lambda+\mu)-\alpha p(\mu+\lambda)][k(1-p)\beta_h+\lambda+\mu]>0$$
$$B=\beta_m[k(1-p)\beta_h+\lambda+\mu][\alpha p(\lambda+\mu)+\lambda(1-p)]+\lambda(1-q)(\lambda+\mu)(p\lambda+\mu)-k(1-p)\beta_m\beta_h[(p\lambda+\mu)-\alpha p(\mu+\lambda)]$$
$$D=\gamma(1-q)\lambda(\lambda+\mu)(1-p)(1-R_0^2)<0$$

2 稳定性分析

定理1 当 $R_0<1$ 时，系统(2)的无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.

证 定义 Lyapunov 函数

$$V(C, I, M_i)=(\alpha\beta_m/\lambda)C+[\beta_m/(\mu+\lambda)]I+M_i$$

沿系统(2)轨线求导可得

$$V'=\gamma(1-q)(R_0^2-1)M_i-(\alpha k\beta_h\beta_m/\lambda+\alpha\beta_m)CM_i-(\alpha pk\beta_m\beta_h/\lambda+(1-p)k\beta_m\beta_h/(\lambda+\mu)+\beta_m)IM_i$$

当 $R_0<1$ 时，$V'\leqslant 0$. 设 $E_1=\{(C, I, M_i)\mid V'=0\}$，当 $V'=0$ 时，得到 $M_i=0$. 结合系统(2)第三个方程得 $C=0$，$I=0$. 因此得到 E_1 的最大不变集为 $\{(C, I, M_i)\mid C=0, I=0, M_i=0\}$. 根据文献[5]得：当 $R_0<1$ 时，无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.

定理2 当 $R_0>1$ 时，系统(2)一致持续生存.

证 关于系统(2)是一致持续生存的证明参照文献[6]的相关知识. 定义 $X_1=\mathrm{Int}\Omega$，$X_2=\partial\Omega$. 只需证 $E_0(0, 0, 0)$ 在集合 X_1 是弱排斥即可. 不妨假设存在满足初始条件 $(C(0), I(0), M_i(0))$ 的正解 $(C(t), I(t), M_i(t))$. 当 $t\to\infty$ 时，有 $(C(t), I(t), M_i(t))\to E_0$. 则当 t 充分大，有 $0\leqslant C(t)<\varepsilon_1$，$0\leqslant I(t)<\varepsilon_2$，$0\leqslant M_i(t)<\varepsilon_3$，其中 $\varepsilon_i(i=1,2,3)$ 是充分小正数. 令 $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，可知 ε 是充分小的正数，则有 $p-\varepsilon>0$. 由上述不等式和系统(2)知

$$C'>-\lambda C+k(p-\varepsilon)\beta_h M_i$$
$$I'>-(\mu+\lambda)I+k(1-p)(1-\varepsilon)\beta_h M_i$$
$$M'_i>\alpha(1-\varepsilon)\beta_m C+(1-\varepsilon)\beta_m I-\gamma(1-q)M_i$$

考虑下面的系统

$$\begin{aligned}u'_1&=-\lambda u_1+k(p-\varepsilon)\beta_h u_3\\u'_2&=-(\mu+\lambda)u_2+k(1-p)(1-\varepsilon)\beta_h u_3\\u'_3&=\alpha(1-\varepsilon)\beta_m u_1+(1-\varepsilon)\beta_m u_2-\gamma(1-q)u_3\end{aligned}\tag{3}$$

系统(3)可以写成以下形式

$$\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{U} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{U} = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$，矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & k(p-\varepsilon)\beta_h \\ 0 & -(\mu+\lambda) & k(1-p)(1-\varepsilon)\beta_h \\ \alpha(1-\varepsilon)\beta_m & (1-\varepsilon)\beta_m & -\gamma(1-q) \end{pmatrix}$$

定义

$$R_0^{\varepsilon} = \sqrt{k(1-p)(1-\varepsilon)^2\beta_m\beta_h/[\gamma(1-q)(\lambda+\mu)] + k(p-\varepsilon)(1-\varepsilon)\alpha\beta_m\beta_h/[\gamma(1-q)\lambda]}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应特征方程的特征值为 $\omega_i(i=1,2,3)$，由根与系数关系知 $\omega_1+\omega_2+\omega_3=-a_1<0$，$\omega_1\omega_2\omega_3=-a_3$，其中 $a_1=\lambda+(\mu+\lambda)+\gamma(1-q)$，$a_3=\lambda(\mu+\lambda)\gamma(1-q)[1-(R_0^{\varepsilon})^2]$. 由 ε 充分小知，当 $R_0>1$ 时，有 $R_0^{\varepsilon}>1$. 所以当 $R_0>1$ 时，有 $\omega_1\omega_2\omega_3=-a_3>0$. 故当 $R_0>1$ 时，特征值 $\omega_i(i=1,2,3)$ 一个是正的，两个具有负实部. 设 ω_1 是正特征值，$\omega_i(i=2,3)$ 是具有负实部特征值. ω_1 对应特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=(v_{11}, v_{12}, v_{13})^{\mathrm{T}}$，其中 $v_{11}=k(p-\varepsilon)\beta_h$，$v_{12}=k(1-p)(1-\varepsilon)\beta_h(\omega_1+\lambda)/(\omega_1+\mu+\lambda)$，$v_{13}=\omega_1+\lambda$. 因 $\omega_1>0$，则 $\boldsymbol{v}_1=(v_{11}, v_{12}, v_{13})^{\mathrm{T}}$ 是正特征向量. 令 l 为充分小正数，使 $lv_{11}<C(0)$，$lv_{12}<I(0)$，$lv_{13}<M_i(0)$，且满足系统(4)初始条件 $u_1(0)=lv_{11}$，$u_2(0)=lv_{12}$，$u_3(0)=lv_{13}$. 知 $\boldsymbol{U}(t)=l\exp(\omega_1 t)\boldsymbol{v}_1$ 是系统(4)满足初始条件 $(u_1(0), u_2(0), u_3(0))^{\mathrm{T}}$ 的一个解. 系统(3)任意解处 Jacobian 矩阵为 $\boldsymbol{A}$，其所有非对角元素均为非负，则系统(3)为拟单调增系统. 根据文献[7]中推论 1.1 知，当 $t>0$ 时，有 $\boldsymbol{Y}(t)>\boldsymbol{U}(t)$，其中 $\boldsymbol{Y}(t)=(C(t), I(t), M_i(t))^{\mathrm{T}}$. 由 $l>0$，$\omega_1>0$ 及 $\boldsymbol{v}_1$ 为正特征向量，知当 $t\to\infty$ 时，有 $\boldsymbol{U}(t)\to\infty$，进而得 $\boldsymbol{Y}(t)\to\infty$. 这与假设矛盾. 即定理得证.

本文据文献[8]用几何方法研究感染平衡点 E^* 全局稳定性. 设 $x \longmapsto f(x) \subset \mathbb{R}^n$ 是开集 $\widetilde{E} \subset \mathbb{R}^n$ 上光滑向量场. 微分系统 $x'=f(x)$，$x(0)=x_0$. 设 $x(t, 0, x_0)$ 是该系统解. 若存在紧吸引集 $K \subset \widetilde{E}$. 令 $|\cdot|$ 是在 $\mathbb{R}^N$ 中范数，$\mu(\boldsymbol{X})$ 是 $|\cdot|$ 对应 Lozinskiĭ 测度. 定义 $q_2 = \lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{x_0\in K} 1/t\int_0^t \mu(\boldsymbol{X}(x(s, x_0)))\mathrm{d}s$，其中 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{Q}^{-1} + \boldsymbol{Q}(\partial f^{[2]}/\partial x)\boldsymbol{Q}^{-1}$，$x \longmapsto \boldsymbol{Q}(x)$ 是 $\binom{n}{2}\times\binom{n}{2}$ 矩阵值函数，矩阵 $\boldsymbol{Q}_f$ 是由矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 每一元素 q_{ij} 沿 f 方向导数取代得，$\partial f^{[2]}/\partial x$ 是 Jacobian 矩阵 $\partial f/\partial x$ 的第二加性复合矩阵.

定理 3　当 $R_0>1$，$0<p<\min\{\mu/2k\beta_h, 1/2\}$，$0<\alpha<\min\{c/(1-c), 1\}$ 时，系统(2)的地方性平衡点 E^* 在 Ω 内是全局渐近稳定的.

证　根据文献[8]定理 3.5 下证 $q_2<0$ 即可. 模型(2)任意解处的 Jacobian 矩阵的第二加性复合矩阵为

$$\boldsymbol{J}^{[2]} = \begin{pmatrix} -m & k(1-p)\beta_h(1-I) & k\beta_h C - kp\beta_h(1-I) \\ \beta_m(1-M_i) & -n & -kp\beta_h M_i \\ -\alpha\beta_m(1-M_I) & 0 & -r \end{pmatrix}$$

其中：

$$m = \lambda + k\beta_h M_i + (1-p)k\beta_h M_i + (\lambda+\mu)$$

$$n = \lambda + k\beta_h M_i + \gamma(1-q) + \beta_m(\alpha C + I)$$

$$r = (1-p)k\beta_h M_i + (\lambda+\mu) + \gamma(1-q) + \beta_m(\alpha C + I)$$

定义 $\boldsymbol{Q}(t)=\mathrm{diag}(1, I/M_i, I/M_i)$，用矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 每一个元素 q_{ij} 沿系统(2)方向导数取代得到矩阵 $\boldsymbol{Q}_f=\mathrm{diag}(0, I'/M_i - IM'_i/M_i^2, I'/M_i - IM'_i/M_i^2)$. 定义矩阵

$$\boldsymbol{X} := \boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{Q}^{-1} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^{[2]}\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} \\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{X}_{11}=-m$$
$$\boldsymbol{X}_{12}=(k(1-p)\beta_h(1-I)M_i/I,[k\beta_h C-kp\beta_h(1-I)]M_i/I)$$
$$\boldsymbol{X}_{21}=(\beta_m(1-M_i)I/M_i,-\alpha\beta_m(1-M_i)I/M_i)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{X}_{22}=\begin{pmatrix} I'/I-M'_i/M_i-n & -kp\beta_h M_i \\ 0 & I'/I-M'_i/M_i-r \end{pmatrix}$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中定义范数 $|(u,v,w)|=\max\{|u|,|v|+|w|\}$. $\mu(\boldsymbol{X})$ 为这个范数对应的 Lozinskiǐ 测度，则可参照文献[9]用估计 $\mu(\boldsymbol{X})\leqslant\max\{g_1,g_2\}$，其中 $g_1=\mu_1(\boldsymbol{X}_{11})+|\boldsymbol{X}_{12}|$，$g_2=|\boldsymbol{X}_{21}|+\mu_1(\boldsymbol{X}_{22})$，我们用 $|\boldsymbol{X}_{12}|$ 和 $|\boldsymbol{X}_{21}|$ 表示在 $\mathbb{R}^2$ 中相应 l_1 向量范数的矩阵范数，而 $\mu_1(\boldsymbol{X})$ 为这个范数对应 Lozinskiǐ 测度. 因此有

$$\mu_1(\boldsymbol{X}_{11})=-m$$
$$|\boldsymbol{X}_{21}|=\beta_m(1-M_i)I/M_i+\alpha\beta_m(1-M_i)I/M_i$$

由 $0<p<1/2$，可得

$$|\boldsymbol{X}_{12}|=\max\{k(1-p)\beta_h(1-I)M_i/I,k\beta_h[p(1-I)-C]M_i/I\}=k(1-p)\beta_h(1-I)M_i/I$$

由 $0<p<\mu/2k\beta_h$，可得

$$\mu_1(\boldsymbol{X}_{22})=\max\{I'/I-M'_i/M_i-n,I'/I-M'_i/M_i-r+|-kp\beta_h M_i|\}=I'/I-M'_i/M_i-n$$

由系统(2)的第二个和第三个方程知

$$k(1-p)\beta_h(1-I)M_i/I=\mu+\lambda+I'/I$$
$$\beta_m(\alpha C+I)(1-M_i)/M_i=\gamma(1-q)+M'_i/M_i$$

由于 $R_0>1$ 时，系统(2)一致持续生存，因此存在 $c>0$，$\bar{t}>0$. 当 $t>\bar{t}$，有 $M_i>c$，$I>c$，则

$$g_1=I'/I-\lambda-k\beta_h M_i-k(1-p)\beta_h M_i<I'/I-\lambda-k\beta_h c-k(1-p)\beta_h c$$
$$g_2\leqslant I'/I-\lambda-k\beta_h M_i-\beta_m I(1-\alpha/M_i+\alpha)\leqslant I'/I-\lambda-k\beta_h c-\beta_m I(1-\alpha/c+\alpha)$$

由 $0<\alpha<c/(1-c)$，可得 $\min\{k(1-p)\beta_h c,\beta_m c(1-\alpha/c+\alpha)\}>0$. 令 $\upsilon=\lambda+k\beta_h c+\min\{k(1-p)\beta_h c,\beta_m c(1-\alpha/c+\alpha)\}$，有 $\upsilon>0$，则

$$\mu(\boldsymbol{X})\leqslant\sup\{g_1,g_2\}\leqslant I'/I-\upsilon$$

设系统(2)过初始值 $(C(0),I(0),M_I(0))\in\widetilde{D}$ 的任意正解为 $(C(t),I(t),M_i(t))$. 当 $t>\bar{t}$ 时，我们有

$$1/t\int_0^t\mu(\boldsymbol{X})\mathrm{d}s\leqslant1/t\int_0^{\bar{t}}\mu(\boldsymbol{X})\mathrm{d}s+1/t\ln(I(t)/I(\bar{t}))-[(t-\bar{t})/t]\upsilon$$

因此

$$q_2=\lim_{t\to\infty}\sup\sup_{x_0\in\widetilde{D}}1/t\int_0^t\mu(\boldsymbol{X}(x(s,x_0)))\mathrm{d}s\leqslant-\upsilon<0$$

所以当 $R_0>1$，$0<p<\min\{\mu/2k\beta_h,1/2\}$，$0<\alpha<\min\{c/(1-c),1\}$ 时，E^* 在 Ω 内是全局渐近稳定的.

3 结 论

本文建立了一类带有隐性感染和垂直传播的登革热模型. 根据下一代矩阵得到了基本再生数的表达式. 通过 Lyapunov 函数得到了当 $R_0<1$ 时，E_0 是局部渐近稳定的. 利用第二加性复合矩阵等理论得到了当 $R_0>1$，$0<p<\min\{\mu/2k\beta_h,1/2\}$，$0<\alpha<\min\{c/(1-c),1\}$ 时，地方性平衡点 E^* 是全局渐近稳定的.

参考文献：

[1] 张复春. 登革热的流行特点及治疗 [J]. 医学与哲学：人文社会医学版，2010，31(18)：21－23.

[2] GUO X，ZHAO T，DONG Y，et al. Survival and Replication of Dengue-2 Virus in Diapausing Eggs of Aedes Blbopictus (Diptera：Culicidae) [J]. J Med Entomol，2007，44(3)：492－497.

[3] BOOTS M，GREENMAN J，ROSS D，et al. The Population Dynamical Implications of Covert Infections in Host-Microparasite Interactions [J]. J Anim Ecol，2003，72(6)：1064－1072.

[4] DRIDSSCHE P，WATMOUGH J. Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission [J]. J Math Biosci，2002，180(1－2)：29－48.

[5] HALE J，VERDUYN LUNEL S. Introduction to Functional-Dikerential E-Quations [M]//Applied Mathematical Sciences. New York：Springer-Verlag，1993.

[6] THIEME H R. Persistence under Relaxed Point-Dissipativity (with Application to an Endemic Model) [J]. Siam J Math Anal，1993，24(2)：407－435.

[7] 马知恩，周义仓，李承治. 常微分方程定性与稳定性方法 [M]. 北京：科学出版社，2015.

[8] LI M Y，MULDOWNEY J S. A Geometric Approach to the Global-Stability Problems [J]. Siam J Math Anal，1996，27(4)：1070－1083.

[9] MARTIN R H. Logarithmic Norms and Projections Applied to Linear Differential Systems [J]. J Math Anal Appl，1974，45(2)：432－454.

Stability Analysis of Dengue Model with Covert Infection

LI　Yan，　WANG Wen-di，　ZHOU Ai-rong，　HE　Nan

School of Mathematics and Statistic，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，a dengue model with covert infection and vertical transmission has been formulated and studied. First，by constructing a Lyapunov function，the disease-free equilibrium is shown to be globally asymptotically stable. Moreover，by using second additive compound matrices，we obtain the conditions of the globally asymptotical stabilities of the endemice quilibrium.

Key words：covert infection；Lyapunov function；compound equations；global stability

责任编辑　张　枸