第 43 卷 第 5 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2018 年 5 月
Vol. 43 No. 5　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　May. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.05.002

具有下渗反馈效应的水-植物模型的动力学分析①

周爱蓉，　王稳地，　李　艳，　何　楠

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：建立了具有 Holling-II 功能反应和下渗反馈效应的水-植物模型. 首先通过分析平衡点的局部稳定性，得到了 Hopf 分支的产生条件. 然后通过构造 Dulac 函数得到了极限环的不存在条件. 最后得到了裸土平衡点和正平衡点的全局稳定性.

关 键 词：水-植物模型；稳定性；Hopf 分支

中图分类号：**O175**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000-5471(2018)05-0006-05

土地沙漠化是我国当前最为严重的生态环境问题之一，有限的水资源与动植物或微生物等水资源消耗者之间的生态平衡被破坏是土地沙漠化产生的主要原因之一. 从植被覆盖到土地荒漠化的过程中会出现植被斑图模式，而其形成的主要原因是植被生长和水输入之间的正反馈效应，其中包括下渗反馈，即由于植被密度变大而导致地表水下渗率增加[1]. 产生此效应的原因是植物生长能局部改善其周围土壤环境使土质变松，进而增加水的下渗率，下渗率越大，土壤中可用水越多，植物的平均死亡率越小. 相关研究人员建立了关于多种反馈效应之间相互作用的模型[2-3].

文献[2] 的水-植物模型具有下渗反馈效应，但植物对水的功能反应是线性的，并未考虑到植物对水吸收的饱和作用. 本文在此基础上建立具有 Holling-II 功能反应且有下渗反馈效应的水-植物模型.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= R-\frac{aw}{1+cw}b-dw\\ \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} &= \lambda\frac{aw}{1+cw}b-\mu(b)b\end{aligned}\tag{1}$$

其中：w 和 b 分别表示水密度与植物密度，R 表示降雨量，dw 代表由于过滤，蒸发导致的水份损失，$\mu(b)$ 代表植物的平均死亡率. 我们考虑如下形式的植物平均死亡率，

$$\mu(b)=\begin{cases}\mu_0+\mu_1, & 0<b<b_0\\ \mu_0+\dfrac{\mu_1 b_0}{b} & b\geqslant b_0\end{cases}$$

其中 μ_0 和 μ_1 均为正常数. 当植物密度小于 b_0 时，其平均死亡率不变. 当植物密度大于等于 b_0 时，考虑到植物对水的下渗反馈，平均死亡率 $\mu(b)$ 是关于植物密度 b 的单调递减函数，但其平均死亡率不会低于 μ_0.

引理 1[4]　$M=\left\{(w,b):0<w\leqslant\dfrac{R}{d},\ 0\leqslant b\leqslant\dfrac{\lambda R(d+\mu_0)}{d\mu_0}\right\}$ 是系统(1) 的正向不变集.

1 平衡点

系统(1) 始终存在裸土平衡点 $E_0=\left(\dfrac{R}{d},0\right)$. 若 $0<b<b_0$，当 $0<R_*<R<R^*$ 时，存在正平衡点

① 收稿日期：2017-09-02

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11571284).

作者简介：周爱蓉 (1993-)，女，山西运城人，硕士研究生，主要从事生物数学研究.

通信作者：王稳地，教授，博士研究生导师.

$E_1=(w_1,b_1)$，其中

$$R_*=\frac{(\mu_0+\mu_1)d}{\lambda a-(\mu_0+\mu_1)c}\qquad R^*=\frac{(\mu_0+\mu_1)b_0}{\lambda}+\frac{(\mu_0+\mu_1)d}{\lambda a-(\mu_0+\mu_1)c}$$

$$w_1=\frac{\mu_0+\mu_1}{\lambda a-(\mu_0+\mu_1)c}\qquad b_1=\frac{\lambda[\lambda Ra-(\mu_0+\mu_1)(d+cR)]}{(\mu_0+\mu_1)[\lambda a-(\mu_0+\mu_1)c]}$$

当 $b\geqslant b_0$ 时，系统(1) 的正平衡点满足

$$\begin{aligned}&R-\frac{aw}{1+cw}b-dw=0\\&\lambda\frac{aw}{1+cw}b-\mu_0 b-\mu_1 b_0=0\end{aligned}\tag{2}$$

由(2) 式可知

$$Aw^2+Bw+R\mu_0=0\tag{3}$$

其中

$$A=\lambda ad-\mu_0 cd\qquad B=\mu_0 cR-\lambda aR+\mu_1 b_0 a-d\mu_0$$

经过简单的运算可得 $b\geqslant b_0$ 当且仅当 $w\leqslant\bar{w}$，其中

$$\bar{w}=\frac{\lambda R-\mu_1 b_0-\mu_0 b_0}{\lambda d}$$

当 $A=0$ 时，有 $w<0$ 或 $w>\bar{w}$，因此系统(1) 无正平衡点.

当 $A\neq0$，$\Delta=B^2-4AR\mu_0\geqslant0$ 时，方程(3) 有两个解 w_2 和 w_3.

$$w_2=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}\qquad w_3=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}\tag{4}$$

令平衡点 $E_i=(w_i,b_i)(i=2,3)$，其中 $b_i=\dfrac{\lambda R-\mu_1 b_0-\lambda d w_i}{\mu_0}$. 当 $0<w_i\leqslant\bar{w}$ 时，E_i 是系统(1) 的正平衡点. 由二次函数的相关知识可得到引理 2.

引理 2　当 $0<R_*<R<R^*\leqslant R_5$ 或 $0<R_*<R<\max\{R_3,R_5\}<R^*$ 时，E_1 是唯一的正平衡点. 正平衡点 E_2,E_3 的存在性情况见表 1.

表 1　正平衡点的存在性

条件	E_2 的存在条件	E_3 的存在条件
$\lambda a\leqslant\mu_0 c$	无	无
$\lambda a=(\mu_0+\mu_1)c$	$R\geqslant R_3$	$R\geqslant R_3$
$\mu_0 c<\lambda a<(\mu_0+\mu_1)c$，$\max\{R_1,R_4,R_5\}\geqslant R_2$	$R\geqslant R_3$	$R\geqslant R_3$
$\mu_0 c<\lambda a<(\mu_0+\mu_1)c$，$\max\{R_1,R_4,R_5\}<R_2$	$\max\{R_1,R_4,R_5\}<R\leqslant R_2$ 或 $R\geqslant R_3$	$\max\{R_1,R_4,R_5\}<R\leqslant R_2$ 或 $R\geqslant R_3$
$\lambda a>(\mu_0+\mu_1)c$，$R^*>R_5$	$\max\{R_3,R_5\}\leqslant R\leqslant R^*$	$R\geqslant\max\{R_3,R_5\}$
$\lambda a>(\mu_0+\mu_1)c$，$R^*\leqslant R_5$	无	$R\geqslant R^*$

表 1 中相应参数如下定义：

$$R_1=\frac{(\mu_0+\mu_1)b_0}{\lambda}\qquad R_2=\frac{(\sqrt{a\mu_1 b_0}-\sqrt{d\mu_0})^2}{\lambda a-\mu_0 c}\qquad R_3=\frac{(\sqrt{a\mu_1 b_0}+\sqrt{d\mu_0})^2}{\lambda a-\mu_0 c}$$

$$R_4=\frac{a\mu_1 b_0-d\mu_0}{\lambda a-\mu_0 c}\qquad R_5=\frac{2(\mu_0+\mu_1)b_0}{\lambda}+\frac{d\mu_0-a\mu_1 b_0}{\lambda a-\mu_0 c}$$

2　稳定性分析

由平衡点 Jacobian 矩阵易得定理 1.

定理1 (i) 当 $\lambda a \leqslant (\mu_0+\mu_1)c$ 或 $0<R<R_*$ 时，裸土平衡点 E_0 是局部渐近稳定的；当 $0<R_*<R$ 时，E_0 不稳定.

(ii) 若存在正平衡点 E_1，则其局部渐近稳定.

定理2 若存在正平衡点 E_3，当 $\eta<0$ 时，E_3 局部渐近稳定；当 $\eta>0$ 时，E_3 不稳定. 当 $\eta=0$ 系统(1) 产生 Hopf 分支. 若存在正平衡点 E_2，则 E_2 是鞍点，其中

$$\eta=-2RA^2-2(\lambda a-\mu_0 c-cd)\mu_0 RA+[\mu_0 A+(\lambda a-\mu_0 c-cd)B](\sqrt{B^2-4\mu_0 RA}+B)$$

证 当 $b \geqslant b_0$ 时，系统(1) 在正平衡点 E_3 的 Jacobian 矩阵是

$$\boldsymbol{J}_{E_3}=\begin{pmatrix} -\dfrac{ab_3}{(1+cw_3)^2}-d & -\dfrac{aw_3}{1+cw_3} \\ \dfrac{\lambda ab_3}{(1+cw_3)^2} & \dfrac{\lambda aw_3}{1+cw_3}-\mu_0 \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{J}_{E_3}$ 对应特征方程的特征值为 λ_1，λ_2，有

$$\lambda_1+\lambda_2=\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}_{E_3})=\frac{1}{w_3(1+cw_3)}[(\lambda a-\mu_0 c-cd)w_3{}^2-\mu_0 w_3-R]=\frac{1}{w_3(1+cw_3)}\eta$$

$$\lambda_1\lambda_2=\det(\boldsymbol{J}_{E_3})=\frac{1}{w_3(1+cw_3)}[(\mu_0 cd-\lambda ad)w_3^2+R\mu_0]>0$$

因此若存在正平衡点 E_3，当 $\eta<0$ 时，特征值 λ_1,λ_2 均具有负实部，E_3 局部渐近稳定. 当 $\eta>0$ 时，特征值 λ_1,λ_2 均具有正实部，E_3 不稳定. 当 $\eta=0$ 时，E_3 的特征值有一对纯虚根. 且有

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}_{E_3}))}{\mathrm{d}\eta}\Big|_{\eta=0}=\frac{1}{2A^2 w(1+cw)}>0$$

因此 $\eta=0$ 是系统的 Hopf 分支点. 同理可得正平衡点 E_2 的局部稳定性情况.

定理3 当 $\lambda a \leqslant \mu_0 c$ 或 $0<R<\dfrac{\mu_0 d}{\lambda a-\mu_0 c}$ 时，裸土平衡点 E_0 全局渐近稳定.

证 由引理1知，存在时间 $T_1>0$ 使得当 $t>T_1$ 时，有 $w(t)\leqslant \dfrac{R}{d}$. 则当 $t>T_1$ 时，若 $0<b<b_0$，有

$$b'(t)=b(t)\left(\frac{\lambda aw}{1+cw}-\mu_0-\mu_1\right)\leqslant b(t)\left(\frac{\lambda aR}{d+cR}-\mu_0-\mu_1\right)$$

若 $b\geqslant b_0$，有

$$b'(t)=b(t)\left(\frac{\lambda aw}{1+cw}-\mu_0-\frac{\mu_1 b_0}{b}\right)\leqslant b(t)\left(\frac{\lambda aR}{d+cR}-\mu_0\right)$$

因此当 $\dfrac{\lambda aR}{d+cR}<\mu_0$ 时，有 $\lim\limits_{t\to+\infty} b(t)=0$. 从而存在时间 $T_2>0$ 使得当 $t>T_2$ 时，有 $b(t)<\varepsilon$，且

$$R-(a\varepsilon+d)w(t)\leqslant w'(t)\leqslant R-dw(t) \tag{5}$$

所以 $\lim\limits_{t\to+\infty} w(t)=\dfrac{R}{d}$. 由定理1知当 $\dfrac{\lambda aR}{d+cR}<\mu_0$ 时，E_0 局部渐近稳定. 根据文献[4]可知当 $\lambda a\leqslant \mu_0 c$ 或 $0<R<\dfrac{\mu_0 d}{\lambda a-\mu_0 c}$ 时，裸土平衡点 E_0 全局渐近稳定.

如果系统(1) 无极限环且 E_1 是唯一的正平衡点. 那么正平衡点 E_1 全局渐近稳定. 本文采用 Dulac 函数的方法得到系统(1) 极限环不存在的条件. 一般而言 Dulac 函数的方法适用于光滑的向量场. 虽然系统(1) 在 $b=b_0$ 处不光滑，但 Dulac 函数的方法同样适用[5]. 将系统(1) 右边的式子用 F,G 表示.

定理4 当 $0<R\leqslant R'$ 或 $\mu_1<d$，$R\geqslant \max\{0,R''\}$ 时，系统(1) 不存在极限环，其中

$$R'=d-\mu_1+\frac{(\mu_0+\mu_1)b_0}{\lambda},\ R''=\frac{d}{c}\sqrt{\frac{\mu_1 b_0 a}{\mu_0(d-\mu_1)}}-\frac{d}{c}$$

证 根据文献[6-7]定义如下形式的 Dulac 函数 $D(w,b)=s(w)r(b)$，其中 $s(w)$ 和 $r(b)$ 待定，则

当 $0<b<b_0$ 时沿系统(1)的解，有

$$\frac{\partial(DF)}{\partial w}+\frac{\partial(DG)}{\partial b}=D(w,b)\Big[-\frac{ab}{(1+cw)^2}-d+\frac{\lambda aw}{1+cw}-\mu_0-\mu_1+\Big(R-\frac{aw}{1+cw}b-dw\Big)\frac{s'(w)}{s(w)}+\Big(\frac{\lambda aw}{1+cw}b-\mu_0 b-\mu_1 b\Big)\frac{r'(b)}{r(b)}\Big] \tag{6}$$

设 $s(w)=\mathrm{e}^{kw}$，其中 k 为一待定常数，则$\frac{s'(w)}{s(w)}=k$，则(6)式简化为

$$\frac{\partial(FD)}{\partial w}+\frac{\partial(DG)}{\partial b}=D(w,b)\Big[-\frac{ab}{(1+cw)^2}-d-\mu_0-\mu_1+Rk-dwk-(\mu_0 b+\mu_1 b)\frac{r'(b)}{r(b)}+w\Big(\frac{\lambda a}{1+cw}-\frac{abk}{1+cw}+\frac{\lambda ab}{1+cw}\frac{r'(b)}{r(b)}\Big)\Big]$$

取 $r(b)=\mathrm{e}^{\frac{kb}{\lambda}}b^{-1}$，则 $r(b)$ 满足

$$\frac{\lambda a}{1+cw}-\frac{abk}{1+cw}+\frac{\lambda ab}{1+cw}\frac{r'(b)}{r(b)}=0$$

则

$$\frac{\partial(FD)}{\partial w}+\frac{\partial(DG)}{\partial b}\leqslant D(w,b)\left[-\frac{ab}{\left(1+\frac{cR}{d}\right)^2}-d+Rk-\frac{(\mu_0+\mu_1)kb}{\lambda}-dwk\right]$$

定义

$$H=-\Big[\frac{ad^2}{(d+cR)^2}+\frac{(\mu_0+\mu_1)k}{\lambda}\Big]b-d+Rk-dwk$$

取

$$k=-\frac{ad^2\lambda}{(d+cR)^2(\mu_0+\mu_1)}$$

有 $H\leqslant -d$，从而当 $0<b<b_0$ 时，

$$\frac{\partial(FD)}{\partial w}+\frac{\partial(DG)}{\partial b}<0$$

当 $b>b_0$ 时沿系统(1)的解，有

$$\frac{\partial(DF)}{\partial w}+\frac{\partial(DG)}{\partial b}=D(w,b)\Big[-\frac{ab}{(1+cw)^2}-d+\frac{\lambda aw}{1+cw}-\mu_0+\Big(R-\frac{aw}{1+cw}b-dw\Big)\frac{s'(w)}{s(w)}+\Big(\frac{\lambda aw}{1+cw}b-\mu_0 b-\mu_1 b_0\Big)\frac{r'(b)}{r(b)}\Big]$$

与上述 $s(w)$，$r(b)$ 的取法类似，令

$$H_1=-\frac{ab}{(1+cw)^2}-d+Rk-dwk-\mu_0-(\mu_0 b+\mu_1 b_0)\Big(\frac{k}{\lambda}-\frac{1}{b}\Big)$$

对 $0<R<R^1$ 情形，取 $k=1$，此时

$$H_1<-d+R-\frac{(\mu_0+\mu_1)b_0}{\lambda}+\mu_1$$

则当 $0<R\leqslant R^1$ 时，$H_1<0$. 此时系统(1)不存在非平凡的周期解.

对于 $\mu_1<d$，$R\geqslant R^2$ 情形，

$$H_1<-\Big[\frac{ad^2}{(d+cR)^2}+\frac{\mu_0 k}{\lambda}\Big]b-d+Rk-\frac{\mu_1 kb_0}{\lambda}+\mu_1-dwk$$

取 $k=\frac{-ad^2\lambda}{(d+cR)^2\mu_0}$，则

$$H_1<-d+\mu_1+\frac{\mu_1 b_0 ad^2}{(d+cR)^2\mu_0} \tag{7}$$

由(7)式知：当 $\mu_1<d$，$R\geqslant R^2$ 时，$H_1<0$，系统(1)不存在周期轨.

定理 5　当下面两个条件成立，正平衡点 E_1 全局渐近稳定.

(i) $0 < R_* < R < R^* \leqslant R_5$ 或 $0 < R_* < R < \max\{R_3, R_5\} < R^*$;

(ii) $0 < R \leqslant R'$ 或 $\mu_1 < d$, $R \geqslant \max\{0, R''\}$.

证 由引理 2 及定理 1 可知当(i) 成立,E_1 是唯一正平衡点且局部渐近稳定,裸土平衡点 E_0 不稳定. 由定理 4 可知当(ii) 成立,系统(1) 不存在极限环. 因此正平衡点 E_1 全局渐近稳定.

3 结 论

本文建立了具有 Holling-II 功能反应和下渗反馈效应的水-植物模型. 发现若存在正平衡点 E_3,当 $\eta = 0$ 时,系统(1) 在 E_3 处产生 Hopf 分支. 当 $0 < R \leqslant R'$ 或 $\mu_1 < d$, $R \geqslant \max\{0, R''\}$ 时,系统(1) 不存在极限环. 文献[2] 中具有 Holling-I 功能反应的水-植物模型有两个正平衡点,且只有当降雨量 R 比较小时,裸土平衡点 E_0 才会全局渐近稳定. 但本文中具有 Holling-II 功能反应的水-植物模型有 3 个正平衡点,当 $\lambda a \leqslant \mu_0 c$ 时,不论降雨量多少,裸土平衡点 E_0 都全局渐近稳定.

参考文献:

[1] KINAST S, ZELNIK Y R, BEL G, et al. Interplay Between Turing Mechanisms Can Increase Pattern Diversity [J]. Physical Review Letters, 2014, 112(7): 078701.

[2] WANG Xiao-li, SHI Jun-ping, ZHANG Guo-hong. Interacion Between Water and Plants: Rich Dynamics in a Simple Model [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, 2017, 22(7): 2971-3006.

[3] LEFEVER R, LEJEUNE O. On the Origin of Tiger Bush [J]. Bulletion of Mathematical Biology, 1997, 59(2): 263-294.

[4] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[5] WANG Wen-di. Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Treatment [J]. Mathematical Biosciences, 2006, 201(1-2): 58-71.

[6] HSU S B, HUANG T W. Global Stability for a Class of Predator-Prey Systems [J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995, 55(3): 763-783.

Dynamics Analysis of Water-Plant Model with Infiltration Feedback

ZHOU Ai-rong, WANG Wen-di, LI Yan, HE Nan

School of Mathematics and Statistic, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we develop a water-plant model with Holling-II function response and infiltration feedback. Firstly through an analysis of local stability of the equilibriums, we present existence conditions of Hopf bifurcation. Then by constructing Dulac function, we show the nonexistence conditions of limit cycle. Finally, we discuss global stability of equilibriums.

Key words: water-plant model; stability; Hopf bifurcation

责任编辑 张 枸